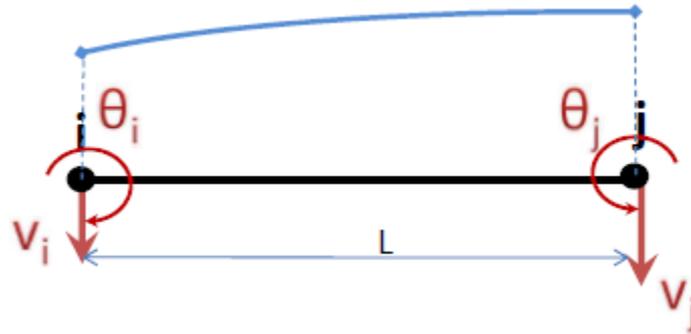


## Éléments Finis de poutre BERNOLLI-EULER

### 1. Barre soumise à la flexion :



Chaque nœud possède 2 ddl :

une translation «  $v$  » et une rotation «  $\theta$  »

Ce qui donne un vecteur déplacement  $\{u\}$  de (4x1)

$$\{U_K\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

La variation entre les deux nœuds (origine et extrémité) n'est pas linéaire, elle est de la forme :

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3$$

$$v(x) = \sum_{k=1}^4 N_k(x) \cdot U_K$$

Les fonctions de forme  $N_k(x)$  sont déterminées à partir des conditions aux nœuds, à savoir :

Au nœud origine :

$$v(x = 0) = v_i \quad \rightarrow \alpha_1 = v_i$$

$$\theta(x = 0) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{(x=0)} = \theta_i \quad \rightarrow \alpha_2 = \theta_i$$

Au nœud extrémité :

$$v(x = L) = v_j \quad \rightarrow \alpha_3 = -\frac{(2\theta_i + \theta_j)L}{L^2} - \frac{3(v_i - v_j)}{L^2}$$

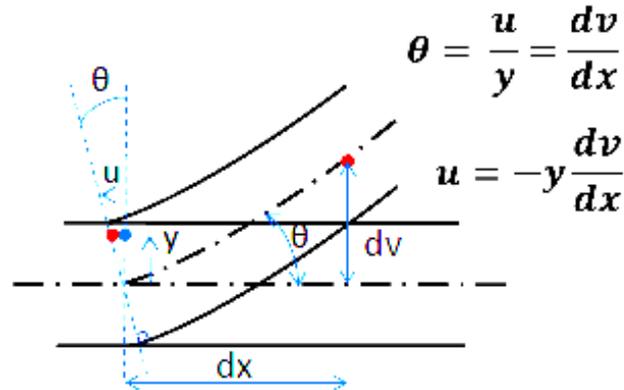
$$\theta(x = L) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{(x=L)} = \theta_j \quad \rightarrow \alpha_4 = -\frac{(\theta_i + \theta_j)L}{L^2} + \frac{2(v_i - v_j)}{L^3}$$

$$\rightarrow N_1(x) = \frac{(2 \cdot x^3 - 3 \cdot L \cdot x^2 + L^3)}{L^3}$$

$$\rightarrow N_2(x) = \frac{(x^3 - 2 \cdot L \cdot x^2 + L^2 \cdot x)}{L^2}$$

$$\rightarrow N_3(x) = \frac{-(2 \cdot x^3 - 3 \cdot L \cdot x^2)}{L^3}$$

$$\rightarrow N_4(x) = \frac{(x^3 - L \cdot x^2)}{L^2}$$



$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2}{dx^2} [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = -y \left[ \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \right] \rightarrow [B] = -y [M] \rightarrow [B]^T = -y [M]^T$$

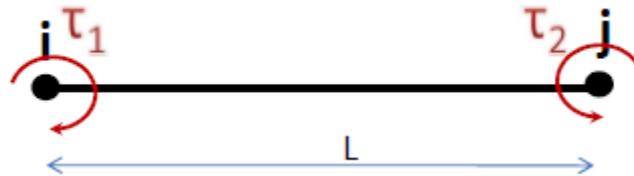
$$[M] = \left[ \frac{12x - 6l}{l^3} \quad \frac{6x - 4l}{l^2} \quad \frac{-12x + 6l}{l^3} \quad \frac{6x - 2l}{l^2} \right]$$

$$[K] = \int_{V_e} [B]^t [C] [B] dV = E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \cdot dz \int_0^l [M] \cdot [M]^T \cdot dx$$

$$[K] = \frac{E \cdot I_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & -6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité d'un élément soumis à la flexion

## 2. Eléments de torsion



Chaque nœud possède 1 ddl  $\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix}$

La matrice de rigidité est la même que celle de la traction en remplaçant  $\frac{EA}{L}$  par  $\frac{GJ}{L}$

Ce qui donne :

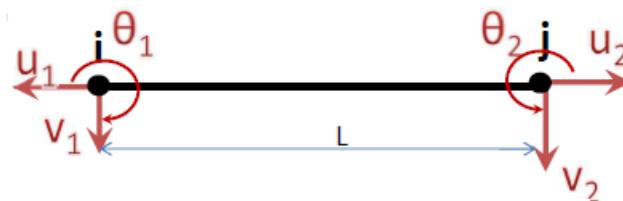
$$[K] = \frac{G.J}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  : Module de torsion ou le module d'élasticité transversal

$J$  : Moment d'inertie torsionnel ou la constante de torsion de Saint-Venant

## 3. Barre soumise à la traction et à la flexion :



Chaque nœud possède 3 ddl

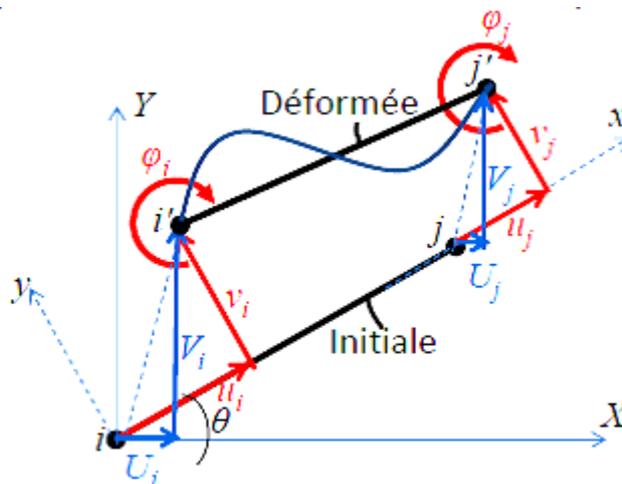
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité sera la combinaison entre 2 matrices (traction+flexion) Ce qui donne :

	$u_1$	$v_1$	$\theta_1$	$u_2$	$v_2$	$\theta_2$
$u_1$	$\frac{E.A}{l}$	0	0	$-\frac{E.A}{l}$	0	0
$v_1$	0	$\frac{12.E.I_z}{l^3}$	$\frac{6.E.I_z}{l^2}$	0	$-\frac{12.E.I_z}{l^3}$	$\frac{6.E.I_z}{l^2}$
$\theta_1$	0	$\frac{6.E.I_z}{l^2}$	$\frac{4.E.I_z}{l}$	0	$-\frac{6.E.I_z}{l^2}$	$\frac{2.E.I_z}{l}$
$u_2$	$-\frac{E.A}{l}$	0	0	$\frac{E.A}{l}$	0	0
$v_2$	0	$-\frac{12.E.I_z}{l^3}$	$-\frac{6.E.I_z}{l^2}$	0	$\frac{12.E.I_z}{l^3}$	$-\frac{6.E.I_z}{l^2}$
$\theta_2$	0	$\frac{6.E.I_z}{l^2}$	$\frac{2.E.I_z}{l}$	0	$-\frac{6.E.I_z}{l^2}$	$\frac{4.E.I_z}{l}$

#### 4. Matrice de Transformation :

Généralement dans les portiques les éléments sont orientés d'une manière quelconque, nous devons nous référer alors par rapport à un seul repère « global ». On doit donc procéder à la transformation d'un repère local à un repère global :



$$\text{nœud } i : \begin{cases} u_i = U_i \cdot \cos\theta + V_i \cdot \sin\theta \\ v_i = -U_i \cdot \sin\theta + V_i \cdot \cos\theta \\ \varphi_i \end{cases}$$

$$\text{nœud } j : \begin{cases} u_j = U_j \cdot \cos\theta + V_j \cdot \sin\theta \\ v_j = -U_j \cdot \sin\theta + V_j \cdot \cos\theta \\ \varphi_j \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ V_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{T}] \cdot \{\mathbf{U}^e\}$$

Nous allons écrire maintenant la matrice de rigidité ainsi que le vecteur de forces nodales dans le repère global d'axes :

L'expression de la matrice de rigidité attachée à un élément de poutre  $[K^e]$  dans le système global d'axes aura la forme :

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}^e] \cdot [\mathbf{T}]$$

Les forces nodales seront données par l'expression :

$$\{\mathbf{F}^e\} = [\mathbf{T}]^T \cdot \{\mathbf{f}^e\} = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}^e] \cdot [\mathbf{T}] \cdot \{\mathbf{U}^e\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}^e\}$$

Avec :

$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}^e] \cdot [\mathbf{T}]$  : Matrice de rigidité globale

$[\mathbf{k}^e]$  : Matrice de rigidité locale

$[\mathbf{T}]$  : Matrice de transformation

$\{\mathbf{F}^e\}$  : Le vecteur forces nodales dans le repère global (X,Y)

$\{\mathbf{f}^e\}$  : Le vecteur forces nodales dans le repère local (x,y)

$\{\mathbf{U}^e\}$  : Le vecteur déplacements dans le repère global (X,Y)

$\{\mathbf{u}^e\}$  : Le vecteur déplacements dans le repère local (x,y)

La matrice de rigidité de l'élément dans le repère global sera :  $[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}^e] \cdot [\mathbf{T}]$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -s \frac{6EI}{L^2} & -\left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -s \frac{6EI}{L^2} \\ \left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & c \frac{6EI}{L^2} & -sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & c \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & & -c \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & \left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & s \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L} \\ & & & \left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -c \frac{6EI}{L^2} & -c \frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Sym