Table des matières

Chapitre 1

Intégrales Multiples

L' intégrale multiple est la généralisation d'une intégrale simple : c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction d'une seule variable réelle. On s'intéresse ici à la généralisation à des fonctions dont le nombre de variables est supérieur ou égale deux ou trois.

1.1 Intégrales doubles

1.1.1 Principe de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle

Soit $f : R = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un rectangle R. Lorsque on partage R en $n \times m$ sous-rectangle, on obtient un quadrillage q d'un rectangle R, donc il est défini comme une subdivision du segment $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, tels que $x_0 = a$ et $x_n = b$ et une subdivision du segment $[c, d]$ en m sous-intervalles $\left[y_{j-1}, y_j\right]$, $j = 1, ..., m$, tels que $y_0 = c$ et $y_m = b$. Le quadrillage q est donc constitué $n \times m$ sous-rectangles $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right]$, $i = 1, ..., n$,et $j = 1, ..., m$.

On définit la somme de Darboux inférieur par :

$$S_{\inf}(q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \left(y_j - y_{j-1}\right) m_{i,j}, \tag{1.1}$$

où $m_{i,j}$ représente le minimum de f sur $R_{i,j}$.
Soit maintenant M le majorant de f sur le rectangle R, on peut écrire alors :

$$S_{\inf}(q) \leq (b-a)(d-c)\, M. \tag{1.2}$$

De même, on définit la somme de Darboux supérieur par :

$$S_{\sup}(q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \left(y_j - y_{j-1}\right) M_{i,j}, \tag{1.3}$$

où $M_{i,j}$ représente le maximum de f sur $R_{i,j}$.
Soit maintenant m le minorant de f sur le rectangle R, on peut écrire alors :

$$S_{\sup}(q) \geq (b-a)(d-c)\, m. \tag{1.4}$$

De (1.2) et (1.4), on peut facilement démontrer que l'ensemble des sommes de Darboux inférieur admet une borne supérieur, qui est inférieur ou égale à la borne inférieur de l'ensemble des Darboux supérieur. On peut montrer alors que ces bornes sont égales. Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann. On obtient alors la définition de l'intégrale double suivante :

Définition 1.1.1. *Pour qu'une fonction continue $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ soit intégrable sur R,il faut et il suffit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un quadrillage $q = \left\{R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right], i = 1, ..., n, et\, j = 1, ..., m.\right\}$, tel que :*

$$\begin{cases} 1.S_{\inf}(q) \leq \int\int_R f(x,y)dxdy \leq S_{\sup}(q). \\ 2. \left|S_{\sup}(q) - S_{\inf}(q)\right| \leq \epsilon\,(b-a)(d-c)\,, \end{cases} \tag{1.5}$$

où le nombre $\int\int_R f(x,y)dxdy$ représente le volume de $\mathbb{R}^3$ situé entre le plan xoy, la surface d'équation et les quatre plans verticaux $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$.

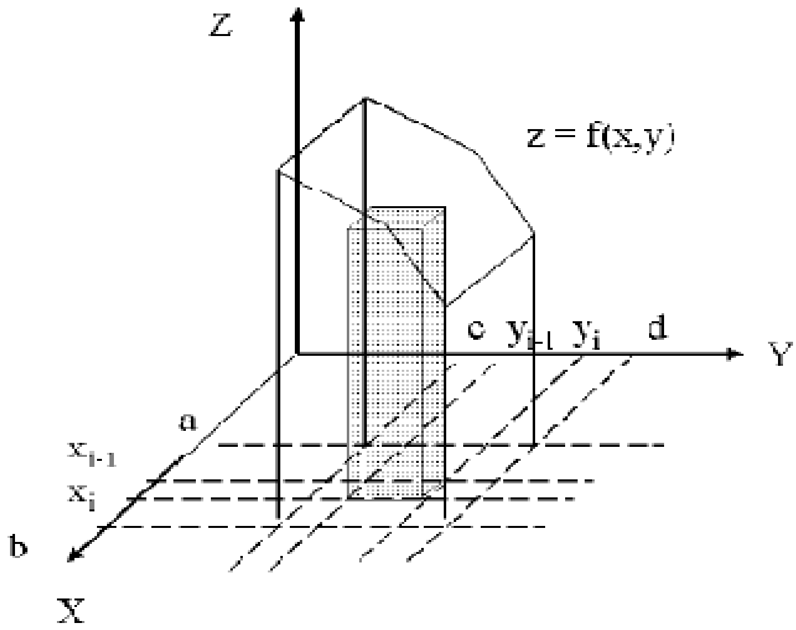

FIGURE 1.1 –

Exemple 1.1.1. *En utilisant la définition de l'intégrale double, calculer* $I = \int\int_R f(x,y)dxdy$ *, où* $f(x,y) = x + y$ *et* $R = [0,1] \times [0,1]$ *.*
on va prendre comme quadrillage du plan, une découpe régulière de R *en* n^2 *petits carrés de sommets* $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$*, pour* $i = 1, ..., n$ *et* $j = 1, ..., n$*.*
Calculons tout d'abord $m_{i,j}$ *et* $M_{i,j}$ *sur les petits carrés* $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$*.*
Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 > 0$*, on a alors*

$$m_{i,j} = \frac{i-1}{n} + \frac{j-1}{n} \text{ et } M_{i,j} = \frac{i}{n} + \frac{j}{n}. \tag{1.6}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S_{\sup}(q) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\left(y_j - y_{j-1}\right)M_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{n}\right) = \frac{n+1}{n}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De même, on peut trouver

$$\begin{aligned} S_{\inf}(q) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\left(y_j - y_{j-1}\right)m_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{i-1}{n}+\frac{j-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Par conséquent

$$\frac{n-1}{n} \leq I = \int\int_R f(x,y)dxdy \leq \frac{n+1}{n}. \tag{1.9}$$

On passe à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on trouve $I = 1$.

1.1.2 Théorèmes de Fubini

Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème 1.1.1. *Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b]\times[c,d]$, on a alors*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_{[a,b]} dx\left(\int_{[c,d]} f(x,y)dy\right) = \int_{[c,d]} dy\left(\int_{[a,b]} f(x,y)dx\right). \tag{1.10}$$

Remarque 1.1. *L'intéret de théorème de Fubini est donc le calcul d'une intégrale double sur un rectangle se ramène au calcul de deux intégrales simples : On fixe y et on intégre par rapport à x sur le segment $[a,b]$, puis on intégre cette expression de y sur le segment $[c,d]$. Alternativement, on peut faire de même on intégre par rapport à y puis ensuite par rapport à x.*

Exemple 1.1.2. *Calculons* $I = \int\int_R f(x,y)dx$, *telle que* $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y+1)^2}$, *et* $R = [0,1] \times [0,1]$.
On a

$$\begin{aligned} I &= \int\int_R f(x,y)dx = \int_{[0,1]} dy \left(\int_{[0,1]} \frac{dx}{(x+y+1)^2} \right) \\ &= -\int_{[0,1]} \left[\frac{1}{x+y+1} \right]_0^1 dy = \int_{[0,1]} \frac{dy}{y+1} - \int_{[0,1]} \frac{dy}{y+2} dy \\ &= \left[\ln \left(\frac{y+1}{y+2} \right) \right]_0^1 = \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. *Si* $f(x,y) = h(x) \times g(y)$, *où* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues, on a alors :*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \left(\int_{[a,b]} h(x)dx \right) \times \left(\int_{[c,d]} g(y)dy \right). \tag{1.11}$$

Théorème de Fubini sur un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1.2. *On appelle compact élémentaire de* $\mathbb{R}^2$, *toute partie* C *de* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant :*

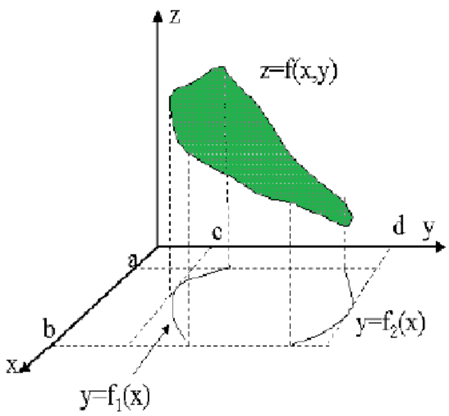

FIGURE 1.2 –

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \le x \le b \text{ et } f_1(x) \le y \le f_2(x)\Big\} \text{(voire FIGURE 1.2)}, \quad (1.12)$$

où $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues.*
ou bien :

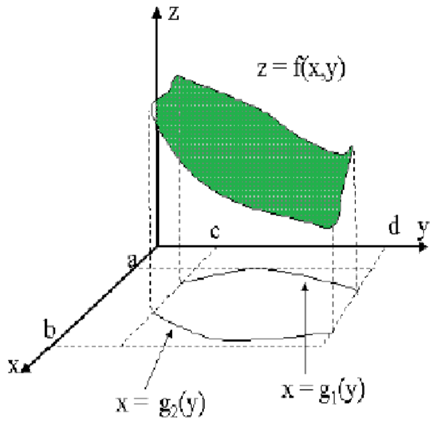

FIGURE 1.3 –

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ c \le y \le d \text{ et } g_1(y) \le x \le g_2(y)\Big\} \text{(voire FIGURE 1.3)}, \quad (1.13)$$

où $g_1, g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues.*

Théorème 1.1.2. *Soit C un compact élémentaire de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* f *une fonction continue sur C.*
1. Si le compact C peut se représenter par la formule (1.12), alors

$$\int\int_C f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \times \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right). \quad (1.14)$$

1. Si le compact C peut se représenter par la formule (1.13), alors

$$\int\int_C f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \times \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx\right). \quad (1.15)$$

Exemple 1.1.3. *Calculons* $I = \int\int_C f(x,y)dx$*, où*

$$f(x,y) = 1, \text{et } C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \ge 0 \text{ et } x-1 \le y \le 1-x\Big\}. \quad (1.16)$$

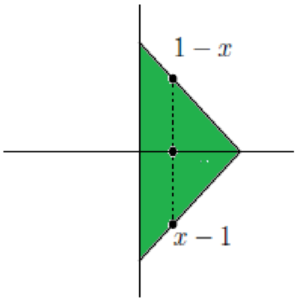

FIGURE 1.4 –

D'après la figure 1.4, C peut se représenter par

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1 \ et \ \ x-1 \leq y \leq 1-x\right\}. \tag{1.17}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int\int_C f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \times \left(\int_{x-1}^{1-x} dy\right) \\ &= \int_0^1 (2-2x)\, dx = 1. \end{aligned}$$

1.1.3 Propriétés de l'intégrale double

1. L'intégrale double sur un compact C de $\mathbb{R}^2$ est linéaire ; c'est-à-dire :

$$\int\int_C (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \int\int_C f(x,y)dxdy + \beta \int\int_C g(x,y)dxdy. \tag{1.18}$$

2. Si $f(x,y) \geq 0$, pour tout $x, y \in C$, alors $\int\int_C f(x,y)dxdy \geq 0$.

3. i $f(x,y) \geq g(x,y)$, pour tout $x, y \in C$, alors $\int\int_C f(x,y)dxdy \geq \int\int_C g(x,y)dxdy$.

4. $\left|\int\int_C f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_C \left|f(x,y)\right| dxdy$.

5. $\left|\int\int_C (f \times g)\,(x,y)dxdy\right| \leq \left(\sqrt{\int\int_C f^2(x,y)dxdy}\right) \times \left(\sqrt{\int\int_v g^2(x,y)dxdy}\right)$.

6. Si C_1 et C_2 deux compact simples vérifiant $\mathring{C}_1 \cap \mathring{C}_2 = \emptyset$, alors

$$\int\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{C_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{C_2} f(x,y)dxdy. \tag{1.19}$$

1.1.4 Changement de variables dans une intégrale double

Soient $D, \hat{D}$ deux compacts élémentaires de $\mathbb{R}^2$ et soit $\varphi : \hat{D} \to D$ une bijection de classe C^1telles que pour tout $(u,v) \in \hat{D}$, $\varphi(u,v) = (x,y) \in D$. Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 1.1.3.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\hat{D}} f(\varphi(u,v)) \left|\det J_\varphi(u,v)\right| dudv, \tag{1.20}$$

où $\left|\det J_\varphi(u,v)\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right|$ *(la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de* φ*) ne s'annule pas à l'intérieur de* D*.*

Cas particuliers

Passage en coordonnées polaires Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, telles que pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\rho, \theta) = (x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons donc

$$\left|\det J_\varphi(\rho,\theta)\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\right| = \rho. \tag{1.21}$$

Par suite

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\hat{D}} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\rho d\theta. \tag{1.22}$$

Exemple 1.1.4. *Calculons* $\int\int_D f(x,y)dxdy$*, où*

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} \text{ et } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}. \tag{1.23}$$

En effectuant le changement de variables $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, on trouve

$$\hat{D} = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 1 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{1.24}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{6}\left[\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{6}\left((3)^{\frac{3}{2}} + (2)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Changement de variable affine Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telles que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(u,v) = (x = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1, y = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2),$$

et

$$\left|\det J_\varphi(u,v)\right| = \left|\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right| \neq 0. \tag{1.26}$$

Nous avons donc

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\hat{D}} \left|\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right| f(\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1, \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2)dudv. \tag{1.27}$$

Exemple 1.1.5. *Calculons $I = \int\int_D f(x,y)dxdy$, où*

$$f(x,y) = \exp(x+y) \text{ et } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x+y \le 1 \text{ et } 0 \le x-y \le 1\right\}. \tag{1.28}$$

Soit $\hat{D} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u = x+y, v = x-y \text{ et } (x,y) \in D\right\}$, Donc $\hat{D} = ([0,1])^2$.
D'autre part $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2}, \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$, ce qui implique $\left|\det J_\varphi(u,v)\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$.
On a alors

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp(u)du \int_0^1 dv = \frac{e-1}{2}.$$

1.2 Intégrales triples

1.2.1 Principe de l'intégrale triple d'une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$

Le principe de l'intégrale triple est le même que pour l'intégrale double, en remplaçant juste un petit élément de surface par un petit élément de volume.
Soit f est une fonction continue de trois variables (x, y, z) sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$. On définit $\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$ comme limite de somme de la forme $\sum_i \sum_j \sum_k (x_i - x_{i-1})\left(y_j - y_{j-1}\right)(z_k - z_{k-1}) f(u_i, v_j, w_k)$, dans laquelle, (u_i, v_j, w_k) est un point du petit parallélépipède $[x_i - x_{i-1}] \times \left[y_j - y_{j-1}\right] \times [z_k - z_{k-1}]$.

1.2.2 Théorèmes de Fubini

Théorème de Fubini sur un parallélépipède

Théorème 1.2.1. *Soit f une fonction continue sur un parallélépipède $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, on a alors*

$$\begin{aligned}\int\int\int_P f(x, y, z)dxdydz &= \int_{[e,f]} dz\left(\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y, z)dxdy\right) \\ &= \int_{[a,b]} dx\left(\int\int_{[c,d]\times[e,f]} f(x, y, z)dydz\right) \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{1.29}$$

Exemple 1.2.1. *Calculons $I = \int\int\int_P f(x, y, z)dxdydz$, où*

$$f(x, y, z) = 2(xy + yz + xz) \text{ et } P = [0, 1]^3. \tag{1.30}$$

On a

$$\int_0^1 2(xy + yz + xz)\, dx = y + 2yz + z. \tag{1.31}$$

Puis

$$\int_0^1 (y + 2yz + z)\, dy = \frac{1}{2} + 2z. \tag{1.32}$$

Enfin

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2z\right) dz = \frac{3}{2}. \tag{1.33}$$

Théorème de Fubini sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$

L'idée est de prendre l'une des trois variables x, y et z varie entre deux bornes d' extrêmes a et b. Supposons par exemple que ce soit z (on peut intervertir les rôles de x, y et z), tel que le domaine plan obtenu en coupant le volume D par un plan $z = cst$ soit un domaine D_z suffisamment simple pour que l'on puisse y calculer l'intégrale double $\int\int_{D_z} f(x, y, z)dxdy$. On a donc

$$\int\int\int_P f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dz \left(\int\int_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right). \tag{1.34}$$

Exemple 1.2.2. *Calculons* $\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$, *où*

$$f(x, y, z) = 1 \text{ et } D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y, z \geq 0 \text{ et } x + y + 2z \leq 1 \right\}. \tag{1.35}$$

Il s'agit donc de calculer le volume de D.
On découpe D par un plan horizontal $z = z_0$*, on trouve alors un triangle* D_z *en fonction de x et y limité par des axes* $x = y = 0$ *et* $x + y = 1 - 2z_0$*, tel que* $z_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} dz \left(\int\int_{D_z} f(x, y, z)dxdydz \right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} dz \left(\int_0^{1-2z} dx \left(\int_0^{1-2z-x} f(x, y, z)dy \right) \right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dz \left(\int_0^{1-2z} (1 - x - 2z)\, dx \right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2z + 2z^2 \right) dz = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

1.2.3 Changement de variables dans une intégrale triple

Soient $D, \hat{D}$ deux compacts élémentaires de $\mathbb{R}^3$ et soit $\varphi : \hat{D} \to D$ une bijection de classe C^1telles que pour tout $(u, v, k) \in \hat{D}$, $\varphi(u, v, k) = (x, y, z) \in D$. Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 1.2.2.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{\hat{D}} f\left(\varphi(u,v,k)\right)\left|\det J_\varphi(u,v,k)\right| dudvdk, \tag{1.36}$$

où $\left|\det J_\varphi(u,v,k)\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial k} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial k} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial k} \end{pmatrix}\right|$ *(la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de* φ*) ne s'annule pas à l'intérieur de* D.

Cas particuliers

Passage en coordonnées cylindriques

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, telle que pour tout $(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(\rho, \theta, z) = (x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z) \in \mathbb{R}^3$. Nous avons donc

$$\left|\det J_\varphi(\rho,\theta,z)\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \rho. \tag{1.37}$$

Par suite

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{\hat{D}} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)d\rho d\theta dz. \tag{1.38}$$

Exemple 1.2.3. *Calculons* $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$, *où*

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \text{ et } D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0, 0 \le z \le 1\right\}. \tag{1.39}$$

En effectuant le changement de variables $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$, *on trouve*

$$\hat{D} = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \le z \le 1\right\}. \tag{1.40}$$

Donc

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pi}{2}\left[\ln\rho\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{1.41}$$

Passage en coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\omega, \\ y = \rho \sin\theta \sin\omega, \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases} \tag{1.42}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et $\omega \in [0, 2\pi]$. Dans ce cas

$$\left|\det J_\varphi(\rho, \theta, \omega)\right| = \left|\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\omega & \rho\cos\theta\cos\omega & -\rho\sin\theta\sin\omega \\ \sin\theta\sin\omega & \rho\cos\theta\sin\omega & \rho\sin\theta\cos\omega \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right| = \rho^2\sin\theta. \tag{1.43}$$

Exemple 1.2.4. *Calculons* $\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$, *où*

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ et } D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}. \tag{1.44}$$

En effectuant le changement de variables (1.42), on trouve

$$\hat{D} = \left\{(\rho, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \omega \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi\right\}. \tag{1.45}$$

Donc

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = 6\pi. \tag{1.46}$$

1.2.4 Applications

Calcul de quelques volumes

Définition 1.2.1. *Le volume V d'un corps est donné par*

$$V = \int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz, \tag{1.47}$$

où D représente le domaine délimité par ce corps.

Volume d'un cylindre : Dans ce cas $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ et } 0 \leq z \leq h\right\}$. On a alors

$$V = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2 h \qquad (1.48)$$

Volume d'un sphère : Dans ce cas $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$. On a alors

$$V = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho \sin\theta d\rho = \frac{1}{3}\pi R^3 \qquad (1.49)$$

Volume d'un ellepsoïde : Dans ce cas $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3\right\}$. En effectuant le changement de variable $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin\theta$, où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on trouve

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_D dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \\
&= 2c \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \\
&= 2bc \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cos^2\theta d\theta \\
&= 8bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

Volume de l'ellepsoïde d'équation $x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 = c^2$, où $a, b, c > 0$:Soit

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 = c^2\right\} \\
&= \left\{(c\rho \sin\theta \cos\omega, b\rho \sin\theta \sin\omega, a\rho \cos\theta) : 0 < \rho < 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \omega \leq 2\pi\right\}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$V = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 c^2\rho^2 \sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi c^2.$$

Volume commun aux deux cylindres d'équations respectives $x^2 + y^2 = R^2$ et $x^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$. Dans ce cas $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < R^2 \text{ et } x^2 + z^2 < R^2\right\}$. On a alors

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_D dxdydz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz \\ &= 8\int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{16}{3}R^2. \end{aligned} \tag{1.50}$$