Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables réelles

1.1 Fonctions de plusieurs variables réelles

Définition 1.1.1. *Une fonction de n variables réelles est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Cette partie D s'appelle le domaine de définition de f.*

Exemple 1.1.1. *Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{1.1}$$

f est une fonction de deux variables réelles.

1.1.1 Limite en un point

Définition 1.1.2. *Soit f est une fonction de n variables, a valeurs dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$, sauf éventuellement en x_0, et l un réel donné. Alors :*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in B(x_0, \alpha) \text{ on a } \left| f(x) - l \right| < \varepsilon.$$

Exemple 1.1.2. *On considère la fonction* $(x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ *, et soit* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
1ère méthode : Par définition, nous avons :

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

On a alors :

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} \leq (\sqrt{(x^2+y^2)})^2 < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0, \exists \alpha = \sqrt{\varepsilon}$ *tel que :*

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \alpha \Longrightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

C'est-à- dire : $f(x, y) \to 0$, *quand* $(x, y) \to (0, 0)$.
2ème méthode : On pose $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ *, on peut écrire :*

$$f(x, y) = \frac{\rho^4 \sin 2\theta}{2\rho^2} = \frac{\rho^2}{2}\sin 2\theta \to 0, \textit{quand } \rho \to 0.$$

Exemple 1.1.3. $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, *et* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
On a alors

$$f(x, \lambda x) = \frac{x-\lambda x}{x+\lambda x} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \tag{1.2}$$

Puisque la limite en $(0, 0)$ *de* $f(x, \lambda x)$ *dépend de la valeur de* λ, *l'application* f *n'a pas de limite en* $(0, 0)$.
Ou bien $f(x, 0) = 1$ *et* $f(0, y) = -1$. *Donc la limite de* f *n'existe pas (car la limite lorsqu'elle éxiste, elle est unique).*

1.1.2 Continuité en un point

Définition 1.1.3. *Soit* $f : V(a) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R}^n$ *et en particulier en* a.
On dit que f *est continue en* a, *lorsque* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ *; c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in B(a, \alpha) \text{ on a } |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1.1. *Soit f une fonction continue. Si une suite $\{x_p\}$ de point de $\mathbb{R}^n$ converge vers le point $a \in \mathbb{R}^n$, alors la suite $\{f(x_p)\}$ des images converge vers $f(a)$.*

Remarque 1.1. *Les propriétes d'une fonction continue en $a \in \mathbb{R}^n$ sont identiques à celle dans le cas d'une fonction d'une seule variable.*

Définition 1.1.4. *Soit $f : E \longrightarrow F$ (E, F deux sous espaces véctoriels normés de $\mathbb{R}^n$) une fonction et soit $a = (a_1, ..., a_n) \in E$.*
On dit que f est continue en a, lorsque $\lim\limits_{X \longrightarrow a} f(X) = f(a)$; c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in B_E(a, \alpha), \text{ on a } \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon$$

Proposition 1.1.2.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} f_i(x) = f_i(a), \text{ pour tout } i = 1, \bar{2}, ..., n.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in B_E(a, \alpha), \text{ on a } \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| f_i(x) - f_i(a) \right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2}, \text{ pour tout } i = 1, ..., n. \\ &= \left\| f(x) - f(a) \right\|_F < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui assure $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f_i(x) = f_i(a)$, pour tout $= 1, ..., n$.
$\underline{\Leftarrow}$) Supposons maintenant que : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f_i(x) = f_i(a)$, $i = 1, ..., n$. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in B_E(a, \alpha), \text{ on a } \left| f_i(x) - f_i(a) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

pour tout $i = 1, ..., n$. C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in B_E(a, \alpha) \text{ on a } \left| f_i(x) - f_i(a) \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n},$$

pour tout $i = 1, ..., n$. Par suite, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in B_E(a, \alpha)$, on a

$$\left\| f(x) - f(a) \right\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2} < \varepsilon.$$

$\square$

1.1.3 Continuité sur une partie

Définition 1.1.5. *Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est continue sur E lorsque, pour tout point $a \in E$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ telle que } \forall x \in E \cap B_E(a, \alpha) \text{ on a } \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.3. *Soit $f : E \to \mathbb{R}^q$ ($E \subset \mathbb{R}^p$). Il y a une équivalence entre les trois assertions suivantes :*

1. *L'application f est continue sur E.*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}^q$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.*
3. *L'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{R}^q$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. 01) $\Longrightarrow$ 02) Supposons que f est continue sur E.
Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in f^{-1}(A)$, donc $f(a) \in A$.
A est un ouvert de $\mathbb{R}^q$ $\Longleftrightarrow$ $\exists r > 0$, telle que $\forall y \in A$, $\left\| y - f(a) \right\| < r$. C'est-à-dire : $B(f(a), r) \subset A$.
Mais f est continue en a, on a alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, telle que :

$$\forall x \in E \cap B(a, \alpha) \Rightarrow \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon = r.$$

Ce qui entraîne $f(x) \in A$, i.e. $x \in f^{-1}(A)$. On en déduit alors que la boule ouverte de centre a et de rayon α est incluse dans $f^{-1}(A)$, ce qui montre que $f^{-1}(A)$ est ouvert.
02) $\Longrightarrow$ 01) : Soit $a \in E$ (quelconque). Il suffit de montrer que f est continue en a.
Soit $\varepsilon > 0$ donné, et soit $f(a) \in A$, telle que : $B(f(a), \varepsilon) \subset A$ (car A est ouvert).
Alors

$$f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset A \Longleftrightarrow \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon, \tag{1.5}$$

avec $x \in f^{-1}(A)$.
Puisque $f^{-1}(A)$ est un ouvert, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, telle que $\|x - a\| < \alpha \Longrightarrow \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon$. Ce qui bien la définition de la continuité de f au point a.
01) $\Longrightarrow$ 03) Il suffit de passer au complémentaire.

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et soit B^c un fermé de $\mathbb{R}^q$. Nous avons $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$. Alors

$$B^c \text{ fermé} \Longleftrightarrow B \text{ ouvert} \Longleftrightarrow f^{-1}(B) \text{ ouvert (car } f \text{ continue).} \tag{1.6}$$

Par suite$[f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$ est fermé. □

Proposition 1.1.4. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ continue. Alors l'image de tout compact A de E est un compact de $\mathbb{R}^q$.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(A)$. Alors $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, telle que :$y_n = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
A étant compact, alors de toute suite (x_n) de A, on peut extraire une sous-suite (x'_n) convergeant vers $a \in A$. Donc de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite (y'_n) définie par $y'_n = f(x'_n) \in f(A)$ qui converge vers $f(a) \in f(A)$ (puisque f est continue).
Par suite $f(A)$ est bien compact dans $\mathbb{R}^q$. □

1.2 Fonctions différentiables

1.2.1 Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Définition 1.2.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$).On dit que f admet en $a \in U$ une $i^{ème}$ dérivée partielle première ($1 \le i \le p$) si est seulement si :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+he_i) - f(a)}{h} \text{ existe,}$$

on la note $f'_{x_i}(a)$ ou bien $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Définition 1.2.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1sur U si toutes les dérivées partielles d'ordre un de f existent et sont continues.*

L'ensemble des fonctions de classe C^1sur U est noté $C^1(U, \mathbb{R})$.

Exemple 1.2.1.

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

** Si* $(x,y) \neq (0,0)$*, on a :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(-x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases}$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Donc f *est de classe* C^1*sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**Si* $(x,y) = (0,0)$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors la fonction f *admet des dérivées partielles sur* $\mathbb{R}^2$ *et est de classe* C^1*sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Il est claire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$*, par exemple :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}) = \dfrac{-3n}{25} \to -\infty$*, quand* $n \to +\infty$.

Définition 1.2.3. *Soit* $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ *(*U *étant un ouvert de* $\mathbb{R}^p$*).*

On dit que f *admet des dérivées partielles secondes en un point* $a \in U$*, si les* p *dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ *admettent à leur tour des dérivées partielles en* a.

Si $i \neq j$*, on la note :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a) \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad ou \quad f''_{x_j x_i}(a) \tag{1.8}$$

Si $i = j$*, cette dérivée partielle est notée* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$.

Si f *admet des dérivées partielles secondes en tout point* $a \in U$*, on dit qu'elle admet des dérivées partielles secondes sur* U*. Si de plus, celle-ci sont continues sur* $\mathbb{R}^p$*, on dit que* f *est de classe* C^2 *sur* U*.*

Lensemble des fonction de classe C^2 *sur* U *est bien sur noté* $C^2(U,\mathbb{R})$*.*

Définition 1.2.4. *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Si ses dérivées partielles d'ordre 1 sont encore dérivable par rapport à chaque variable, leurs dérivées partielles sont appelées dérivées partielles secondes. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre n comme les dérivées partielles des dérivées d'ordre $n-1$.*

Remarque 1.2. *Une dérivée partielle d'ordre n est donc obtenue en dérivant partiellement successivement par rapport à une des variables, n fois. Par exemple, on obtient une dérivée d'ordre 4 d'une fonction de trois variables x, y, z en dérivant d'abord en x, puis en y, puis à nouveau en x, puis en z ; ou bien en dérivant en y puis en z, puis deux fois en x.*

Notation : La dérivée partielle d'ordre n d'une fonction de p variables $x_1, x_2, ..., x_p$ obtenue en dérivant n_1 fois par rapport à x_1, n_2 fois par rapport à $x_{2,...,}n_k$ fois par rapport à x_p, où $n_1, ..., n_k$ sont des entiers positifs ou nuls tels que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ est noté $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} ... \partial x_p^{n_k}}$.

1.2.2 Théorème de Schwarz

Théorème 1.2.1. *Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$) admettant des dérivées partielles secondes sur U.*

1. *Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en a, pour tout $i, j = 1, ..., p$ ($i \neq j$), alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \tag{1.9}$$

2. *Si f est de classe C^2 sur U, alors on a sur U :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{1.10}$$

Démonstration. Pour ne pas alourdir les notations, on va supposer que $p = 2$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in U$ et soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, telle que : $(a + h, \beta + k) \in U$ (car U est ouvert). On évalue de deux façons différentes le réel :

$$u(h, k) = [f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta)] - [f(\alpha, \beta + k) - f(\alpha, \beta)].$$

Posons $F_1(x) = f(x, \beta + k) - f(\alpha, \beta)$, on a alors

$$u(h,k) = F_1(\alpha + h) - F_1(a) \overset{T.A.F}{=} hF_1'(\alpha + \theta_1 h);\ \text{où } \theta_1 \in]0,1[\,.$$

Or

$$F_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \beta + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \beta).$$

Donc

$$u(h,k) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 h, \beta + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 h, \beta)\right]$$

Posons maintenant $F_2(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 h, y)$, on a alors

$$u(h,k) = h(F_2(\beta + k) - F_2(\beta)] \overset{T.A.F}{=} hkF_2'(\beta + \theta_2 k);\ \text{où } \theta_2 \in]0,1[$$

Or $F_2'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha + \theta_1 h, y)$. Nous avons donc

$$u(h,k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha + \theta_1 h, \beta + \theta_2 k) \tag{1.11}$$

Soit maintenant $G_1(y) = f(\alpha + \theta_1 h, y) - f(\alpha, y)$. Alors

$$u(h,k) = G_1(\beta + k) - G_1(\beta) \overset{T.A.F}{=} kG_1'(\beta + \theta_3 k);\ \text{où } \theta_3 \in]0,1[\,.$$

Or $G_1' = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y)$. Donc

$$u(h,k) = k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, \beta + \theta_3 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta + \theta_3 k)\right]$$

Posons $G_2(x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \beta + \theta_3 k)$. Alors

$$u(h,k) = k\,[G_2(\alpha + h) - G_2(\alpha)] \overset{T.A.F}{=} khG_2'(\alpha + \theta_4 k);\ \text{où } \theta_4 \in]0,1[\,.$$

Or $G_2'(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((x, \beta + \theta_3 k)$. Donc

$$u(h,k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha + \theta_4 h, \beta + \theta_3 k) \tag{1.12}$$

De (1.11) et (1.12), on en déduit l'énoncé 02.

Pour l'énoncé 01) : Si $(h,k) \longrightarrow (0,0)$, les fonctions dérivées partielles secondes étant supposés continues en $a = (\alpha, \beta)$, quelconque, on aura donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

□

1.2.3 Applications linéaires continues

Définition 1.2.5. *Soient $E \subset \mathbb{R}^p$ et $F \subset \mathbb{R}^q$ deux espaces véctoriels normés définies sur le même corps $\mathbb{k}$, et soit $L : E \longrightarrow F$ une application. On dit que L est linéaire si :*

$$\text{pour tout } x, y \in E, \text{ et pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{k} : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Théorème 1.2.2. *Soit $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. L est continue sur E.
2. L est continue en $x_0 = o_p$.
3. L est bornée sur la boule unitaire $B(o_p, 1)$.

Démonstration.
01) $\Longrightarrow$ 02) Évident.
02) $\Longrightarrow$ 03 : Supposons que L est continue en $x_0 = o_p$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in E; \|X - 0\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \|L(X) - L(0)\|_F < \varepsilon.$$

$L(0) = 0$ (car L est linéaire). On prend $\varepsilon = 1$, on a donc :

$$\exists \alpha > 0 \text{ telle que : } \forall x \in E : \|X\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \|L(X)\|_F < 1.$$

On pose $X = \alpha Y$. Alors :

$$\|X\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \|Y\|_E \leq 1,$$

et

$$\|Y\|_E \leq 1 \Longrightarrow \|L(Y)\|_F < \frac{1}{\alpha} = M.$$

Donc

$$\exists M > 0, \text{ telle que } \forall Y \in B(o_p, 1); \text{ on a } \|L(Y)\| < M.$$

Par suite L est bornée sur la boule $B(o_p, 1)$.
03) $\Longrightarrow$ 01) : Supposons que L est bornée sur $B(o_p, 1)$, et donc L est bornée sur E . C'est-à-dire :

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall X \in E, \text{ on a } \|L(X)\|_F < M \|X\|_E .$$

En effet : si $\|X\|_E = 0$, la relation précédente est vraie. Supposons que : $\|X\|_E = r > 0$, et on prend $y = \frac{1}{r}x$, $\forall x \in E$.
Alors : $\|y\| = 1 \Longrightarrow y \in B(o_p, 1)$.
L est bornée sur $B(o_p, 1)$, alors $\|Ly\|_F \leq M$, $\forall y \in B(o_p, 1)$. Donc

$$\forall x \in E : \|L(x)\|_F = \|L(ry)\|_F = r\|L(y)\|_F = M\|x\|_E \leq rM.$$

Montrons maintenant que L continue sur E.
Soit $a \in E$ (a arbitraire), et soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\|L(X) - L(a)\|_F = \|L(X-a)\|_F \leq M\|X-a\|_E \leq \varepsilon \Longrightarrow \|X-a\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$. Par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{M} \text{ tel que } \forall x \in E; \ \|X-a\| < \alpha, \text{on a } \|L(X) - L(a)\|_F < \varepsilon.$$

Donc L est continue sur E. □

Remarque 1.3. *On note par $L(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et on munit $L(E,F)$ par la norme :*

$$\|L\| = \underset{\|X\|\leq 1}{Sup}\|L(x)\|. \tag{1.13}$$

1.2.4 Fonctions différentiables

Définition 1.2.6. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ (U un ouvert de $\mathbb{R}^p$). On dit que f est différentiable en un point $a \in U$, s'il éxiste une application linéaire L et une fonction ε de U dans $\mathbb{R}^p$ telles que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0_q}{\longrightarrow} 0_q \tag{1.14}$$

Théorème 1.2.3. *Si f est différentiable en $a \in U$, alors l'application linéaire L de la définition précédente est unique. Elle est appelée différentielle de f en a et est notée df_a.*

Démonstration. Supposons que l'on dispose de deux applications L_1 et L_2, vérifiant la définition de la différentiabilité, on a alors :

$$L_1(h) - L_2(h) = \|h\| [\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)] . \tag{1.15}$$

Ce qui implique

$$\lim_{h \to 0_p} \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|} = 0, \forall h \neq 0_p$$

Soit maintenant $h \in U^*$ et soit
$$\begin{array}{rccc} f: &]0, \infty[& \to & \mathbb{R}^q \\ & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{L_2(th) - L_1(th)}{\|th\|} \end{array} .$$

Par suite $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Mais, pour tout $t \in]0, \infty[$;

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{L_2(th) - L_1(th)}{\|th\|} = \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|} \\ &= \frac{L_2(1,h) - L_1(1,h)}{\|1.h\|} = f(1). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Alors $0 = \lim\limits_{t \to 0} f(t) = f(1), \forall h \neq 0_p$. Ce qui implique

$$L_2(h) - L_1(h) = 0, \forall h \neq 0_p. \tag{1.17}$$

Et donc $L_2 = L_1$. □

1.2.5 Propriétés des fonctions différentiables

Soient f et g deux fonction différentiables en $a \in U$, on a alors :

1. f et g sont continues en a.
2. $f + g$ est différentiable en a, et de plus :$d(f+g)_a = df_a + dg_a$.
3. αf est différentiable en a, et de plus : $d(\alpha f)_a = \alpha df_a$.

1.2.6 Expressions de la différentielle

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$).

Théorème 1.2.4. *Si $P = 1$ et $q = 1$. Alors, f est différentiable en $a \in U$, si f est dérivable en a, de plus*

$$\forall h \in \mathbb{R}, df_a(h) = f'(a).h. \tag{1.18}$$

Démonstration. Il suffit de reporter à la définition de la dérivabilité d'une fonction numérique en un point $a \in \mathbb{R}$. □

Théorème 1.2.5. *Si $p = 1$ et q quelconque. Alors, f est différentiable au point $a \in U$ si et seulement si les q fonctions coordonnées $f_1, f_2, ..., f_q$ de f sont dérivables en a, de plus*

$$\forall h \in \mathbb{R}, df_a(h) = (f_1'(a)h, ..., f_q'(a)h). \tag{1.19}$$

Démonstration. $\Leftarrow$) Si chaque fonction coordonnée f_i $(1 \leq i \leq q)$ est dérivable en $a \in U$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (f_1(a+h), ..., f_q(a+h)) \\ &= \left[f_1(a) + f_1'(a)h + |h|\,\varepsilon_1(h), ..., f_q(a) + f_q'(a)h + |h|\,\varepsilon_q(h)\right] \\ &= f(a) + \left(f_1'(a), ..., f_q'(a)\right)h + |h|\,(\varepsilon_1(h), ..., \varepsilon_q(h)), \end{aligned} \tag{1.20}$$

où $\lim\limits_{h\to 0}(\varepsilon_1(h), ..., \varepsilon_q(h)) = 0_q$.
$\Rightarrow$)Supposons que f est différentiable en a. L'application df_a étant linéaire, alors il éxiste q réels $l_1, ..., l_q$, tels que

$$df_a = (l_1 h, ..., l_q h). \tag{1.21}$$

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) \in \mathbb{R}^q$, on a alors

$$f_i(a+h) = f_i(a) + l_i h + |h|\,\varepsilon_i(h), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q, \tag{1.22}$$

où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_i(h) = 0$.
Par suite, chaque fonction coordonnée f_i est dérivable en a et $f_i'(a) = l_i$. C'est-à-dire :

$$df_a(h) = (f_1'(a)h, ..., f_q'(a)h). \tag{1.23}$$

□

Théorème 1.2.6. *Si p quelconque et $q = 1$.*

1. *Si f est différentiable en a, alors f admet p dérivées partielles en a, de plus :*

$$\forall h \in \mathbb{R}_p, df_a = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i. \tag{1.24}$$

2. *Si f admet p dérivées partielles continues en a, alors f est différentiable en a et de plus*

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \tag{1.25}$$

Démonstration. 1. L'application df_a étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$, alors il éxiste p réels $\alpha_1, ..., \alpha_p$ tels que, pour tout $h = (h_1, ..., h_{p)} \in \mathbb{R}^p$, on ait :

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i. \tag{1.26}$$

Alors :

$$df_a(0, ..., h_i, ..., 0) = \alpha_i h_i. \tag{1.27}$$

Nous avons :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \, \varepsilon_q(h) \tag{1.28}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, ..., a_p) &= f(a_1, ..., a_p) + df_a(0, ..., h_i, ..., 0) + |h_i| \, \varepsilon(0, ..., h_i, ..., 0) \\ &= f(a_1, ..., a_p) + \alpha h_i + |h_i| \, \varepsilon_i(h_i), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{h_i \longrightarrow 0} \varepsilon_i(h_i) = 0$.
Cela preuve que la i^{ème} application partielle de f est dérivable en $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_p)$, et que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i$. Par suite

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i. \tag{1.29}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, ..., a_p + h_p) - f(a_1, ..., a_p) = \\ & \left[f(a_1 + h_1, ..., a_p + h_p) - f(a_1, a_2 + h_2, ..., a_p + h_p) \right] + \\ & -[f(a_1, a_2 + h_2, ..., a_p + h_p) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, ..., a_p + h_p)] + \\ & . \\ & . \\ & . \\ & +[f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p + h_p) - f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p)]. \end{aligned}$$

On aplique le théorème des accroissements finies a chaque différence ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2, ..., a_p+h_p)+ \\ & ...+h_p\frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p+\theta_p h_p), \end{aligned}$$

avec $0 \leq \theta_i \leq 1$, pour tout $1 \leq i \leq p$.
Puisque chaque dérivée partielle ci-dessus étant continue en a, on a alors :

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= h_1[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_p)+\varepsilon_1(h)]+ \\ & ...+h_p[\frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1, a_2, ..., a_p)+\varepsilon_p(h)], \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{h\to o_p}\varepsilon_i(h)=0\ \forall i=1, ..., p$.
Si $h \neq 0_p$, soit $\|h\| = \sup\limits_{1\leq i\leq p}\{|h_i|\} = \left|h_{i_0}\right|$, alors

$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{p} h_i\varepsilon_i(h)\right|}{\|h\|} = \left|\sum_{i=1}^{p}\frac{h_i}{h_{i_0}}\varepsilon_i(h)\right| \leq \sum_{i=1}^{p}|\varepsilon_i(h)|. \tag{1.30}$$

Par suite

$$\lim_{h\to 0_p}\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\sum\limits_{i=1}^{p} h_i\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(a)\right|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{p} h_i\varepsilon_i(h)\right|}{\|h\|} = 0. \tag{1.31}$$

Ce qui assure la différentiabilité de f en a, et de plus,$\forall h \in \mathbb{R}^p, df_a(h) = \sum\limits_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$.

□

Théorème 1.2.7. *Si p et q sont quelconque. On a alors f est différentiable en a si et seulement si les q fonctions coordonnées de f le sont, de plus :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, df_a(h) = (d(f_1)_a(h), ..., d(f_q)_a(h)). \tag{1.32}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que f différentiable en a. Alors :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon(h). \tag{1.33}$$

Ce qui implique

$$f_i(a+h) = f_i(a) + \varphi_i(h) + \|h\|\,\varepsilon_i(h), \tag{1.34}$$

où φ_i étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$, et $\lim\limits_{h\to 0_p} \varepsilon_i(h) = 0$.
Ceci prouve que chaque fonction coordonnée f_i est différentiable en a, et que :

$$(df_i)_a(h) = \varphi_i(h) = (df_a)_i(h). \tag{1.35}$$

$\Longleftarrow$) Supposons que chaque fonction coordonnée f_i est différentiable en a, alors si l'application linéaire est définie par :

$$l(h) = (df_1)_a(h), ..., (df_q)_a h), \tag{1.36}$$

on vérifie facilement que cette application convient comme différentielle de f en a. □

1.3 Dérivation selon un vecteur

Définition 1.3.1. *Soient f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et $v \in \mathbb{R}^p$ un vecteur non nul. On dit que l'application f est dérrivable en $a \in U$ selon le vecteur v si*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \text{ existe.} \tag{1.37}$$

Cette limite est notée $d_v f_a$.

Remarque 1.4. 1. *L'existence de la dérivée directionnelle ne dépend pas du vecteur mais uniquement de sa direction. En effet, si f est dérivable en a selon un vecteur $v \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ alors f est aussi dérivable en a selon tous vecteur de la forme λv, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ puisque*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\lambda v) - f(a)}{t} = \lambda \lim_{s\to 0} \frac{f(a+sv) - f(a)}{s}, \tag{1.38}$$

et alors

$$\lambda \in \mathbb{R}^* \;\; d_{\lambda v} f_a = \lambda d_v f_a. \tag{1.39}$$

2. *Lorsque $n = 1$, on a seulement deux directions correspondant aux valeurs $v = 1$ et $v = -1$. Dans ce cas, une application f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est dérivable en $a \in I$ selon $v = 1$ si*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \text{ existe,} \tag{1.40}$$

et elle est dérivable en $a \in I$ selon $v = -1$, si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a-t) - f(a)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \text{ existe.} \tag{1.41}$$

Autrement dit, dans le cas où $n = 1$, il y a équivalence entre dérivable et dérivable selon un vecteur.

Théorème 1.3.1. *Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Si f est différentiable en $a \in U$ alors elle admet en a une dérivée selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p - \left\{0_p\right\}$ et on a $d_v f_a = df_a(v)$.*

Démonstration. Puisque f est différentiable en a, on a alors

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon(h), \text{ avec} \lim_{h\to 0_p} \varepsilon(h) = 0. \tag{1.42}$$

Posons $h = tv$ où t est un réel appartenant à un voisinage de o.
L'expression (1.42) devient

$$f(a+tv) = f(a) + t df_a(v) + |t| \;\; \|v\|\,\varepsilon_1(t), \tag{1.43}$$

avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(tv) = 0$.

Lorsque $t \neq 0$, elle se réécrit sous la forme

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df_a(v) + \frac{|t|}{t} \|v\|\,\varepsilon_1(t) \tag{1.44}$$

On passe à la limite quand t tend vers 0, on trouve le résultat. □

Remarque 1.5. *Attention, le théorème(1.3.1) n'admet pas de réciproque : une application peut admettre des dérivées selon tous les vecteurs sans pour autant être différentiable.*

Exemple 1.3.1. *Considérons l'application*

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y} & si\ y \neq -x^2 \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

Cette application n'étant pas continue en $(0,0)$, *car par exemple* $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x^3 - x^2) = -1 \neq 0$.

Ce qui implique que f *n'étant pas différentiable en* $(0,0)$.

Par contre, elle admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ *selon tous les vecteurs .*

En effet soit $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_*$, *on a alors*

$$\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \frac{f((t\alpha, t\beta))}{t} = \frac{\alpha\beta}{t\alpha^2 + \beta} \tag{1.45}$$

Cette quantité admet toujours une limite quand t *tend vers* 0 *qui vaut* 0 *si* $\beta = 0$ *et* α *si non.*

1.4 Matrice Jacobienne

Définition 1.4.1. *Soit* f *une application différentiable en* $a \in U$. *On appelle matrice Jacobienne de* f *en* a *la matrice, noté* $J_f(a)$ *définie par*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_q}(a) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

On a donc , pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_p \end{pmatrix}$, $df_a(h) = J_f(a).h$.

Lorsque $p = q$, *on appelle Jacobien de* f *en* a *le déterminant de la matrice jacobienne de* f *en* a : $\mathcal{J}_f(a) = \det(J_f(a))$.

1.5 Composée d'applications différentiables

Théorème 1.5.1. *Soient $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : V \to \mathbb{R}^s$ (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^q$) tels que $f(U) \subset V$.*

1. *Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a, et on a*

$$d(g \circ f)_a = d(g)_{f(a)} \times df_a, \tag{1.47}$$

ou encore

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a). \tag{1.48}$$

2. *Si f est différentiable sur U et g sur V, alors $g \circ f$ est différentiable sur U.*
3. *Si f est de classe C^1 sur U et g est de classe C^1 sur V, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U.*

Démonstration. 1. Supposons que f est différentiable en a. Par définition :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h), \text{ avec } \varepsilon_1(h) \underset{h\to o_p}{\longrightarrow} o_q. \tag{1.49}$$

De même g est différentiable en $b = f(a)$,

$$g(b+k) = g(b) + dg_b(k) + \|k\|\,\varepsilon_2(k), \text{ avec } \varepsilon_2(k) \underset{k\to o_q}{\longrightarrow} o_s. \tag{1.50}$$

$g \circ f$ est différentiable en $a \iff \exists?$ une application linéaire L, telle que :

$$(g\circ f)(a+h) = (g\circ f)(a) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h\to o_p}{\longrightarrow} o_s. \tag{1.51}$$

Nous avons :

$$(g\circ f)(a+b) = g[f(a+b)] = g[b + f(a+b) - b] = g[b + k(h))], \tag{1.52}$$

telle que : $k(h) = f(a+h) - f(a)$. Alors

$$(g\circ f)(a+h) = g(b+k(h))) = g(b) + dg_b(k(h)) + \|k(h)\|\,\varepsilon_2(k(h)). \tag{1.53}$$

Il est claire que : $\lim\limits_{h\to o_p} k(h) = \lim\limits_{h\to o_p} f(a+h) - f(a) = o_q$. Alors $\lim\limits_{k(h)\to o_q} \varepsilon_2(k(h)) = o_s$. Par suite

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g(b) + dg_b df_a(h) + \|h\|\, dg_b(\varepsilon_1(h)) + \|k(h)\|\, \varepsilon_2(k(h)),\ (\text{car } dg_b \text{ est linéaire}).\\ &= g(b) + dg_b(df_a(h)) + \|h\|\, \varepsilon(h),\end{aligned}$$

telle que :

$$\varepsilon(h) = dg_b(\varepsilon_1(h)) + \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\varepsilon_2(k(h)), \forall h \neq o_p. \tag{1.54}$$

Il reste à prover que $\lim\limits_{h\to o_p} \varepsilon(h) = o_s$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\lim_{h\to op} dg_b(\varepsilon_1(h)) &= d_{gb}(\lim_{h\to o_p}\varepsilon(h)) \quad (\text{car } dg_b \text{ continue})\\ &= d_{gb}(o_q) = o_s \quad (\text{car } dg_b \text{ linèaire}).\end{aligned} \tag{1.55}$$

D'autre part :

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} = \frac{\left\|df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right\|}{\|h\|} \leq \frac{\left\|df_a(h)\right\|}{\|h\|} + \|\varepsilon_1(h)\|\,. \tag{1.56}$$

On choisit la norme $\|h\|_\infty = \sup\limits_{i=\overline{1,q}} |h_i|$ et

$$\left\|df_a(h)\right\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq q}\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(a)h_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(a)h_j\right|.$$

Par conséquent

$$0 \leq \left|\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\varepsilon_2(k(h))\right| \leq \left[\sum_{j=1}^{p}\left|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}\right|(a) + \|\varepsilon_1(h)\|\right]|\varepsilon_2(k(h))| \ \to 0 \text{ quand } h \to 0_p \tag{1.57}$$

Alors $g\circ f$ est diffèrentiable en a, et de plus :

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \times df_a. \tag{1.58}$$

Soit $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_p \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(a)h &= d(g\circ f)_a(h) = \left(d(g)_{f(a)} \times d(f)_a\right)(h) \\ &= J_g(f(a)) \times J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.

2. Les paragraphes (2) et (3) sont alors évidents.

□

Cas particulier

1) $p = q = s = 1$. Alors, on a :

$$(g\circ f)' \ (a)h = g'(f(a))f'(a)h, \forall h \in \mathbb{R}^* \tag{1.59}$$

C'est-à-dire :

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \tag{1.60}$$

2) Si $p = s = 1$ et q quelconque. C'est-à-dire :

$f : u \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $g : v \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ et $g(f(x)) = g(f_1(x), \dots, f_q(x))$.

$J_f(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_q'(a) \end{pmatrix}$ " matrice vecteur".

$J_g(f(a)) = (\frac{\partial g}{\partial f_1}(f(a)) \dots\dots \frac{\partial g}{\partial f_q}(f(a)))$ "matrice ligne". Alors

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial f_i}(f(a)) \times f_i'(a). \tag{1.61}$$

Exemple 1.5.1. *Soient* $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & f(x) = (\cos x, \sin x, \tan x) \end{array}$

et

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & g(x,y,z) = x^2 + y + z^3 \end{array}$$

On va essayer de trouver $J_{g\circ f}(0)$*. Il est claire que* f *et* g *sont différentiable. De plus*

$$J_f(0) = \begin{pmatrix} f_1'(0) \\ f_2'(0) \\ f_3'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.62}$$

et

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 3z^2 \end{pmatrix}. \tag{1.63}$$

Puisque $f(0) = (1,0,0)$*. Alors :* $J_g(f(a)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, et donc*

$$J_{g\circ f}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

3) Si $p = q$ et s quelconque :

$X = (x_{1,\ldots\ldots,x_p}) \overset{f}{\mapsto} f(X) = (f_1(X), \ldots\ldots, f_p(X))$ et $g(f(X)) = (g_1(f(X), \ldots\ldots, g_s(f(X)))$

Nous avons $J_F(a) = J_g(f(a))J_f(a)$. Alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_p}(a) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial F_g}{\partial x_1}(a) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial F_s}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1}(f(a)) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial f_p}(f(a)) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial g_s}{\partial f_1}(f(a)) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial g_s}{\partial f_p}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

D'où

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial f_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, i = \overline{1,s} \text{ et } j = \overline{1,p;} \text{ avac } J_F(a) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right]. \tag{1.64}$$

1.6 Inégalité des accroissements finis

Définition 1.6.1. *Soient a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}^p$. On appelle segment d'extrémités a et b, l'ensemble $[a, b]$ défini par*

$$[a,b] = \left\{X \in \mathbb{R}^P;\ \exists t \in [0,1]\quad X = a + t(b-a)\right\}. \tag{1.65}$$

Définition 1.6.2. *Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^p$ est dit convexe, si et seulement si*

$$\forall (a,b) \in E^2,\ [a,b] \subset E. \tag{1.66}$$

Théorème 1.6.1. *Soit f fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^P$ à valeurs réelles. Alors pour tous vecteurs a, b de U tels que $[a, b] \subset U$, il existe $c \in]a, b[$ vèrifiant*

$$f(b) = f(a) + df_c(b-a). \tag{1.67}$$

Ou encore posant $b = a + h$, il existe $\theta \in]0, 1[$ vèrifiant

$$f(a+h) = f(a) + df_{a+\theta h}(h). \tag{1.68}$$

Remarque 1.6. *Compte tenu de l'expression $df_c(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)h_i$, les deux formules prècèdentes peuvent s'écrire*

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i), \tag{1.69}$$

ou bien

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)h_i. \tag{1.70}$$

Démonstration. (**Preuve de théoréme (1.6.1)) :**
Soit $t \mapsto F(t)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $F(t) = f(g(t)$, où $g(t) = a+t(b-a)$. Il est claire que g est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Par suite F classe C^1 sur $[0, 1]$.
D'après le thèorème de composition

$$F'(t) = (f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(b-a))(b_i - a_i). \tag{1.71}$$

De plus, F est de classe C^1sur $[0,1]$. Donc on peut appliquer le thèorème des accroissements finis établi pour les fonction numèrique d'un variable rèelle, $\exists\theta \in]0,1[$ telle que :

$$F(1) = F(0) + F'(\theta), \tag{1.72}$$

soit $\exists c \in]a,b[$, telle que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i). \tag{1.73}$$

□

Remarque 1.7. *Attention, cette égalité des accroissements finis n'est valable que si l'espace d'arrivée est de dimension* 1.
En effet si on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. *On a*

$$f(2\pi) - f(0) = (0,0,2\pi) \text{ et } f^{'}(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \tag{1.74}$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(2\pi) - f(0) \neq 2\pi f^{'}(t). \tag{1.75}$$

Théorème 1.6.2. *(Inègalitè des accroissements finis)*
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *un fonction de classe* C^1*sur* U *(*U *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^p$*).*
On suppose qu'il existe une constante $M \geq 0$ *tq* $\left\|Df(a)\right\| \leq M$ *pour tout* $x \in U$*.*
Alors :

$$\left\|f(x) - f(y)\right\| \leq M\left\|x - y\right\|. \tag{1.76}$$

Démonstration. Soit $x, y \in U$, alors $x + t(y - x) \subset U, \forall t \in [0,1]$ (car U est convexe) et soit

$$\begin{array}{rccc} F: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^q \\ & t & \mapsto & F(t) = x + t(y-x). \end{array}$$

F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Alors $\exists c \in]0,1[$, telle que : $F(1) - F(0) = F'(c)$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left\|f(x) - f(y)\right\| &= ||F(1) - F(0) = F'(c)|| \\ &= \left\|(y-x)d_f\left[x + c(y-x)\right]\right\| \leq M\left\|y - x\right\| \end{aligned} \tag{1.77}$$

□

1.7 Formule de Taylor

1.7.1 Dérivées successives de la fonction $t \mapsto F(t) = f(a + t(b - a))$

Définition 1.7.1. *On dira que la fonction F est de classe C^n, lorsque toutes les dérivées de F jusqu'à l'ordre n existent et sont continues sur l'ensemble où l'on travail.*

Définition 1.7.2. *Soit maintenant $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^n sur U (U un ouvert de $\mathbb{R}^p$). Alors F définie par $F(t) = f(a + t(b - a))$ est elle aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$.*

Nous avons

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a))(b_i - a_i). \tag{1.78}$$

On pose $h = (h_1, h_2, ..., h_p) = b - a$. Alors $F'(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)h_i$.
Par suite

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + th)h_i h_j. \tag{1.79}$$

On rappel que

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_i \right)^2 = \sum_{j=1}^{p} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p}^{p} a_i a_j. \tag{1.80}$$

Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x j}$ (car f est de classe C^2 sur U), on a alors

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + th)h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + th)h_i h_j. \tag{1.81}$$

Par récurrence, on peut démontrer que

$$F^n(t) = \;=\; \sum_{i_r=1}^{p} ... \sum_{i_1=1}^{p} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} ... \partial x_{i_1}}(a + th)h_{i_1} ... k_{i_r}, \text{pour tout } h_{i_j} \in U, j = \overline{1, r}. \tag{1.82}$$

1.7.2 Différentielles d'ordre supérieur

Différentielle de l'ordre 02

Définition 1.7.3. *On va commencer par voir la différentielle seconde comme une application bi-linéaire.*

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application : $U \to \mathbb{R}$, et $a \in U$. On suppose que les dérivées partielles d'ordre deux de f en a existent. On appelle diférentielle seconde de f au point a, et on note $d^2 f_a$ la forme bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^p)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & d_h(d_k f_a). \end{array}$$

En termes de coordonnées

$$d^2 f_a(h,k) = d_h(d_k f_a) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i k_j, \tag{1.83}$$

où d_h est la dérivée directionnelle dans la direction h.

Définition 1.7.4. *(Forme quadratique et Hessienne de f)*

Dans l'expression (1.81), l'application

$$q_a = F''(0) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i h_j. \tag{1.84}$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$.

La matrice symétrique qui représente $d^2 f_a$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, est appelée matrice hessienne de f au point a et est notée $H_f(a)$

Les coefficients de la matrice $H_f(a)$ sont les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pour tout $1 \le i, j \le p$,

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & . \; . \; . & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ . & . \; . \; . & . \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x 1}(a) & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}, \tag{1.85}$$

et pour tout $1 \le i, j \le p$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Différentielle de l'ordre ≥2

Définition 1.7.5. *Soit f une application : $U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^{r-1}. Par récurrence, on peut définir la différentielle d'ordre r en un point $a \in U$, l' application r-linéaire continue $d^r f_a$ par*

$$\begin{aligned} d^r f_a(h_1, h_2, ..., h_r) &= d_{h_1}(...d_{h_r} f_a) \\ &= \sum_{i_r=1}^{p} ... \sum_{i_1=1}^{p} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} ... \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} ... k_{i_r}, \text{pour tout } h_{i_j} \in U, j = \overline{1,r} \end{aligned} \tag{1.86}$$

Définition 1.7.6. *Soit f une application : $U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ r fois différentiable en $a \in U$. L'application$\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ définie par*

$$\varphi(h) = d^r f_a(h, h, ..., h), \tag{1.87}$$

est appelée la puissance symbolique de l'ordre r de la différentielle de f en a.

Notation 1.7.1. *On notera*

$$d^r f_a(h, h, ..., h) = d^r f_a h^r \tag{1.88}$$

1.7.3 Formule de Taylor

Théorème 1.7.1. *Soit f une application : $U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ r fois différentiable en $a \in U$, alors elle admet un développement de Taylor-Young à l'ordre r au point a ; c-à-d : qu' il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, avec $\lim \varepsilon(h) = 0$,telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} d^k f_a h^k + \|h\|^r \varepsilon(h) \tag{1.89}$$

Remarque 1.8. *(Formule de Taylor de l'ordre 02) Soit f une application de classe C^2 sur un convexe U de $\mathbb{R}^p$ a valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $a, b \in U$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tq :*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i). + \\ &\quad \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(c)(b_i - a_i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)(b_i - a_i)(b_j - a_j)\right] \end{aligned} \tag{1.90}$$

Remarque 1.9. *(Ecriture en dimension $p = 2$)*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} (x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+ \\ +\theta(y-y_0)) + 2(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)), \end{array}\right]$$

où $\theta \in]0,1[$.

Développement limité à l'ordre deux

Puisque les dérivées partielles sont continues, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a+\theta(b-a)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a) + n_{i,j}(b-a), \tag{1.91}$$

où $n_{i,j}(b-a) \to 0$ quand $b \to a$. Et comme

$$2\left|(b_i-a_i)(b_j-a_j)\right| \leq |(b_i-a_i)|^2 + \left|(b_j-a_j)\right|^2 \leq \|b-a\|^2, \tag{1.92}$$

nous pouvons finalement affirmer qu'il existe une fonction $(b-a) \mapsto \epsilon(b-a)$ définie au voisinage de 0, telle que

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i-a_i). + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)(b_i-a_i)^2 \quad + \\ +2\sum_{1\leq i<j\leq p}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(b_i-a_i)(b_j-a_j) \end{array}\right] + \|b-a\|^2\epsilon(b-a),$$

avec $\epsilon(b-a) \to 0$, quand $b \to a$.

Exemple 1.7.1. $(x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(x)\exp y$, $(x_0,y_0) = (0,0)$

<u>Première méthode</u> : Il est claire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$, alors

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = 1 + y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + (x^2+y^2)\epsilon(x,y), \tag{1.93}$$

avec $\epsilon(x, y) \to 0$ *quand* $(x, y) \to (0, o)$.

Deuxième méthode :

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y)\right). \tag{1.94}$$

On fait le produit, et en conservant uniquement les termes en x, y, xy, x^2, y^2 *et en englobant tout le reste de la forme* $(x^2 + y^2)\epsilon(x, y)$, *on obtient le même résultat.*

Autre formule de Taylor à un ordre quelconque d'une fonction de deux variables

Notation symbolique trés pratique

$$\text{On note par } \left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_n^k\, x^k\, y^{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}.$$

Dérivée d'ordre n de la fonction $t \to F(t) = f\,(x_0 + th_1, y_0 + th_2)$

Il est facile de voir par récurrence que si f est de classe C^n ,alors F est aussi de classe C^n et que sa dérivée d'ordre n est donnée par :

$$F^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h_1^k\, h_2^{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}(x_0 + th_1, y_0 + th_2). \tag{1.95}$$

Formule de Taylor à l'ordre n :

Soit f une fonction de classe C^n, alors on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction $t \in [0,1] \mapsto F(t)$ entre 0 et 1,on obtient :

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{F^{(k)}(0)}{(k)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}, \text{ où } \theta\epsilon\,]0,1[\,. \tag{1.96}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} f\,(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \quad &= \quad f\,(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left[h_1\frac{\partial f}{\partial x} + h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(k)}(x_0, y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left[h_1\frac{\partial f}{\partial x} + h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(n)}(x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta h_2). \end{aligned}$$

Dévloppement limité à lordre n :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(k)}(x_0-y_0)+ \\ &+\|(x-x_0),(y-y_0)\|^{n}\varepsilon\left[(x-x_0),(y-y_0)\right], \end{aligned}$$

avec $\varepsilon\left[(x-x_0),(y-y_0)\right]\longrightarrow 0$, quand (x,y) tend vers (x_0,y_0).

1.8 Difféomorphisme

Définition 1.8.1. *Si f est une bijection de classe C^1d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$, et si la bijection réciproque f^{-1}est aussi de classe C^1, on dit que f est un difféomorphisme de U sur V.*

Remarque 1.10. *Romarquons que V est nécéssairement un ouvert.*
En effet, c'est l'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue f^{-1}. Il résulte du théorème de composition que la matrice jacobienne de f est inversible en tout poit a de U et que le jacobien de f^{-1} au point $f(a)\epsilon V$ est le jacobien de la matrice inverse :

$$J_{f^{-1}}(f(a))=\left[J_f(a)\right]^{-1}. \tag{1.97}$$

Exemple 1.8.1. *$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, telle que $f(x,y)=(x+y,x-y)$.*
Donc $f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, telle que : $f^{-1}(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+y,x-y)$.
Il est claire que f et f^{-1}sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par suite f est un difféomorphisme de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.11. *Si f est une bijection de classe C^k et si f^{-1} est aussi de classe C^k, on dit que f est un difféomorphisme de classe C^k $(k\geq 1)$.*

Théorème 1.8.1. *(**Théoreme d'inversion locale**) Soit f une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point $a\in\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et soit $b=f(a)$.*
Si $d_f(x)$ est inversible, alors il existe un voisinage A de a et un voisinage B de b tels que f soit un difféomorphisme local de A sur B.

Théorème 1.8.2. *(**Théorème d'inversion globale**) Soit f de classe C^1sur $U \subset \mathbb{R}^p$(U ouvert), injective et telle que la différentielle $d_f\ (x)$ soit inversible pour tout $x \in U$; alors f est un difféomorphisme de l'ouvert U sur l'ouvert $f(U)$.*

Démonstration. $d_f\ (x)$ est inversible $\Longleftrightarrow$ $\det J_f\ (x) \neq 0$ et comme f est injective, donc f est bijective de U sur $f\ (U)$.
Par suite, f est un difféomorphisme, et de plus $f\ (U)$ est un ouvert. □

1.9 Equations aux dérivées partielles (EDP)

Le caractère particulier d'une ´equation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables.

Définition 1.9.1. *Une **EDP** est alors une relation liant une fonction de plusieurs variables et ses dérivies partielles par rapport aux différentes variables.*

Exemple 1.9.1. *Voici quelques exemples d'équations :*
1. $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x}\ f\ (t,x) = 0$ *: Equation de transport.*
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) = 0$ *: Equation de la place.*
3. $\frac{\partial}{\partial t}f\ (t,x) = k\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ f\ (t,\ x)$ *: Equation de la chaleur·*

1.10 Changement de variable et EDP

Dan cette partie, on cherche toutes les fonctions de classe C^k sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^P$, qui vérifient une *EDP* . Pour cela, on utilise le difféomorphisme
$\phi : (u_1, u_2, ..., u_p) \mapsto \phi(u_1, ..., u_p)$.
f est de classe C^k sur $U \Longrightarrow$ il existe une unique fonction g de classe C^k sur U , telle que : $f = g \circ \phi$

Exemple 1.10.1. *En utilisant le changement de variable $u = xy$, $v = y, \forall x, y \in U$, tel que :*

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\right\}, \tag{1.98}$$

trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur U vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = y. \tag{1.99}$$

Solution : *Soit $\phi : U \to \phi(U)$ tq $\phi(x,y) = (xy, y) = (u,v)$.*

01) Montrons que $\phi : U \to \phi(U)$ est un difféomorphisme de classe C^1 sur U.
Il est claire que U est un ouvert. De plus

$$\phi(U) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u = xy \in]0,1[\text{ et } v = y \in]0,1[\right\} = U$$

Donc $\phi(U)$ est ouvert aussi.
ϕ est de classe C^1surU (évident).
ϕ injective ?.
Soient $x, y \in U$, tels que $\phi(x,y) = \phi(x',y')$. Donc$\left\{\begin{array}{c} xy = x'y' \Longrightarrow x = x' \\ \text{et } y = y' \end{array}\right.$

$J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det J_\phi = y > 0.$
Par suite ϕ est un difféomorphisme de classe C^1 sur U.
Résoudre maintenant l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = y. \tag{1.100}$$

f est de classe C^1 sur $U \Longrightarrow$ il existe une unique fonction g de classe C^1 sur U , telle que : $f = g \circ \phi$.
La méthode du produit des Jacobiens, nous conduit à :

$$J_f(x,y) = J_g(\phi(x,y).J\phi(x,y)) = J_g(u,v).J\phi(x,y). \tag{1.101}$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}. \end{array}\right.$$

Léquation (1.100) *se ramène à*

$$xy\frac{\partial g}{\partial u} - y(x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}) = y.$$

Par suite

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -1 \Longrightarrow g(u,v) = -v + h(u),$$

où h est une fonction d'une seule variable de classe C^1 sur $]0,1[$. On a finalement :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g\left[\phi(x,y)\right] \\ &= g(u,v) \\ &= -v + h(u) = -y + h(xy). \end{aligned}$$

Exemple 1.10.2. *(Cas des coordonnées polaires) :*

Soit $\phi :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ telle que $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On pose $F = f\circ\phi$, pour tout f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

1. *Exprimer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.*

2. *Trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, telle que :*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1.102}$$

3. *Trouver tout les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ telle que :*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = kf,\ (k = cst). \tag{1.103}$$

4. *Trouver tout les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_* \times \mathbb{R}$ telle que :*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1.104}$$

Solution *: Il est claire que ϕ est un difféomorphisme de classe $C^{+\infty}$sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.*

1. *Nous avons*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.105}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \tag{1.106}$$

2. *Du système (1.106), on en déduit*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{1.107}$$

Alors

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0. \tag{1.108}$$

Par suite $F(r,\theta) = h(r)$, *où* h *est de classe* C^1 *sur* $]0, +\infty[$. *Enfin*

$$f(x,y) = F\left[\phi^{-1}(x,y)\right] = F(r,\theta) = h(r) = h(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{1.109}$$

3. *Nous avons*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = kf \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta} = -kF. \tag{1.110}$$

Sachant que les solutions de l'équation différentielle $y\prime(x) = -ky(x)$ *sont de la forme :*

$$y(x) = c\exp(-kx), \tag{1.111}$$

alors : $F(r,\theta) = c(r)\exp(-k\theta\,)$, *ou* $c(r)$ *est une fonction de classe* C^1*sur* $]0, +\infty[$.
Et puisque $\theta = \arctan(\dfrac{y}{x})$, *on aura donc*

$$f\,(x,y) = c(\sqrt{x^2+y^2})\exp\left(-k\arctan(\frac{y}{x})\right). \tag{1.112}$$

4. *On a aussi*

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \\ &\Leftrightarrow F = h(\theta), \end{aligned}$$

où h *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *Par suite*

$$f(x,y) = h\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \tag{1.113}$$

Exemple 1.10.3. *(Equation des ondes)*
Résoudre L'EDP :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \tag{1.114}$$

(où c *est une constante réelle positive non nulle, et* f *est une fonction de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*) à laide du changement de variable* $u = x + cy$, $v = x - cy$.

Solution : *Soit* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 tq\ \phi\,(x,y) = (u = x + cy, v = x - cy)$.
On pose $f = g \circ \phi$. *La formule des dirivées partielles nous donne :*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}, \tag{1.115}$$

soit

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = c\frac{\partial g}{\partial u} - c\frac{\partial g}{\partial v}. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \end{aligned} \tag{1.116}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(c\frac{\partial}{\partial u} - c\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(c\frac{\partial g}{\partial u} - c\frac{\partial g}{\partial v}\right) = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \tag{1.117}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} C_2^k 1^k.1^{2-k}\frac{\partial^2 g}{\partial u^k\,\partial v^{2-k}} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(c\frac{\partial g}{\partial u} - c\frac{\partial g}{\partial v}\right)^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} C_2^K C^k(-C)^{2-K}\frac{\partial^2 g}{\partial u^K \partial v^{2-K}} = C^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

L'expression (1.114) devient alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0 \Leftrightarrow g(u,v) = h(u) + k(v), \tag{1.118}$$

où h est k sont deux fonctions de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
Enfin :

$$f(x,y) = g(\phi(x,y)) = g(u,v) = h(u) + k(v) = h(x+cy) + k(x-cy). \tag{1.119}$$

Exemple 1.10.4. *Soit* $g : U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ tq\ y > |x|\right\} \to \mathbb{R}$ *et* $\varphi : U \to \varphi(U)$ *avec* $\varphi(x,y) = (u = x - y, v = x + y)$. *On suppose g de classe* C^2. *Soit* $f = g \circ \varphi$.

1. Montrer que φ détermine un C^2-difféomorphisme entre U et un ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

2. Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celle de g.

3. Montrer que si f est solution de l'E.D.P

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = \sqrt{(y^2 - x^2)}, \tag{1.120}$$

alors g est solution de $4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x,y) - \sqrt{-uv} = 0$

4. En déduire la solution générale de (1.114).

Solution : 1. *φ est injective et est de classe $C^{+\infty}$. De plus $u = x - y$ et $v = x + y \Rightarrow \det j_\varphi(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. i.e j_φ est inversible.*

D'aprés le théorème d'inversion globale, φ est un $C^{+\infty}$ difféomorphisme entre U et $\varphi(U)$.

Calculons $\varphi(U)$:

** Si $x > 0$, donc $y - x > 0 \Leftrightarrow u = x - y < 0$ et $y > x > 0 \Leftrightarrow v = x + y > 0$*

** Si $x < 0$, donc $v = x + y > 0$ et $u = x - y < 0$.*

Alors $\varphi(U) =]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$

2. Nous avons $f = g \circ \varphi$. On trouve

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.121}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases} \tag{1.122}$$

3. D'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v) + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \dfrac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v) \\ \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = \left(-\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v) - 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \dfrac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v). \end{cases}$$

Alors l'équation $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = \sqrt{(y^2-x^2)}$ *devient :*

$$4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \sqrt{-u}\,\sqrt{v}. \tag{1.123}$$

ce qui implique

$$g(u,v) = -\frac{1}{9}(-uv)^{\frac{3}{2}} + F(u) + H(v)), \tag{1.124}$$

où F, H sont de classe C^2 *respectivement sur* $\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*$.

Par suite

$$f(x,y) = g(u,v) = -\frac{1}{9}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + F(x-y) + H(x+y). \tag{1.125}$$

1.11 Extrema locaux (relatifs)

1.11.1 Extrema libres

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$) et soit $a \in U$.

Définition 1.11.1. *On dit que f prèsente un maximum local en $a \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(a,r) \subset U$ telle que $\forall x \in B$ on a $f(x) \leq f(a)$.*

Définition 1.11.2. *On dit que f prèsente un minimum local en $a \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(a,r) \subset U$ telle que $\forall x \in B$ on a $f(x) \geq f(a)$.*

Définition 1.11.3. *On dit que f prèsente un extremum local en $a \in U$, si $f(a)$ est un maximum ou minimum relatif (local).*

Points critiques (Stationnaires)

Définition 1.11.4. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (U ètant un ouvert de $\mathbb{R}^p$) une application de classe C^1sur U.*

On dit qu' un point $a \in U$ et un point critique pour f lorsque la diffèrentielle de f au point a est nulle. C'est-à- dire que chacune des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)$ est nulle .

Définition 1.11.5. *On appelle gradient de f au point a le vecteur $\nabla f(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont les dèrivèes partielles de f au point a*
C'est-à- dire

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right). \tag{1.126}$$

Définition 1.11.6. *Le point a est un point critique pour f, si et seulement si $\nabla f(a) = o_{\mathbb{R}^p}$*

Exemple 1.11.1. *On considère la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*
f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 - y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y \text{ et } y^2 = x.$$

Par suite $x^4 = x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Les point critiques sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exemple 1.11.2. $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 + y^3 + 2y\cos(x) + 5y$.
f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2y\sin x. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 2\cos(x) + 5. \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 5 - 2 = 3 > 0$, f n'a pas de point critique .

Condition nécessaire d'extremum local :

Théorème 1.11.1. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (U ouvert de $\mathbb{R}^p$) une fonction de classe C^1 sur U. Si f prèsente un extremum local en un point $a \in U$, alors a est un point critique pour f.*

Démonstration. Supposons que par exemple f prèsente un maximum local en a. Alors

$$\exists r > 0 \text{ telque pour tout } \|x - a\| < r, \text{ on a } f(x) \leq f(a) \tag{1.127}$$

Soit F l'application de variable t dèfinie dans un voisinage de 0 par :

$$F(t) = f(a + th); \forall h \neq 0_p. \tag{1.128}$$

On pose : $x = a + th$. Alors

$$\|x - a\| = \|th\| < r \Rightarrow |t - 0| < \frac{r}{\|h\|} = \alpha > 0, \tag{1.129}$$

et :

$$F(t) = f(x) \leq f(a) = F(0). \tag{1.130}$$

Donc

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que pour tout } |t - 0| < r, \text{ on a } F(t) \leq F(0). \tag{1.131}$$

C'est _à_dire F prèsente un maximum local en 0, et que $F'(0) = 0$.
Or

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th). \tag{1.132}$$

Donc :

$$0 = F'(0) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(h). \tag{1.133}$$

□

Extemum en un point critique

Rappel sur les formes quadratiques

Définition 1.11.7. *On appelle forme quadratiques Q sur $\mathbb{R}^n$ l'expression :*

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \tag{1.134}$$

où $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et les reèls $\lambda_j (j = \overline{1, n})$ sont les valeurs propres de la matrice A de Q sur la base canonique.
** Si $Q(X) > 0$,$\forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,On dit que Q est une forme quadratique dèfinie positive. Cela èquivaut donc à dire que les rèels λ_j sont tous strictement positifs.*
** Si $Q(X) < 0$,$\forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,On dit que Q est une forme quadratique nègative*

Une condition suffisante d'extremum local

Théorème 1.11.2. *Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point critique a.*

1. Si la forme quadratique $H(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(a) u_i u_j$ est dèfinie positive, alors f prèsente un minimum local en a.

2. Si H est dèfinie nègative, alors f prèsente un minimum local en a.

Démonstration. 1. Faisons la dèmonstration dans le cas d'une forme quadratique dèfinie positive. Alors il existe un rèel m strictement positif tel que pour tout vecteur$U = (u_1, ..., u_n)$,on ait

$$H(u) \geq m \|u\|^2,$$

où m désingne la plus petite valeur propre de la matrice A de H.

On pose maintenant $u = x - a$ et en utilisant le développement limite à l'ordre 2, il vient :

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} H(x-a) + \|x-a\|^2 \varepsilon(x-a). \qquad (1.135)$$

Puisque $\varepsilon(x-a) \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow a$, alors

$$\text{pour } \epsilon = \frac{m}{2}, \exists \delta > 0 \text{ telle que } \forall x \in B(a,\delta),\ |\varepsilon(x-a)| < \frac{m}{2} \qquad (1.136)$$

Ce qui implique que $\varepsilon(x-a) > -\frac{m}{2}$. Alors

$$f(x) - f(a) > \frac{1}{2} m \|x-a\|^2 - \frac{m}{2} \|x-a\|^2 = 0. \qquad (1.137)$$

2. La preuve est identique pour un maximum local en a, en choisissant

$$H(u) \leq m \|u\|^2 \text{ et } \varepsilon(x-a) < \varepsilon = \frac{m}{2}. \qquad (1.138)$$

□

Cas de la dimension deux Soit $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction de classe C^2. Les points critiques s'obtient donc en résulvant le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \tag{1.139}$$

La forme quadratique H en un point critique (a,b) est de la forme

$$H(x,y) = (x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b). \tag{1.140}$$

Alors H est un polynôme de second dégré qui garde un signe constant si et seulement si son determinant est strictement négatif.

On pose $A = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ et $C = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b)$. La Hessienne se comporte de la manière suivante :

1. Si $H(x,y) > 0 \Longleftrightarrow B^2 - AC < 0$ et $A > 0$, il s'agit d'un minimum local.
2. Si $H(x,y) < 0 \Longleftrightarrow B^2 - AC < 0$ et $A < 0$, il s'agit d'un maximum local.
3. Si H change de signe $\Longleftrightarrow B^2 - AC > 0$, donc pas d'extremum.
4. Cas douteux $\Longleftrightarrow B^2 - AC = 0$.

Exemple 1.11.3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Les points critiques sont $(0,0)$ *et* $(1,1)$.

* *En* $(0,0)$ *:*

$A = C = 6$ *et* $B = -3$ *et* $B^2 - AC = 9 > 0$. *Donc pas d'extremum et puisque* $A = 0$, *Il sagit d'un point de selle.*

* *En* $(1,1)$ *:*

$A = C = 6$ *et* $B = -3$. *Donc* $B^2 - AC = -27 < 0$ *et* $A > 0$, *Il s'agit d'un maximum local.*

Exemple 1.11.4. *(en dimension trois)*

$f(x,y,z) = 15 - 8x + 8x^2 - 4x^3 + x^4 + 12y + 4y^2 + 12z + 4yz + 4z^2$. *Cette fonction est de classe* C^2*sur* $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 = -8 + 16x - 12x^2 + 4x^3 \Longleftrightarrow x = 1. \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 = 12 + 8y + 4z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = 12 + 8z + 4y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y = z \Longleftrightarrow x = y = -1. \end{cases}.$$

Le seul point critique est donc $(1, -1, -1)$.
Nous avons $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x, y, z) = 12x^2 - 24x + 16$, $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x, y, z) = 8$, $\frac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}(x, y, z) = 8$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 4$.
Alors

$$H(x, y, z) = 4x^2 + 8y^2 + 8(\frac{y+z}{2})^2 + 6z^2 \geq 0. \tag{1.141}$$

Donc $(1, -1, -1)$ *est un maximum local.*

1.11.2 Extrema liés

Théorème 1.11.3. *(Théorème de Lagrange) Soient* $U \subset \mathbb{R}^p$ *un ouvert,* $1 \leq n < p$ *,* $a \in U$ *et* $f, g_1, g_2, ..., g_n : U \to \mathbb{R}$ $n+1$ *fonctions de classe* C^1*, telle que*

$$rang \begin{pmatrix} (\nabla g_1(a) \\ . \\ . \\ . \\ (\nabla g_n(a) \end{pmatrix} = n. \tag{1.142}$$

Alors, pour que restriction de la fonction f *à* $\{x \in U \; tq \; g_1(x) = ... = g_n(x) = 0\}$ *admette un extremum local en a, il faut qu'il existe n scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *tels que*

$$\nabla \left(f + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k \right)(a) = 0. \tag{1.143}$$

Par définition, les n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *sont appelés des multiplicateurs de Lagrange et*

$$L : f + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k : U \to \mathbb{R}, \tag{1.144}$$

est appelée la fonction de Lagrange.

Remarque 1.12. *Puisque la condition est nécessaire mais pas suffisante, l'existence des n scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *ne garantit pas celle de l'extremum local en a.*

Remarque 1.13. *Si* $n = 1$*, alors*

$$rang(\nabla g_1(a) = 1 \Leftrightarrow (\nabla g_1(a) \neq 0.$$

1.12 Théorème des fonctions implicites

Nous allons essayer de regarder à quelle condition une relation de la forme $f(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$ peut se résoudre au moins localement sous la forme $x_p = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$.

On désigne par f une fonction de classe C^n d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant nous permet de déterminer la dérivée de la fonction f même si on ne sait pas l'expliciter.

Théorème 1.12.1. *Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_p)$ un point de U tel que $f(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$. Alors il éxiste localement une unique fonction continue $\varphi : B((a_1, a_2, ..., a_{p-1}), \delta) \to \mathbb{R}$ vérifiant :*
1. $\varphi(a_1, a_2, ..., a_{p-1}) = a_p$.
2. Pour tout $(x_1, x_2, ..., x_{p-1}) \in B$, on a $f(x_1, x_2, ..., x_{p-1}, \varphi(x_1, x_2, ..., x_{p-1})) = 0$.
De plus φ est de classe C^n sur B.

Remarque 1.14. *1. Autour de point (x_0, y_0) , on peut donc résoudre localement l'équation $f(x, y) = 0$ sous la forme $y = \varphi(x)$.*
2. On prendra évidement I et J assez petits pour que le réctangle $I \times J$ reste inclus dans l'ouvert U

Démonstration. (**Preuve du théorème 1.12.1**)
Pour ne pas alourdir les notations, on va supposer que $p = 2$.
a) Existence de la solution $y = \varphi(x)$: Pour les besoins de la preuve, on va supposera que $\frac{\partial f}{\partial f}(x_0, y_0) > 0$, et le cas $\frac{\partial f}{\partial f}(x_0, y_0) < 0$ se traitement de façons analogue.
Alors comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est une fonction continue qu'est non nulle au point (x_0, y_0) , on peut trouver un rectangle $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ sur lequel $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.
Soit $g : [y_0 - k, y_0 + k] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(y) = f(x, y)$, pour tout x fixé dans $[x_0 - h, x_0 + h]$.
Donc $g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0 \Rightarrow g$ est strictement croissante sur$[y_0 - k, y_0 + k]$.
En particulier la fonction $y \to g(y) = f(x_0, y)$ est strictement croissante sur

$[y_0 - k, y_0 + k]$.
Et comme $g(y_0) = f(x_0, y_0) = 0$, on a

$$f(x_0, y_0 - k) = g(y_0 - k) < 0 \text{ et } f(x_0, y_0 + k) = g(y_0 + k) > 0. \qquad (1.145)$$

Par continuité il éxiste donc un petit segment $]x_0 - a, x_0 + a[\subset]x_0 - h, x_0 + h[$, tel que pour tout $x \in]x_0 - a, x_0 + a[$,on ait

$$f(x, y_0 - k) < 0 \text{ et } f(x_0, y_0 + k) > 0. \qquad (1.146)$$

Et comme f est continue, alors, il éxiste un et un seul point $y \in]y_0 - k, y_0 + k[$ tel que :

$$f(x, y) = 0, \forall x \in]x_0 - a, x_0 + a[. \qquad (1.147)$$

Nous avons donc définie une application φ de $I =]x_0 - a, x_0 + a[$ dans $J =]y_0 - k, y_0 + k[$, tel que :$f(x, \varphi(x)) = 0$.
b) Continuité de la fonction φ : Elle résulte de cette construction
Recommençons le même raisonnement en remplaçant k par ε (ε plus petit), mais ε quelconque. Alors pour tout $x \in]x_0 - a, x_0 + a[$, le nombre unique $y = \varphi(x) \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$.
C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < a \Longrightarrow \left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon. \qquad (1.148)$$

Par suite φ est continue.
c) Dérivabilité de la fonction φ. Soient $(x, \varphi(x))$ et $(x + t, \varphi(x + t))$ deux points de U (t assez petit de sorte que $(x + t, \varphi(x + t)) \subset U$).
Le T.A.F nous dit qu'il éxiste un point p de segment $(x, \varphi(x)), (x + t, \varphi(x + t))$, telle que

$$\begin{aligned} 0 &= f((x + t, \varphi(x + t)) - f(x, \varphi(x)) \\ &= ((x + t) - x) \frac{\partial f}{\partial x}(p) + (\varphi(x + t) - \varphi(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ &= t\frac{\partial f}{\partial x}(p) + (\varphi(x + t) - \varphi(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(p). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(p)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p)}.$$

On a donc

$$\varphi'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} \ (\text{car } p \underset{t\to 0}{\to} (x,\varphi(x))).$$

Et comme f est de classe C^1, alors φ' est continue. Autrement dit que φ est de classe C^1 sur U. □

1.12.1 Cas de la dimension $p = 2$

Soit $(a,b) \in U$ ou $b = \varphi(a)$. La fonction φ vérifie la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$. Alors le théorème de dérivation des fonctions composées nous donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,\varphi(a)) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \end{pmatrix} = 0. \tag{1.149}$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,\varphi(a)) + \varphi'(a)\frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a)) = 0. \tag{1.150}$$

Donc

$$\varphi'(a) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,\varphi(a))}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a))}. \tag{1.151}$$

Et si $\varphi'(a) = 0$, alors

$$\varphi''(a) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\varphi(a))}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a))}. \tag{1.152}$$

1.12.2 Cas de la dimension $p = 3$

Soit $(a, b, c) \in U$ ou $c = \varphi(a, b)$. La fonction φ vérifie la relation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. Alors le théorème de dérivation des fonctions composées nous donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

De plus, si (a, b) est un point stationnaire de φ, on a alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x)^2}(a, b) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, \varphi(a, b))}{\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, \varphi(a, b))},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y)^2}(a, b) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, \varphi(a, b))}{\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, \varphi(a, b))}$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x \partial y)}(a, b) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, \varphi(a, b))}{\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, \varphi(a, b))}.$$