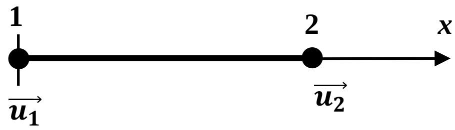
Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF - Mila
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie civil et de l'hydraulique — Année universitaire : 2022/2023

1er Année Mastère Structure — Matière : Méthode des éléments finis

Corrigé du Serie d'exercices 01



Elément de barre à deux nœuds

Fonction de forme :

Pour l'élément à deux nœuds, le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

$$u\,(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Les deux conditions nodales permettent de déterminer les coefficients α_0 et α_1 :

$$u\,(x = 0) = \alpha_0 + \alpha_1 0 = u_1$$

$$u\,(x = L) = \alpha_0 + \alpha_1 L = u_2$$

Ou u_1 et u_2 sont respectivement les deplacements au nœud 1 et 2. La solution donne les deux coefficients :

$$\alpha_0 = u_1 \quad et \quad \alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$u\,(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L}x$$

En regroupant les termes en facteur de valeurs nodales u_1 et u_2 , on obtient :

$$u\,(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \left(\frac{x}{L}\right)u_2 = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

D'où :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

La fonction de forme donc prend la forme : $[N] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]$

Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité égale a :$[K_e] = \int_{V_e} [B]^t\ [C]\ [B]\ dv$

$$[B] = [D].[N] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]$$

$[K_e] = \int_A dA \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} .E. \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = E.A \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{-1}{L^2} \\ \frac{-1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = E.A.\frac{1}{L^1} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx =$

$\frac{E.A}{L^1} \begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de rigidité donc prend la forme : $[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Solution d'exercice N° 01 :

Matrice de rigidité :

$$[K_1] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vecteur des forces :

$$\{F\} = \{F\text{nod}\} + \{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Le système matriciel égal a :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Application des conditions aux limites : $\mathbf{u_1 = 0}$, le système matriciel devienne :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} . u_2 = F \rightarrow u_2 = \frac{FL}{EA}$$

Déterminations des réactions :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ F \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{EA}{L} u_2 = R_{x1} \rightarrow -\frac{EA}{L} . \frac{FL}{EA} = R_{x1} = -F$$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$$R_{x1} + Fx2 = -F + F = 0$$

Solution d'exercice N° 02 :

Matrice de rigidité élémentaire

élément 1(nœud 1-2):	élément 2(nœud 2-3) :	élément 3(nœud 3-4) :
$[K_1] = \frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 \end{bmatrix}$	$[K_2] = \frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 \end{bmatrix}$	$[K_3] = \frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} E_2 & -E_2 \\ -E_2 & E_2 \end{bmatrix}$

Vecteur des forces :

$$\{F\} = \{Fnod\} + \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matrice de rigidité de la poutre (assemblage):

$$[K] = \frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 & 0 & 0 \\ -E_1 & 2E_1 & -E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 & E_1 + E_2 & -E_2 \\ 0 & 0 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix}$$

Application des conditions aux limites : $\mathbf{u_1 = 0}$

Le système matriciel devient :

$$\frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2E_1 & -E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 & E_1 + E_2 & -E_2 \\ 0 & 0 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\frac{A}{L}\ (2E_1u_2 - E_1u_3) = F \rightarrow 2E_1u_2 - E_1u_3 = \frac{F.L}{A} \rightarrow u_3 = 2u_2 - \frac{F.L}{E_1A}$…….(1)

$\frac{A}{L}\ (-E_1u_2 + (E_1{+}E_2)u_3 - E_2u_4) = 0 \rightarrow -E_1u_2 + (E_1{+}E_2)u_3 - E_2u_4 = 0$ ……..(2)

$\frac{A}{L}\ (-E_1u_3 + E_2u_4) = 0 \rightarrow -E_2u_3 + E_2u_4 = 0 \rightarrow u_3 = u_4$ …….(3)

(3) → (2) $\rightarrow -E_1u_2 + (E_1{+}E_2)u_3 - E_2u_4 = 0 \rightarrow -E_1u_2 + (E_1{+}E_2)u_3 - E_2u_3 = 0$

$\rightarrow -E_1u_2 + E_1u_3 + E_2u_3 - E_2u_3 = 0 \rightarrow u_2 = u_3 \rightarrow u_2 = u_3$ ……(4)

(4) → (1) $\rightarrow u_2 = \frac{F.L}{E_1A} = u_3 = u_4 \rightarrow u_2 = u_3 = u_4 = 2.22\ mm$

Déterminations des réactions :

$$\frac{A}{L} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 & 0 & 0 \\ -E_1 & 2E_1 & -E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 & E_1 + E_2 & -E_2 \\ 0 & 0 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Rx1 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\frac{A}{L}\ (-E_1u_2) = Rx1 \rightarrow Rx1 = \frac{A}{L}\ (-E_1\frac{F.L}{E_1A}) \rightarrow Rx1 = -\mathrm{F}$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$R_{x1} + Fx2 + Fx3 + Fx4 = -F + F + 0 + 0 = 0$

Solution d'exercice N° 03 :

Matrices de rigidité élémentaires :

élément 1(nœud 1-2):	élément 2(nœud 2-3) :	élément 3(nœud 3-4) :
$[K_1]=\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$[K_2]=\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$	$[K_3]=\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

Vecteur des forces :

$$\{F\}=\{F_{\text{nod}}\}+\{F\}=\begin{Bmatrix}Rx1\\0\\2PL\\Rx4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}PL\\PL\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Le système matriciel :

$$\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}PL\\PL\\2PL\\0\end{Bmatrix}$$

Application des conditions aux limites : $\mathbf{u_1=u_4=0}$

Le système matriciel devient :

$$\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 0\\ 0 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\2PL\\4PL\\0\end{Bmatrix}\rightarrow\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\u3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}PL\\2PL\end{Bmatrix}$$

$\frac{EA}{L}\ (\frac{5}{2}u_2-2u_3)=PL\rightarrow\ \frac{5}{2}u_2-2u_3=\frac{PL^2}{EA}$ …….(1)

$\frac{EA}{L}\ (-2u_2+5u_3)=2PL\rightarrow -2u_2+5u_3=\frac{2PL^2}{EA}$ …….(2)

$(1)\times\frac{4}{5}\ \rightarrow\ 2u_2-\frac{8}{5}u_3=\frac{4PL^2}{5EA}$ …….(3)

$(2)+(3)\rightarrow 5u_3-\frac{8}{5}u_3=\frac{2PL^2}{EA}+\frac{4PL^2}{5EA}\rightarrow\frac{17}{5}u_3=\frac{14PL^2}{5EA}\rightarrow u_3=\frac{14PL^2}{17EA}$

$(1)\rightarrow\frac{5}{2}u_2-2\frac{14PL^2}{17EA}=\frac{PL^2}{EA}\rightarrow\frac{5}{2}u_2=\frac{PL^2}{EA}+2\frac{14PL^2}{17EA}\rightarrow\frac{5}{2}u_2=\frac{45PL^2}{17EA}\rightarrow u_2=\frac{18PL^2}{17EA}$

Déterminations des réactions :

$$\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Rx1+PL \\ PL \\ 2PL \\ Rx4 \end{Bmatrix}$$

$\frac{EA}{L}\ (-\frac{1}{2}u_2) = Rx1 \rightarrow\ Rx1 + PL = \frac{EA}{L}\ (-\frac{1}{2}\frac{18PL^2}{17EA}) \rightarrow\ Rx1 = -\frac{26PL}{17}$

$\frac{EA}{L}\ (-3u_3) = Rx4 \rightarrow\ Rx4 = \frac{EA}{L}\ (-3\frac{14PL^2}{17EA}) \rightarrow\ Rx1 = -\frac{42PL}{17}$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$$Rx1 + Fx2 + Fx3 + Rx4 + 2PL = -\frac{26PL}{17} + 0 + 2PL - \frac{42PL}{17} = 0$$

Solution d'exercice N° 04 :

Matrices de rigidité élémentaire :

élément 1(nœud 1-2):	élément 2(nœud 2-3) :
$[K_1] = \frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_2] = \frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Vecteur des forces :

$f(x) = ax + b$

$f(x = 0) = 0 = a \times 0 + b \rightarrow b = 0$

$f(x = L) = P = a \times L + 0 \rightarrow a = \frac{P}{L}$

$f(x) = \frac{P}{L}x$

$$\{F_e\} = \int_0^L [N]^t\, f(x)dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \frac{P}{L}x\, dx = \frac{P}{L}\int_0^L \begin{Bmatrix} x - \frac{x^2}{L} \\ \frac{x^2}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \\ \frac{x^3}{3L} \end{bmatrix}_L^0 =$$

$$= \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3L} \\ \frac{L^3}{3L} \end{bmatrix} = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{3} \\ \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{3L^2}{6} - \frac{2L^2}{6} \\ \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} \\ \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} = PL\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \{F\text{nod}\} + \{F\} = \begin{Bmatrix} Rx1 \\ 0 \\ Rx3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{PL}{6} \\ \dfrac{PL}{3} \end{Bmatrix}$$

Le système matriciel :

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{PL}{6} \\ \dfrac{PL}{3} \end{Bmatrix}$$

Application des conditions aux limites : $\mathbf{u_1 = u_3 = 0}$

Le système matriciel devient :

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{PL}{6} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\frac{EA}{L}(\,2u_2) = \frac{PL}{6} \rightarrow \;\; u_2 = \frac{PL^2}{12EA}$

Déterminations des réactions :

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Rx1 \\ \dfrac{PL}{6} \\ Rx3 + \dfrac{PL}{3} \end{Bmatrix}$$

$\frac{EA}{L}(\,-u_2) = Rx1 \rightarrow \;\; Rx1 = \frac{EA}{L}(\,-\frac{PL^2}{12EA}) \rightarrow \;\; Rx1 = -\frac{PL}{12}$

$\frac{EA}{L}(\,-u_2) = Rx3 + \frac{PL}{3} \rightarrow \;\; Rx3 = \frac{EA}{L}(\,-\frac{PL^2}{12EA}) - \frac{PL}{3} \rightarrow \;\; Rx3 = -\frac{PL}{12} - \frac{PL}{3} \rightarrow \;\; Rx3 = \frac{-PL-4PL}{12} \rightarrow$

$Rx3 = \frac{-5PL}{12}$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$$Rx1 + Fx2 + Rx3 + \frac{PL}{2} = -\frac{PL}{12} + 0 - \frac{5PL}{12} + \frac{PL}{2} = 0$$

Solution d'exercice 05 :

$$\{F_e\} = \int_{V_e} [N]^t \{f^v\}\, dV = S \int_{V_e} [N]^t \{f^v\}\, dx = S \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \rho g\, dx = \rho g S L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = w \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Résolution avec 1 seul élément :

Dans ce cas, $L = l$ et $u_1 = 0$ le système d'équilibre s'écrit :

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = w \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Dont la solution est :

$u_2 = \dfrac{wl}{2ES}$

$\mathcal{E}(x) = \left(\dfrac{-1}{l}\right) u_1 + \left(\dfrac{1}{l}\right) u_2 = \dfrac{wl}{2ES}$

$\sigma(x) = \dfrac{w}{2S}$

Résolution avec 2 éléments :

Dans ce cas, $L = l/2$ et $u_1 = 0$, l'assemblage de deux élément conduit au système :

$$\frac{2EA}{l/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = w \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Dont la solution est :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{wl}{8ES} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$x \leq \dfrac{l}{2}$: $\mathcal{E}^1 = \left(\dfrac{-1}{l/2}\right) u_1 + \left(\dfrac{1}{l/2}\right) u_2 = \dfrac{3w}{4ES}$ $\sigma = \dfrac{3w}{4\,S}$

$x \geq \dfrac{l}{2}$: $\mathcal{E}^2 = \left(\dfrac{-1}{l/2}\right) u_2 + \left(\dfrac{1}{l/2}\right) u_3 = \dfrac{w}{4ES}$ $\sigma = \dfrac{w}{4\,S}$

Résolution avec 3 éléments :

Dans ce cas, $L = l/3$ et $u_1 = 0$, le système devient :

$$\frac{ES}{l/3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = w\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

La solution donne :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{wl}{18ES}\begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

$0 \leq x \leq \frac{l}{3}$: $\mathcal{E}^1 = \left(\frac{-1}{l/3}\right)u_1 + \left(\frac{1}{l/3}\right)u_2 = \frac{5w}{6ES}$ $\sigma = \frac{5w}{6\,S}$

$\frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2l}{3}$: $\mathcal{E}^2 = \left(\frac{-1}{l/3}\right)u_2 + \left(\frac{1}{l/3}\right)u_3 = \frac{w}{2ES}$ $\sigma = \frac{w}{2\,S}$

$\frac{2l}{3} \leq x \leq l$: $\mathcal{E}^3 = \left(\frac{-1}{l/3}\right)u_3 + \left(\frac{1}{l/3}\right)u_4 = \frac{w}{6ES}$ $\sigma = \frac{w}{6S}$

Solution d'exercice 06 :

$u\left(-L/2\right) = \alpha_1 - \alpha_2\frac{L}{2} + \alpha_3\frac{L^2}{4} = u_1$ ………………(1)

$u\,(0) = \alpha_1 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0 = \boxed{\alpha_1 = u_2}$

$u\,(+L/2) = \alpha_1 + \alpha_2\frac{L}{2} + \alpha_3\frac{L^2}{4} = u_3$ ………………(2)

(1)+(2) donne : $2\alpha_1 + \alpha_3\frac{L^2}{2} = u_1 + u_3 \Rightarrow 2u_2 + \alpha_3\frac{L^2}{2} = u_1 + u_3 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = \frac{2}{L^2}\,(u_1 + u_3 - 2u_2)}$ … (3)

On remplace (3) dans (1) on trouve :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{(u_2 - u_1)}{L}}$$

On remplace α_1, α_2 et α_3 dans l'approximation du champ de déplacement pour un élément de barre à trois nœuds on trouve :

$u\,(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + a_3 x^2 \Rightarrow u\,(x) = u_2 + \frac{(u_2 - u_1)}{L}x + \frac{2}{L^2}\,(u_1 + u_3 - 2u_2)x^2$

$\Rightarrow u\,(x) = (\frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L}).u_1 + \left(1 + \frac{x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right).u_2 + \left(\frac{2x^2}{L^2}\right).u_3$

$\boxed{N_1(x) = (\frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L})}$ $\boxed{N_2(x) = \left(1 + \frac{x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}$ $\boxed{N_3(x) = \left(\frac{2x^2}{L^2}\right)}$