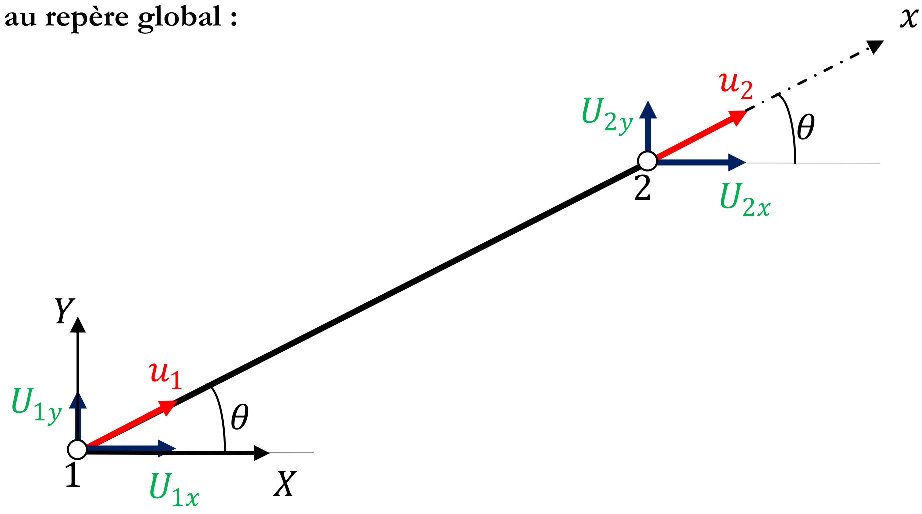
Les barres articulées (les systèmes treillis)

Calcul de la matrice de rigidité d'un élément à deux nœuds incliné d'un angle θ par rapport au repère global :



Nous avons :

- Deux DDL dans le repère local x (u_1, u_2)
- Quatre DDL dans le repère global $(U_{1X}, U_{1Y}, U_{2X}$ et $U_{2Y})$

La projection des vecteurs déplacements du repère local vers le repère global s'écrit :

$$u_1 = U_{1X}.\cos\theta + U_{1Y}.\sin\theta$$

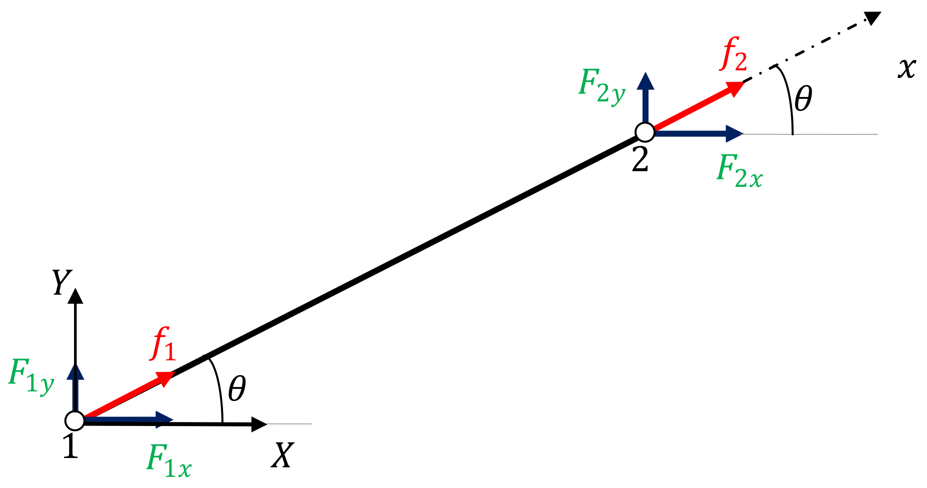
$$u_2 = U_{2X}.\cos\theta + U_{2Y}.\sin\theta$$

$$sin\theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \quad et \quad cos\theta = \frac{X_2 - X_1}{L}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix} \rightarrow \{u\} = [T_e].\{U\}$$

De la même manière, on peut écrire le vecteur force:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{Bmatrix} \rightarrow \{f\} = [T_e].\{F\}$$



Le système d'équilibre de la méthode déplacement s'écrit:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

$[k].\{u\} = \{f\} \rightarrow [k].[T_e].\{U\}=[T_e].\{F\} \rightarrow [T_e]^{-1}.[k].[T_e].\{U\}=\{F\}$
donc : $[K] = [T_e]^{-1}.[k].[T_e]$

La matrice$[T_e]$ est une matrice orthogonale, donc : $[T_e]^{-1} = [T_e]^T$

Ce qui permet d'écrire : $[K] = [T_e]^T.[k].[T_e]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L} \\ -\frac{E.A}{L} & \frac{E.A}{L} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{E.A}{L}\begin{bmatrix} \cos\theta^2 & \cos\theta.sin\theta & -\cos\theta^2 & -\cos\theta.sin\theta \\ \cos\theta.sin\theta & sin\theta^2 & -\cos\theta.sin\theta & -sin\theta^2 \\ -\cos\theta^2 & -\cos\theta.sin\theta & \cos\theta^2 & \cos\theta.sin\theta \\ -\cos\theta.sin\theta & -sin\theta^2 & \cos\theta.sin\theta & sin\theta^2 \end{bmatrix}$$