Algèbre 2

Table des matières

Chapitre 1

Applications linéaires

1.1 Introduction

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Généralement les bases de ces deux espaces sont données. Ces applications linéaires s'identifient aux matrices, sera étudié dans le prochain chapitre, la composition des applications s'identifiant au produit matricielle. La première section de ce chapitre est consacrée à des définitions et des propriétés élémentaires. La deuxième aborde les deux notions du Noyau et de l'image d'une application linéaire avec des exemples explicatifs, ainsi la notion du rang est discutée. Dans la dernière section, on définit des opérations sur les applications linéaires et on identifie ces opérations par quelques démonstrations utiles et aussi des exemples, afin de bien saisir les techniques de calcul.

Noté bien qui il existe un lien majeur entre les objets étudiés au chapitre précèdent : bases, sous-espaces vectoriels, dimension et les applications linéaires.

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. *(**Application linéaire**) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite application linéaire si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

En d'autre terme : les deux lois de l'espace vectoriel sont "respectés".

Exemple 1.2.1. **1.** *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x, y, y-x) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$, car :

$$\begin{array}{rcl} f_1((x,y)+(x',y')) & = & f_1((x+x', y+y') \\ & = & (x+x'-2(y+y'), 2(x+x'), y+y'-(x+x')) \\ & = & (x-2y, 2x, y, y-x) + (x'-2y', 2x', y', y'-x') \\ & = & f_1(x,y) + f_1(x',y'). \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{rcl} f_1(\lambda(x,y)) & = & f_1(\lambda x, \lambda y) \\ & = & (\lambda x - 2\lambda y, 2\lambda x, \lambda y, \lambda y - \lambda x) \\ & = & \lambda(x-2y, 2x, y, y-x) = \lambda f_1(x,y). \end{array}$$

2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, car :

$$\begin{array}{rcl} f_2(P+Q) & = & (P+Q)' \\ & = & P' + Q' \\ & = & f_2(P) + f_2(Q). \end{array}$$

Et

$$\begin{aligned} f_2(\lambda P) &= \lambda P' \\ &= \lambda f_2(\lambda P). \end{aligned}$$

3. *L'application nulle*

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & E & \longrightarrow & F \\ & & f_3(u) = 0 & \end{array}$$

est une application linéaire.

4. *L'application identité*

$$\begin{array}{rccc} f_4 : & E & \longrightarrow & E \\ & & f_4(u) = u & \end{array}$$

est une application linéaire.

5. *La symétrie centrale*

$$\begin{array}{rccc} f_5 : & E & \longrightarrow & E \\ & & f_5(u) = -u & \end{array}$$

est une application linéaire.

6. *L'homothétie de rapport k*

$$\begin{array}{rccc} f_6 : & E & \longrightarrow & E \\ & & f_6(u) = ku & \end{array}$$

est une application linéaire.

7. *Lapplication*

$$\begin{array}{rccc} f_7 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

n'est pas linéaire de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *car* $f_7(2(1,1)) = 8 \neq 4 = 2f_7(1,1)$.

Remarque 1.2.1.

1. *On appelle monomorphisme toute application linéaire injective de E sur F.*
2. *On appelle épimorphisme toute application linéaire surjective de E sur F.*
3. *On appelle isomorphisme (d'espace vectoriel) de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F.*
4. *Lorsque* $E = F$, *on parle plutôt d'automorphisme (d'espace vectoriel) de E.*

Théorème 1.2.1. ***(Application linéaire)*** *Soient E et F deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : E \longrightarrow F$ *une application. L'application f est linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Notations 1.2.1.

1. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F.*
2. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ *désigne l'ensemble de toutes les endomorphismes de E.*

3. *$Isom(E,F)$ est l'ensemble des isomorphisme de E dans F.*
4. *$GL(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E et appelé le groupe linéaire de E.*

Théorème 1.2.2. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*

(i) $f(0_E) = 0_F$,

(ii) $f(-x) = -f(x)$, *pour tout* $x \in E$,

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Démonstration . ***(i) et (ii)*** *Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec $\lambda = 0$, puis avec $\lambda = -1$.*

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

$\diamondsuit$

Théorème 1.2.3. ***(Caractérisation de l'injectivité/surjectivité par l'image d'une base)*** *Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.*

(i) *f est surjective si et seulement si* $F = \mathrm{Vect}\{(f(e_i))_{i\in I}\}$,

(ii) *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre,*

(iii) *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Exemple 1.2.2.

1. *Considérons l'application :*

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x+2y, 3x-y). \end{array}$$

Soit $\{(1,0),(0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.Comme

$$g((1,0)) = (1,1,3), \quad g((0,1)) = (2,2,-1)$$

et $\{(1,1,3),(2,2,-1)\}$ est libre, alors g est injective.

2. *Soit l'endomorphisme h défini par*

$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & P + XP'. \end{array}$$

$\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = 1 + X, \quad h(X^2) = 3X^2 \quad et \quad h(X^3) = 4X^3.$$

Comme $\{1, 1+X, 3X^2, 4X^3\}$ est libre et $\dim \mathbb{R}_3[X]$=Card$\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\} = 4$.

Alors, $\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *et* h *est bijective.*

Théorème 1.2.4. ***(Application linéaire entre espaces vectoriels de même dimensions finies)*** *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies égales et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors,*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Corollaire 1.2.1. *Pour que deux espaces vectoriels de dimensions finies soient isomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient même dimension.*

Démonstration . *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *un isomorphisme, alors l'image d'une base de* E *est une base de* F*. Donc* $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, Considérant $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ *une base de* E *et* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *une base de* F *(*E *et* F *ont la même dimension).*

• *Pour tout* $y \in F$ *et* $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$*, on a*

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n), \\ &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = f(x), \end{aligned}$$

d'où $y \in \operatorname{Im}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f) = F$*, alors* f *est surjective.*

• *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(f)$ *tel que,* $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$*, on a alors*

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n), \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n, \end{aligned}$$

Mais, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *est base de* F *donc* $x = 0_E$ *et* $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ *ce qui fait* f *est injective.*

Bref, f *est un isomorphisme.* $\diamondsuit$

Exemple 1.2.3. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto & a + cX^2 \end{array}$$

est un isomorphisme, car $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

1.3 Image et noyau d'une application linéaire

1.3.1 Image d'une application linéaire

Définition 1.3.1. *Soit f une application linéaire de E dans F. L'ensemble*

$$\operatorname{Im}(f) := \{f(x) | x \in E\} = f(E),$$

est appelé l'image de l'application linéaire f.

Exemple 1.3.1. **1.** *Considérons l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, y-z). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{f((x,y,z)) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+2y-z, y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0) + y(2,1) + z(-1,-1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,0),(2,1),(-1,-1)\}. \end{aligned}$$

2. *Soit g l'endomorphisme défini par :*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP''. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g) &= \{g(P) \mid P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{XP'' \mid P := a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{2a_2X + 6a_3X^2 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{2X, 6X^2\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1. ***(Image d'un sous espace vectoriel par une application linéaire)*** *Soit f une application linéaire de E dans F.*

(i) *Si A est un sous espace vectoriel de E alors, $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F. En particulier, $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ est un sous espace vectoriel de F,*

(ii) *f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.*

Exemple 1.3.2. *Pour $n \geq 2$, soit f l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-2}[X] \\ & P & \longmapsto & P''. \end{array}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{P'' \mid P \in \mathbb{K}_n[X]\}, \\ &= \{2a_2 + 6a_3X + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-2} \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathbb{K}_{n-2}[X], \end{aligned}$$

alors f est surjective.

Théorème 1.3.2. ***(Image d'un Vect par une application linéaire)*** *Soit f une application linéaire de E dans F. Pour tout partie X de E :*

$$f(\mathrm{Vect}(X)) = \mathrm{Vect}(f(X)).$$

En particulier, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{(e_i)_{i\in I}\}.$$

Exemple 1.3.3. **1.** *Considérons l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-3z, x-3y). \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} = \mathrm{Vect}\{(1,1),(2,-3),(-3,0)\}.$$

2. *Soit g l'application linéaire définie par :*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b) & \longmapsto & a+bX+(a+2b)X^2. \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ alors,

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\{g(1,0), g(0,1)\} = \mathrm{Vect}\left\{1+X^2, X+2X^2\right\}.$$

1.3.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 1.3.2. ***(Noyau d'une application linéaire)*** *Soit f une application de E dans F. L'ensemble :*

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_E\},$$

est appelé le noyau de l'application linéaire f.

Théorème 1.3.3. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

(i) *Si B est un sous espace vectoriel de F alors, $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E. En particulier, $\text{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E,*

(ii) *f est injective sur E si et seulement si $\text{Ker}(f) := \{0_E\}$.*

Exemple 1.3.4. *L'ensemble $B := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + z - 4t = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Parce que le noyau de f est B ($B = \text{Ker}(f)$), où on peut définir l'application linéaire f par :*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto & 2x + z - 4t. \end{array}$$

1.4 Théorème du rang

Définition 1.4.1. ***(Rang d'une application linéaire)*** *Soit f une application de E dans F. On dit que f est de rang fini si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, et de rang infini sinon. Si f de rang fini, on appelle rang de f, noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$.*

Théorème 1.4.1. *(Inégalités sur le rang) Soit f une application linéaire de E dans F.*

(i) *Si F est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim F$. De plus, f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim F$.*

(ii) *Si E est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim E$. De plus, f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim E$.*

Théorème 1.4.2. *(Théorème du Rang) Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors,*

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f). \tag{1.1}$$

Démonstration . • *Si f est injective : Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Comme f est injective, alors la famille $\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ est libre de F donc libre de $\text{Im}(f)$. Mais, c'est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, alors c'est une base de F et $\dim \text{Im}(f) = \dim E$.*

• *Si f est injective : Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de $\text{Ker}(f)$. Alors, $\text{Im}(f)$ est engendrée par*

$$\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}.$$

Maintenant, La famille $\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}$ est-elle libre ?
Puisque f est linéaire, alors

$$\lambda_{p+1} f(\varepsilon_{p+1}) + \lambda_{p+2} f(\varepsilon_{p+2}) + \cdots + \lambda_n f(\varepsilon_n) = f(\lambda_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \lambda_{p+2}\varepsilon_{p+2} + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n) = 0.$$

Cela nous donne

$$\lambda_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \lambda_{p+2}\varepsilon_{p+2} + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_p,$$

donc $\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}$ *forment une base de* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\dim \mathrm{Im}(f) = n - p$.
Ces deux cas nous permet d'achever la démonstration. $\diamondsuit$

1.5 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1.5.1. ***(Opérations sur les applications linéaires)***

(i) *Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2 : \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F). \tag{1.2}$$

(ii) *La composée d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G) : g \circ f \in \mathcal{L}(E,G). \tag{1.3}$$

Démonstration . ***(i)*** $\forall x, y \in E,\ \ \forall\alpha \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + y) &= (\lambda f)(\alpha x + y) + (\mu g)(\alpha x + y) = \lambda f(\alpha x + y) + \mu g(\alpha x + y)\\ &= \lambda f(\alpha x) + \lambda f(y) + \mu g(\alpha x) + \mu g(y)\\ &= \lambda\alpha f(x) + \lambda f(y) + \alpha\mu g(x) + \mu g(y)\\ &= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + (\lambda f(y) + \mu g(y))\\ &= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}g \circ f(x,y) &= g(f(x,y)) = g(f(x) + f(y))\\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = (g\circ f)(x) + (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}g \circ f(\lambda x) &= g(f(\lambda x))\\ &= g(\lambda f(x)) = \lambda(g \circ f)(x).\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Remarque 1.5.1. $\mathcal{L}(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(E,F)$.

Corollaire 1.5.1. ***(Anneau*** $\mathcal{L}(E)$ ***)***

(i) $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau (non commutatif et non intègre en général). De plus* $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$,

(ii) $GL(E)$ *est le groupe des inversibles de l'anneau* $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 1.5.2. *Comme dans tout anneau, les deux formules suivantes sont vraies dans* $\mathcal{L}(E)$ *:*

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}.$$

Exemple 1.5.1. **1.** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

est un endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *qui ne commute pas.*

2. *Considérons*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (0,y). \end{array}$$

On a $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *et* $g \circ f = f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ *et pourtant* $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ *et* $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Définition 1.5.1. ***(Endomorphisme nilpotent)*** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* f *est nilpotent si* $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ *pour un certain* $k \in \mathbb{N}^*$. *Le plus petit de ces entiers* k *est alors appelé l'indice de nilpotence de* f.

Exemple 1.5.2. *L'endomorphisme*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est nilpotent d'indice $\leq n+1$, *car :* $P^{(n+1)} = 0$, *donc* $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$.

Théorème 1.5.2. ***(Propriétés des isomorphismes)***

(i) *Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F, *alors* f^{-1} *est un isomorphisme de* F *sur* E.

(ii) *Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F *et* g *un isomorphisme de* F *sur* G, *alors* $g \circ f$ *est un isomorphisme de* E *sur* G.

Démonstration .

(i) *On considère* $z \in F : z = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad x, y \in E.$

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \\
&= \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)), \\
&= \lambda x + y, \\
f^{-1}(f(z)) &= z = f^{-1}(\lambda x + y) = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

(ii) *(Exercice)* $\diamondsuit$

Exemple 1.5.3. *L'application*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))
\end{array}$$

est un isomorphisme du $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{R}^2$*,*
l'isomorphisme réciproque est,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
(a, b) & \longmapsto & a + ib.
\end{array}$$