Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

$2022-2023$

Algèbre 2

Série no 1 : Généralités sur les espaces vectoriels

Exercice 1. 1. *On considère dans $\mathbb{R}_+^*$ la loi interne $\oplus$ et la loi externe $\cdot$ de domaine d'opérateurs $\mathbb{R}$, définies par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^{\lambda}.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{R}^2$ *muni de la loi interne définie par :*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$.
9. $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.
10. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.
11. $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est bornée } \}$.
12. $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est minorée } \}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}([a, b], \mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Exercice 3. 1. *Le vecteur $t = (1, 0, -1, 5)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $u = (1, 4, 5, 2), v = (1, 2, 3, 2) et w = (1, 1, 0, -1)$?*

2. *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(2, 1, 1)$*
- Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$

Exercice 4. *On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.*
1. *Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $E = F \oplus G$.*

Exercice 5. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $\{(-1,5,0),(0,-1,1),(1,2,3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(2,-1,3),(1,0,-3),(3,-2,9)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $\{(0,1,0),(11,-2,-2),(4,-1,-1),(2,1,2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(3,1,0,-2),(0,-3,1,1),(7,2,-4,1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
5. $\{1, 2+X, 1-X^2\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.
6. $\{-X, 1+X+X^2, X-X^3\}$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6. *Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que*

$$F+G = F+H, \quad F\cap G = F\cap H, \quad \text{et} \quad G \subset H.$$

Prouver que $G = H$.

Exercice 7. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

et

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1+X) = P(1-X)\}.$$

1. *Montrer que F et E sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Préciser une base et la dimension de F et de E.*

Exercice 8. *On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par*

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y = 0 \text{ et } x+z = 0\}.$$

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de F.*
2. *Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.*
3. *On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?*
4. *On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?*
5. *Donner une base de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.*
6. *Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?*

0.1 Solutions

Solution d'Exercice 1 :

1. (a) $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ groupe commutatif ?

• Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,$$
alors $\oplus$ est commutative.

• Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (xy) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z,$$
donc $\oplus$ est associative.

• C'est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$1 \oplus x = 1x = x,$$
d'où 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ $(e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)} = 1)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\frac{1}{x} \oplus x = 1 = e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)}$$
donc tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un élément symétrique pour la loi $\oplus$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$1_{\mathbb{R}} \cdot x = 1 \cdot x = x^1 = x.$$

(c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\alpha \cdot (x \oplus y) = \alpha \cdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha \oplus y^\alpha) = \alpha \cdot x \oplus \alpha \cdot y.$$

(d) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \oplus y^\beta = \alpha \cdot x \oplus \beta \cdot x.$$

(e) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot x^\beta = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

2. $\mathbb{R}^2$ muni avec ces deux lois n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel car, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$(\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)^2 x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_1, (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_2)$$
mais
$$\alpha \cdot (x_1, x_2) + \beta \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2)x_1, (\alpha^2 + \beta^2)x_2).$$

Solution d'Exercice 2 :

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_1$.

(b) $\forall X=(x,y,z)\in E_1$ et $\forall X'=(x',y',z')\in E_1$ on a

$$(x+x')+2(y+y')-(z+z')=(x+2y-z)+(x'+2y'-z')=0,$$

d'où $X+X'\in E_1$.

(c) $\forall X=(x,y,z)\in E_1$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\lambda x+2\lambda y-\lambda z=\lambda(x+2y-z)=0.$$

2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car : $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin E_2$.

3. E_3 est un sou-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puisque pour tous $(x,y,z,t),(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

(a) $0_{\mathbb{R}^4}=(0,0,0,0)\in E_3$.

(b) $(x,y,z,t)+(x',y',z',t')=(x+x',y+y',z+z,t+t')\in E_3$, car $x+x'=y+y'=z+z'=t+t'$.

(c) $\lambda(x,y,z,t)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)\in E_3$, car $\lambda x=\lambda y=\lambda z=\lambda t$.

4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X=(1,0)$ et $Y=(0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X+Y=(1,1)$ n'est pas élément de E_4.

5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5, donc E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

6. Posons $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-y+z=0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F\cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7. Prenons $(5,0,2)\in F\subset F\cup G$ et $(1,1,0)\in G\subset F\cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0)=(6,1,2)$ n'est pas élément de F car $12+3-10=5\neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6-1+2=5\neq 0$. Ainsi, $E_7=F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

8. E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}[x]}=0\in E_8$.

(b) $\forall P_1,P_2\in E_8$ on a

$$(P_1+P_2)(0)=P_1(0)+P_2(0)=P_1(2)+P_2(2)=(P_1+P_2)(2),$$

alors $P_1+P_2\in E_8$.

(c) $\forall P\in E_8$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P)(0)=\lambda\times P(0)=\lambda\times P(2)=(\lambda P)(2).$$

9. Comme $0_{\mathbb{R}[x]}\notin E_9$, alors E_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

10. En Remarquant que $P_1=X$ et $P_2=x^2$ sont des éléments de E_{10}, mais $x+x^2=P_1+P_2\notin E_{10}$ en on déduit que E_{10} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $f,g\in E_{11}$ et soit M_1,M_2 un majorant respectif de $|f|,|g|$. Alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$|(f+g)(x)|=|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq M_1+M_2$$

et

$$|(\lambda f)(x)|=|\lambda|\times|f(x)|\leq|\lambda|\times M_1,$$

et comme la fonction nulle est bornée, on obtient que E_{11} est un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

12. Considérons la fonction f définie pour $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Alors f est minorée (par 0). Mais on

a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-f(x) = -x^2$. Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas minorée. Donc $f \in E_{12}$ et $-f \notin E_{12}$, d'où E_{12} n'est pas un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
13. C'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{13}$. Soient $f, g \in E_{13}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)' + 2(f+g) = f' + 2f + g' + 2g = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha f)' + 2(\alpha f) = \alpha(f' + 2f) = 0,$$

donc E_{13} est un espace vectoriel.
14. Comme $\int_a^b 0 = 0$ alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{14}$. D'autre part, soient $f, g \in E_{14}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0$$

et

$$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \int_a^b \times \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0,$$

par suite E_{14} est un sous-espace vectoriel de .

Solution d'Exercice 3 :
1.Le vecteur t appartient au sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs u, v, w ssi il peut s'écrire comme combinaison linéaire de u, v, w.
C'est-à-dire, il existent α, β et γ tels que $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$.
Chercher trois réels α, β et γ, revient à résoudre le système $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + 3\beta = -1 \\ 2\alpha + 2\beta - \gamma = 5 \end{cases}$

le dernier système est $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -2\beta - 3\gamma = -4 \\ -2\gamma = -2 \\ -3\gamma = 3 \end{cases}$
on a $\gamma = -$ et $\gamma = 1$. le système n'a donc pas de solution.
Le vecteur t n'appartient donc pas au sous-espace vectoriel engendré par u, v et w.

2. Un vecteur (x, y, z) appartient à F ssi il existe deux réels α et β tels que $(x, y, z) = \alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) = (\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, 2\alpha + \beta)$
revient à résoudre le système $\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -\alpha + \beta = y \\ 2\alpha + \beta = z \end{cases}$ On fait une sommation de la deuxième et la troisième equation, on trouve $\alpha + 2\beta = y + z$.
Puis, on compare le résultat avec la première equation, on trouve $-x + y + z = 0$.
Donc, le système à une solution si $-x + y + z = 0$.

Solution d'Exercice 4 :
(1) Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante. Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp.

constante). Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution d'Exercice 5 : 1. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-1,5,0) + \beta(0,-1,1) + \gamma(1,2,3) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, alors

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma & = & 0 \\ 5\alpha - \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \beta + 3\gamma & = & 0 \end{cases}$$

d'où il vient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille est libre.
2. La relation $\alpha(2,-1,3) + \beta(1,0,-3) + \gamma(3,-2,9) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, donne le système

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma & = & 0 \\ -\alpha - 2\gamma & = & 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 9\gamma & = & 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha & = & -2\gamma \\ \beta & = & \gamma \end{cases}$$

alors, il n'y a pas que $(0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée. En prenant $\gamma = 1$, on trouve la relation :

$$-2(2,-1,3) + (1,0,-3) + (3,-2,9) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

3. Comme $\mathrm{Card}\{0,1,0), (11,-2,-2), (4,-1,-1), (2,1,2)\} = 4 \geq \dim \mathbb{R}^3$, alors la famille est liée.
4. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(3,1,0,2) + \beta(0,-3,1,1) + \gamma(7,2,-4,1) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3\alpha + 7\gamma & = & 0 \\ \alpha - 3\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \beta - 4\gamma & = & 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{cases}$$

par suite $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille est libre.
5. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha + \beta(2 + X) + \gamma(1 - X^2) = 0$, donc on a $\alpha + 2\beta + \gamma + \beta X - \gamma X^2 = 0$, par suite on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Alors la famille est libre.
6. Soient $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $-\alpha X + \beta(1 + X + X^2) + \gamma(X - X^3) = 0$, alors $\beta + (-\alpha + \beta + \gamma)X + \beta X^2 - \gamma X^3 = 0$, d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc, la famille est libre.

Solution d'Exercice 6 : Prouver que $G + H$ revient à prouver que $G \subset H$ et $H \subset G$.
Alors il suffit de prouver $H \subset G$. Soit $x \in H$ et d'après la condition 1,

$$x \in F + H \Rightarrow x \in F + G \Rightarrow \exists y \in F, z \in G \text{ tq } x = y + z$$

Mais, $z \in H$ (car, $G \subset H$) alors, $y \in H$ (car, $y = x - z$ et H est s.e.v).
Cependant,

$$y \in F \Rightarrow y \in F \cap H \Rightarrow y \in F \cap G$$

alors, $x = y + z \in G$. ce qui signifie $G \subset H$
Fin de la démonstration.

Solution d'Exercice 7 : 1. On

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + z\} \\ &= \{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1,1,0), (0,1,1)\}, \end{aligned}$$

d'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'autre part,
C'est clair que $0 \in E$. D'autre part, pour tous $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda P(1-X) + Q(1-X) = (\lambda P + Q)(1-X),$$

donc $\lambda P + Q \in E$.
2.
− D'après le calcul précédent, la famille $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ est une famille génératrice de F, donc il suffit de montrer que la famille est libre. En effet, comme les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnels, alors la famille est libre. Par suite $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.
− Commençons par la détermination d'une base de E. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$. Puisque

$$\begin{aligned} P(1+X) &= a_0 + a_1(1+X) + a_2(1+2X+X^2) + a_3(1+3X+3X^2+X^3) \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 + a_3X^3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(1-X) &= a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-2X+X^2) + a_3(1-3X+3X^2-X^3) \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 - a_3X^3, \end{aligned}$$

alors $P(1-X) = P(1+X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -(a_1 + 2a_2 + 3a_3) \\ a_3 = -a_3 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_1 &= -2a_2 \\ a_3 &= 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} E &= \{a_0 - 2a_2X + a_2X^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0 + a_2(-2X + X^2) \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{1, -2X + X^2\}. \end{aligned}$$

Comme les polynômes 1 et $-2X + X^2$ ont des degrés différents, alors $\{1, -2X + X^2\}$ est une base de E et $\dim E = 2.$.

Solution d'Exercice 8 : **1.** On a : $F = \text{Vect}\{(1,-1,-1,0),(0,0,0,1)\}$, donc F est une sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus comme $\{(1,-1,-1,0),(0,0,0,1)\}$ est une famille libre, alors $\{(1,-1,-1,0),(0,0,0,1)\}$ est une base de F.
2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille $\{(1,-1,-1,0),(0,0,0,1)\}$ par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que $\{(1,-1,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.
3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{lll} a+b-c & = & 0 \\ a+2b & = & \\ a+3b-c & = & 0 \\ a+4b & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne facilement $a = b = c = d = 0$.
4. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b et c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{\begin{array}{lll} 2a+3b-c & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 2a & = & -3b+c \\ b & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & -c \\ b & = & c \\ c & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1,1,1,3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1,1,1,3)$.
D'autre part, d'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F + G = \mathbb{R}^4$.
6. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$, la somme n'est pas directe.