4. Systèmes d'équations aux différences non linéa

4.1 Définitions de Stabilité

Soient f et g deux fonctions continûment différentiables

$$f:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow I,\ g:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow J$$

où I, J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} = & f\left(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}\right) \\ y_{n+1} = & g\left(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}\right) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

où $n,k\in\mathbb{N}_0$, $(x_{-k},x_{-k+1},\ldots,x_0)\in I^{k+1}$ et $(y_{-k},y_{-k+1},\ldots,y_0)\in J^{k+1}$.

Définissons la fonction

$$H:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow I^{k+1}\times J^{k+1}$$

par

$$H(W)=(f_0(W),f_1(W),\ldots,f_k(W),g_0(W),g_1(W),\ldots,g_k(W))$$

avec

$$W=(u_0,u_1,\ldots,u_k,v_0,v_1,\ldots,v_k)^T,$$

$$f_0(W)=f(W),f_1(W)=u_0,\ldots,f_k(W)=u_{k-1},$$

$$g_0(W)=g(W),g_1(W)=v_0,\ldots,g_k(W)=v_{k-1}.$$

Posons,

$$W_n=[x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}]^T.$$

Ainsi, le système (4.1) est équivalent au système

$$W_{n+1}=H(W_n),\quad n=0,1,\ldots, \tag{4.2}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}\right) \\ x_n = & x_n \\ \vdots & \\ x_{n-k+1} = & x_{n-k+1} \\ y_{n+1} = & g\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1} \ldots, y_{n-k}\right) \\ y_n = & y_n \\ \vdots & \\ y_{n-k+1} = & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

■ **Example 4.1**

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{1+x_{n-2}} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_{n-2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

le système (4.3) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{1+y_n}{1+x_{n-2}} \\ x_n = & x_n \\ x_{n-1} = & x_{n-1} \\ y_{n+1} = & \dfrac{1}{1+x_{n-2}} \\ y_n = & y_n \\ y_{n-1} = & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

■

Définition 4.1.1

1. Un point $(\overline{x};\overline{y})$ est dit point d'équilibre pour le système (4.1) si

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}),$$
$$\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}).$$

2. Un point $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ est point d'équilibre du système (4.2) si

$$\overline{W} = H(\overline{W}).$$

■ **Example 4.2**

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_{n-1}} \end{cases} \tag{4.4}$$

Trouver les ponits d'équilibres positives du système (4.4).
Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ un point d'équilibre du systèmes (4.4), donc

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{1+\overline{y}} \\ \overline{y} = \dfrac{1}{1+\overline{x}} \end{cases} \Rightarrow \overline{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \overline{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Le seul points d'équilibre positive du système (4.4) est $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. ■

Définition 4.1.2 Une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ du système (4.1) est dite ***éventuelleement périodique*** de période $p \in \mathbb{N}_0$ si

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n, \quad y_{n+p} = y_n.$$

Si $N = -k$, on dit que la solution est ***périodique*** de période p .

■ **Example 4.3**

■

4.1.1 Stabilité des systèmes d'équations aux différences non linéaires

Définition 4.1.3 Soient $\overline{W}$ un point d'équilibre du système (4.2) et $\| \cdot \|$ une norme, par exemple la norme euclidienne.

1. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit stable (ou localement stable) si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\| W_0 - \overline{W} \| < \delta$ implique $\| W_n - \overline{W} \| < \varepsilon$ pour $n \geq 0$.
2. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe $\gamma > 0$ tel que $\| W_0 - \overline{W} \| < \gamma$ implique
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \, n \to +\infty.$$
3. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble $G \subseteq I^{k+1} \times J^{k+1}$), si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$)
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \, n \to +\infty.$$
4. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si est localement stable, et si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$),
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \, n \to +\infty.$$
5. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.

R Il est claire que $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ est un point d'équilibre du système (4.1) si et seulement si $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ est un point d'équilibre du système (4.2).

Définition 4.1.4 On appelle ***système linéaire associée*** au système (4.2) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y})$$

le systtème

$$W_{n+1} = AW_n, \, n = 0, 1, \ldots$$

où A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$A=\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial g_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial g_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial v_k}(\overline{W})
\end{bmatrix}$$

■ **Example 4.4** Trouvez le système linéaire associé au système (4.4), autour du paint d'équilibre potitive $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

le système (4.4) est équivalent au système

$$\begin{cases}
x_{n+1} = & \dfrac{1}{1+y_{n-1}} \\
x_n = & x_n \\
y_{n+1} = & \dfrac{1}{1+x_{n-1}} \\
y_n = & y_n
\end{cases}$$

le système linéaire associé au système (4.4), autour du point d'équilibre potitive $\overline{W}$ est donnée par

$$W_{n+1} = AW_n$$

avec

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_0}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial z} & \frac{\partial f_0}{\partial t} \\
\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\
\frac{\partial g_0}{\partial x} & \frac{\partial g_0}{\partial y} & \frac{\partial g_0}{\partial z} & \frac{\partial g_0}{\partial t} \\
\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_1}{\partial t}
\end{pmatrix},$$

$$W_n = (u_n, v_n, w_n, z_n)$$

et

$$\begin{aligned}
f_0 :\quad (0,+\infty)^4 &\longrightarrow (0,+\infty) \\
(x,y,z,t) &\longmapsto \frac{1}{1+t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 :\quad (0,+\infty)^4 &\longrightarrow (0,+\infty) \\
(x,y,z,t) &\longmapsto x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 :\quad (0,+\infty)^4 &\longrightarrow (0,+\infty) \\
(x,y,z,t) &\longmapsto \frac{1}{1+y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 : \quad (0,+\infty)^4 &\longrightarrow (0,+\infty) \\ (x,y,z,t) &\longmapsto z \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

4.1.2 Stabilité par linéarisation

Théorème 4.1.1

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (4.2) est localement asymptotiquement stable.
2. Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (4.2) est instable.

■ **Example 4.5** Monter que point d'équilibre potitive du systèmes (4.4) est localemnet asymptotiquement stable.

D'aprés l'exemple (4.4), le système linéaire associé au système (4.4), autour du point d'équilibre potitive $\overline{W}$ est donnée par

$$W_{n+1} = AW_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

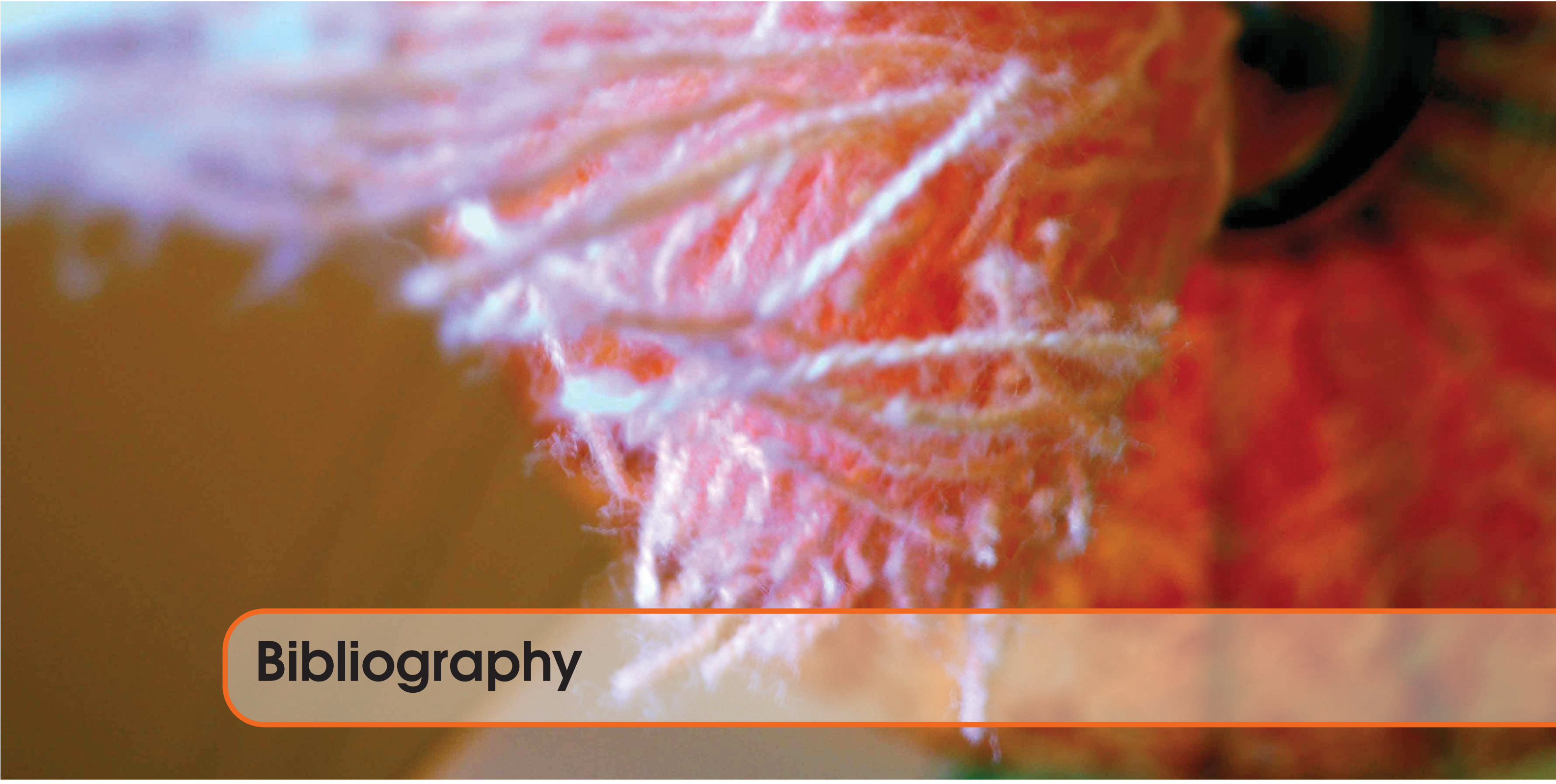
On a

$$det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Les valeurs propres de la matrice de Jacobie A sont

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_3 = i\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

On a $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1,...,4.$, donc d'aprés le Théorème (4.1.1), le point d'équilibre positive du système (4.4) est localemnet asymptotiquement stable. ■



Bibliography

[1] **D. Simsek, C. Cinar, I. Yalinkaya**, *On the solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$, Int. J. Contemp. Math. Sci., 1(2006)(10), 481-487.