

## 3. Equations aux différences non linéaires

### 3.1 Définitions de Stabilité

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  est une fonction continue.

**Définition 3.1.1** Une équation aux différences d'ordre  $(k + 1)$ .

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

avec les valeurs initiales.  $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k} \in I$ , est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme (2.1).

#### ■ Exemple 3.1

1. L'équation

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2 + x_{n-3}}$$

est une équation aux différences non linéaire d'ordre 4 .

2. L'équation

$$x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}^2$$

est une équation aux différences non linéaire d'ordre 3 .

**Définition 3.1.2** Un point  $\bar{x} \in I$  est dit point d'équilibre pour l'équation (3.1) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

#### ■ Exemple 3.2

1. Soit  $\bar{x} \in I \subset \mathbb{R}$  un point d'équilibre de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2}{-1 + x_{n-2}}$$

alors

$$\bar{x} = \frac{2}{-1 + \bar{x}}$$

donc  $\bar{x} = 2$  ou  $\bar{x} = -1$ .

2. Soit  $\bar{x} \in I \subset \mathbb{R}$  un point d'équilibre de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_{n-4}}$$

alors

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{1 + \bar{x}}$$

$$\text{donc } \bar{x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \text{ ou } \bar{x} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

**Définition 3.1.3** Une solution  $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$  de l'équation (3.1) est dite *éventuellement périodique* de période  $p \in \mathbb{N}_0$  si

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n.$$

Si  $N = -k$ , on dit que la solution est *périodique* de période  $p$ .

### ■ Exemple 3.3

1. Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n. \end{aligned}$$

Donc  $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$  est périodique de période 2.

2. Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}}, \quad n \geq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} x_{n+3} &= \frac{1}{x_{n+2} x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1} x_n} x_n x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{x_{n+1} x_n^2 x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{x_n x_{n-1}} = x_n. \end{aligned}$$

Donc  $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$  est périodique de période 3.

**Définition 3.1.4** Un intervalle  $J \subseteq I$  est dit intervalle invariant pour l'équation (3.1) si

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad n > 0.$$

### 3.1.1 Stabilité des équations aux différences non linéaires

**Définition 3.1.5** Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre de l'équation (3.1).

1.  $\bar{x}$  est dit *localement stable* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \dots, x_0 \in I : |x_{-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

alors

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2.  $\bar{x}$  est dit *localement asymptotiquement stable* si

- $\bar{x}$  est localement stable,
- $\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \dots, x_0 \in I : |x_{-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

3.  $\bar{x}$  est dit *globalement attractif* si

$$\forall x_{-k}, \dots, x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

4.  $\bar{x}$  est dit *globalement asymptotiquement stable* si

- $\bar{x}$  est localement stable,
- $\bar{x}$  est globalement attractif.

5. Le point  $\bar{x}$  est dit *instable* s'il est non localement stable.

**Définition 3.1.6** On appelle *équation aux différences linéaire associée* à l'équation (3.1) l'équation

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \dots + p_k y_{n-k} \quad (3.2)$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), i = 0, \dots, k.$$

et

$$f : \begin{array}{ccc} I^k & \longrightarrow & I \\ (u_1, \dots, u_k) & \longmapsto & f(u_1, \dots, u_k). \end{array}$$

et

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \dots - p_k.$$

son polynôme caractéristique associé .

#### ■ Exemple 3.4

1. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2}{-1 + x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \quad (3.3)$$

On définit la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{2}{-1 + y}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont  $\bar{x} = 2$  et  $\bar{x} = -1$ .

équation aux différences linéaire associée à l'équation (3.3) autour du point d'équilibre  $\bar{x} = -1$  est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{1}{2}$$

donc l'équation aux différences linéaire associée à l'équation (3.3) autour du point d'équilibre  $\bar{x} = -1$  est

$$y_{n+1} = -\frac{1}{2} y_{n-1}.$$

2. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 0 \quad (3.4)$$

On définit la fonction

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = \frac{2x}{xy - z}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont  $\bar{x} = 2$  et  $\bar{x} = -1$ .

équation aux différences linéaire associée à l'équation (3.4) autour du point d'équilibre  $\bar{x} = 2$  est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + p_2 y_{n-2}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = -1, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = 2, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = 1$$

donc l'équation aux différences linéaire associée à l'équation (3.3) autour du point d'équilibre  $\bar{x} = 2$  est

$$y_{n+1} = -y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

■

### 3.1.2 Stabilité par linéarisation

#### Théorème 3.1.1

1. Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert  $|\lambda| < 1$ , alors le point d'équilibre  $\bar{x}$  de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable.
2. Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre  $\bar{x}$  de l'équation (3.1) est instable.

*Proof.* Soit l'équation aux différences (3.1)

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

et la fonction

$$f: I^k \longrightarrow I$$

$$(u_1, \dots, u_k) \longmapsto f(u_1, \dots, u_k).$$

Si on fait un développement de Taylor de la fonction  $f$  autour du point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$  on obtient

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})y_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})y_{n-1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})y_{n-k} + o(x - \bar{x})$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $o(x - \bar{x}) \rightarrow 0$ , donc

$$x_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \dots + p_k y_{n-k}$$

et le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \dots - p_k$$

Donc d'après le Théorème (2.2.6)

$$(\bar{x}_n)_{n \geq n_0} \text{ est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, s.$$

■

**Théorème 3.1.2 — Théorème de Clark.** Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (3.1) et

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_k| < 1.$$

Pour montrer ce théorème, on utilise le Théorème de Rouché.

**Théorème 3.1.3 — Théorème de Rouché.** Soient  $f(z)$ ,  $g(z)$  deux fonctions holomorphes dans un ouvert  $\Omega$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ , et soit  $K$  un compact contenu dans  $\Omega$ . Si on a

$$|g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de  $f(z) + g(z)$  dans  $K$  est égal au nombre de zéros de  $f(z)$  dans  $K$ .

*Proof.* (Théorème de Clark) Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - \dots - p_k$$

le polynôme caractéristique de l'équation linéaire associée de l'équation (3.1). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, \quad g(\lambda) = p_0 \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k.$$

On a pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| &= |p_0 \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k| \\ &\leq |p_0| + |p_1| + \dots + |p_k| \\ &< 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|.$$

Alors par le Théorème de Rouché  $f(\lambda)$  et  $f(\lambda) + g(\lambda)$  ont le même nombre de zéros ( $k + 1$ ) à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme  $P(\lambda)$  sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du Théorème (2.2.6). ■

### ■ Example 3.5

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\alpha + \beta x_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

$\alpha, \beta > 0$  et  $x_{-1}, x_0 \in [0, +\infty[$ .

Etudier le comportement du point d'équilibre zéro.

**Les points d'équilibre d'équation (3.5):**

Soit  $x$  un point d'équilibre de (3.5) donc

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{x}}{\alpha + \beta \bar{x}} \Leftrightarrow x(\alpha + \beta \bar{x}) = \bar{x} \\ &\Leftrightarrow \beta \bar{x}^2 + (\alpha - 1)\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

• Si  $\alpha > 1$ : Les points d'équilibres sont:  $\bar{x} = 0$  et  $\bar{x} = \frac{1 - \alpha}{\beta}$ .

• Si  $\alpha \leq 1$ : Le seul point d'équilibre est:  $\bar{x} = 0$ .

**L'équation linéaire associée autour du point d'équilibre  $\bar{x} = 0$ :**

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: [0, +\infty[^2 &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ (x, y) &\longmapsto \frac{y}{\alpha + \beta x}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) = \frac{-\beta y}{(\alpha + \beta x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = \frac{1}{(\alpha + \beta x)}.$$

D'où

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x} f(0, 0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y} f(0, 0) = \frac{1}{\alpha}.$$

Donc L'équation linéaire associée à l'équation (3.5) autour du point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  est

$$y_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_n. \quad (3.6)$$

Le polynôme caractéristique de (3.6) est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\alpha}.$$

Les racines de  $P(\lambda)$  sont:  $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  et  $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ .

On a

$$|\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Donc

- Si  $\alpha > 1$ :  $\bar{x} = 0$  est asymptotiquement stable.
- Si  $\alpha < 1$ :  $\bar{x} = 0$  est instable.

■

### 3.2 Théorèmes de convergences

On donne maintenant quelques théorèmes de convergence pour les équations aux différences d'ordre 2.

**Théorème 3.2.1** Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

avec

$$g : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que  $g$  est une fonction continue telle que

- 1)  $g(x, y)$  est croissante par rapport à  $x \in [a, b]$  pour chaque  $y \in [a, b]$  et  $g(x, y)$  est décroissante par rapport à  $y \in [a, b]$  pour chaque  $x \in [a, b]$ ,
- 2) Si  $(m, M)$  est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(m, M) \\ M = g(M, m) \end{cases}$$

donc  $m = M$ .

Alors l'équation (3.7) admet un seul point d'équilibre  $\bar{x}$  et toute solution de l'équation (3.7) converge vers  $\bar{x}$ .

*Proof.* ■

**Théorème 3.2.2** Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

avec

$$g : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que  $g$  est une fonction continue telle que

- 1)  $g(x, y)$  est décroissante par rapport à  $x \in [a, b]$  pour chaque  $y \in [a, b]$  et  $g(x, y)$  est croissante par rapport à  $y \in [a, b]$  pour chaque  $x \in [a, b]$ ,
- 2) Si  $(m, M)$  est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(M, m) \\ M = g(m, M) \end{cases}$$

donc  $m = M$ .

Alors l'équation (3.8) admet un seul point d'équilibre  $\bar{x}$  et toute solution de l'équation (3.8) converge vers  $\bar{x}$ .

*Proof.* ■

■ **Exemple 3.6** Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + x_{n-1}}{x_n + 2x_{n-1}} \quad (3.9)$$

$$\text{et } x_{-1}, x_0 \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right].$$

On a

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x_n + x_{n-1}}{x_n + 2x_{n-1}} - \frac{1}{2} = \frac{3x_n}{2(x_n + 2x_{n-1})} \geq 0.$$

donc

$$x_n \geq \frac{1}{2}.$$

$$x_{n+1} - 2 = \frac{2x_n + x_{n-1}}{x_n + 2x_{n-1}} - 2 = \frac{-3x_n}{(x_n + 2x_{n-1})} \leq 0.$$

donc

$$x_n \leq 2.$$

Donc  $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Soit la fonction

$$f: \left[\frac{1}{2}, 2\right]^2 \longrightarrow \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{2x + y}{x + 2y}.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3y}{(x + 2y)^2} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3x}{(x + 2y)^2} \leq 0$$

donc  $f$  est croissante par rapport à  $x$  et décroissante par rapport à  $y$

Soit  $m, M \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$  tels que

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2m + M}{m + 2M} \\ M = \frac{2M + m}{M + 2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mm = \frac{M(2m + M)}{m + 2M} \\ Mm = \frac{m(2M + m)}{M + 2m} \end{cases}$$

Donc

$$\frac{M(2m + M)}{m + 2M} = \frac{m(2M + m)}{M + 2m}$$

$$\begin{aligned} (M^3 - m^3) + 4(M^2m - m^2M) - 4(M^2m - m^2M) &= 0 \\ (M - m)[m^2 + M^2 + mM] &= 0 \end{aligned}$$

On a  $(m^2 + M^2) + mM > 0$  alors  $M - m = 0$ , d'après le Théorème (3.2.1), l'équation (3.9) admet un seul point d'équilibre  $\bar{x} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ . ■

### 3.3 Des équations aux différences non linéaires qui se ramènent à des équations aux différences linéaires

Soit l'équation aux différences non linéaire

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

avec  $p$  et  $q$  sont des fonctions réels et  $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Posons  $y_n = \frac{1}{x_n}$ , on obtient

$$\frac{1}{y_{n+1}} \frac{1}{y_n} + \frac{p(n)}{y_{n+1}} + \frac{q(n)}{y_n} = 0$$



On multiplier les deux membres par  $y_{n+1}y_n$ , on obtient

$$q(n)y_{n+1} + p(n)y_n + 1 = 0$$

qui est une équation aux différences linéaire.

Soit maintenant l'équation aux différences non linéaire non homogène

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = g(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.11}$$

avec  $p, q$  et  $g$  sont des fonctions réels et  $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

.....

■ **Example 3.7**

Soit l'équation aux différences non linéaire d'ordre 1

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}, \quad n \geq 0 \tag{3.12}$$

avec  $\alpha, \beta > 0, \alpha \neq 1$  et  $x_0 = 1$ .

On a

$$\begin{aligned} x_{n+1}(1 + \beta x_n) &= \alpha x_n \\ x_{n+1} + \beta x_{n+1}x_n - \alpha x_n &= 0 \\ x_{n+1}x_n + \frac{1}{\beta}x_{n+1} - \frac{\alpha}{\beta}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Posons  $y_n = \frac{1}{x_n}$ , on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\beta}y_{n+1} + \frac{1}{\beta}y_n + 1 &= 0 \\ y_{n+1} - \frac{1}{\alpha}y_n &= \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En appliquant l'expression  $(E - 1)$  aux deux membres de l'équation (3.13), on obtient :

$$(E - 1) \left( y_{n+1} - \frac{1}{\alpha}y_n \right) = (E - 1) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Développant cette relation, on obtient:

$$y_{n+2} - \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) y_{n+1} + \frac{1}{\alpha}y_n = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^2 - \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) \lambda + \frac{1}{\alpha} = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1(\text{simple}), \frac{1}{\alpha}(\text{simple})$$

la solution est de la forme

$$y_n = a_1 + a_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right)^n.$$

Donc

$$x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{a_1 + a_2 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

On utilisons les conditions initiales  $x_0 = 1$ , on obtient le système

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \frac{\alpha}{1+\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + \frac{1}{\alpha}a_2 = \frac{1+\beta}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{\beta}{\alpha-1}, a_2 = \frac{\alpha-1-\beta}{\alpha-1}.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n = \frac{(\alpha-1)\alpha^n}{\beta(\alpha^n-1) + (\alpha-1)}.$$

■