CHAPITRE 1

LA RECHERCHE EN MATHEMATIQUES

Le monde mathématique des chercheurs est très différent de celui des étudiants, même si les objets étudiés sont les mêmes, la manière de les considérer est fondamentalement différente. Ce chapitre vise a donner une vague idée de la manière dont fonctionnent les chercheurs.

La recherche en mathématiques consiste à découvrir de nouvelles vérités. Les vérités connues sont des **Théorèmes**, c'est-à-dire que leur véracité est assurée par une preuve. Lorsque l'on suppose une vérité mais ne parvient pas encore à la prouver, c'est une **Conjecture**. Le but ultime est de pouvoir répondre à toute question par un théorème.

Exemples

- #### La conjecture de Poincaré

La **conjecture de Poincaré** était une conjecture mathématique du domaine de la topologie algébrique portant sur la caractérisation d'une variété particulière, la sphère de dimension trois.

La question fut posée pour la première fois par **Henri Poincaré** en **1904**, et s'énonce ainsi :

> Toute 3-variété compacte sans bord et simplement connexe est-elle homéomorphe à la 3-sphère ?

Elle fut démontrée en **2003** par le Russe **Grigori Perelman**. On peut ainsi également l'appeler **Théorème de Perelman**. (Médaille Fields en 2006).

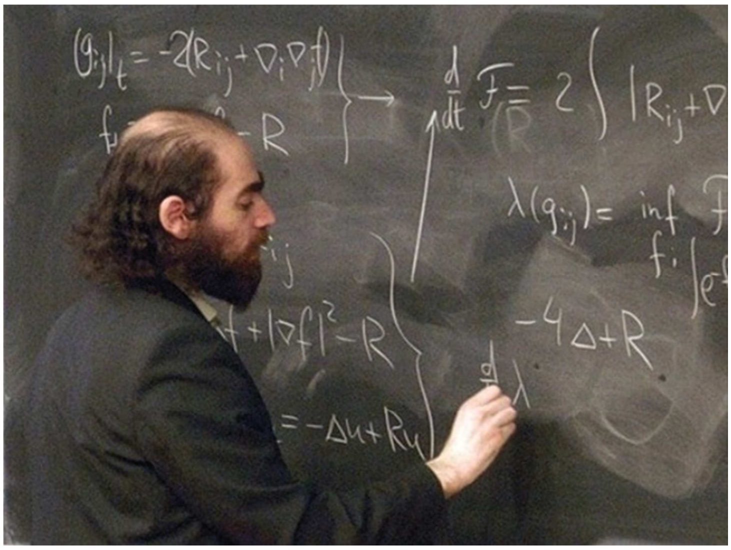

Figure 1 : Grigori Perelman (1966-)

• Le dernier Théorème de Fermat

Formulée vraisemblablement en 1637, publiée en 1670, la plus célèbre de toutes les conjectures était celle dénommée le « **dernier Théorème de Fermat** »

Existent-ils des entiers positifs non nul x, y, z tels que

$$x^n + y^n = z^n.$$

Pour n=1, et $n = 2$, c'est évident que la réponse est oui.

En **1637**, **Fermat** conjecture que pour tout $n > 2$ la réponse est négative. Il prouve cela dans le cas particulier $n = 4$.

En **1994, Wiles** prouve la conjecture de Fermat pour tout entier $n > 2$, elle devient le **Théorème de Wiles.**

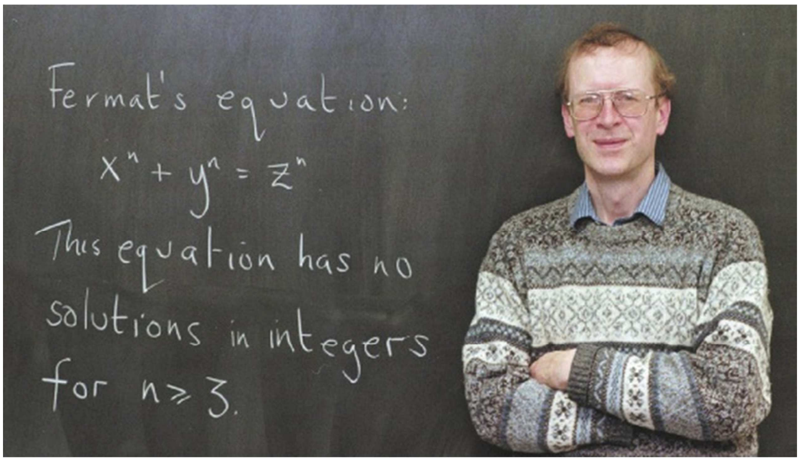

Figure 2 : Andrew John Wiles (1953-)

• La conjecture de nombre parfaits

En arithmétique, un **nombre parfait** est un entier naturel égal à la moitié de la somme de ses diviseurs ou encore à la somme de ses diviseurs stricts. Plus formellement, un nombre parfait n est un entier tel que $\sigma(n) = 2n$ où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs positifs de n. Ainsi 6 est un nombre parfait car ses diviseurs entiers sont 1, 2, 3 et 6, et il vérifie bien $2 \times 6 = 12 = 1 + 2 + 3 + 6$, ou encore $6 = 1 + 2 + 3$.

Euclide, au 275 av J-C., a démontré que si $M = 2^p - 1$ est premier, alors $M(M + 1)/2 = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait. (M est dit nombre de Mersenne).

À ce jour (septembre 2021), on connaît 47 nombres de Mersenne premiers et donc autant de nombres parfaits pairs. Euclide a reconnu que 28 était un nombre parfait en 275 av J-C.

Problèmes ouverts

En science des mathématiques le terme **problème ouvert** se réfère habituellement aux problèmes qui pendant une longue période restaient non résolus ou une conjecture qui n'a pas été prouvée.

Exemples :

Les sept problèmes du millénaire

Le 24 mai 2000, le **Clay Mathematics Institute** (CMI) présente au Collège de France sept problèmes majeurs des mathématiques. Chacun est doté d'un prix d'**un million de dollars** pour celui qui en arriverait à bout.

En 2022, six des sept problèmes demeurent non résolus.

1. Hypothèse de Riemann

L'hypothèse de **Riemann** est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien allemand **Bernhard Riemann**. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2. Sa démonstration améliorerait la connaissance de la répartition des nombres premiers.

2. La conjecture de Poincaré (résolue)

3. Problème ouvert P = NP

Savoir si P = NP est l'un des principaux problèmes ouverts de l'informatique théorique. Le mathématicien et vulgarisateur **Keith Devlin** le décrit comme le seul problème de la liste potentiellement accessible aux non-spécialistes, dans la mesure où sa description est accessible et une idée simple pourrait suffire à le résoudre.

4. Conjecture de Hodge

Pour une certaine classe d'espace, les variétés algébriques projectives, appelées cycles de Hodge sont des combinaisons linéaires rationnelles d'objets ayant une réelle nature algébrique (les cycles algébriques).

5. La théorie de Yang-Mills

La théorie de Yang et Mills est construite sur un modèle géométrique expérimental qui décrit l'interaction forte des particules élémentaires. Elle n'est par contre pas comprise d'un point de vue théorique. Elle fait intervenir une propriété appartenant au monde de la mécanique quantique certaines particules quantiques ont une masse positive alors que l'onde associée voyage à la vitesse de la lumière.

6. Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Quand les solutions d'une équation algébrique sont situées sur une variété abélienne, la taille du groupe des solutions rationnels est reliée au comportement de la fonction Zeta $\zeta(s)$ associée au voisinage de s=1. Si $\zeta(1)=0$ alors il y a une infinité de solutions rationnelles et réciproquement, si $\zeta(1)\neq 0$, il y a seulement un nombre fini de solutions rationnelles.

7. Équations de Navier-Stokes

Le défi consiste à faire progresser les théories mathématiques liées aux équations de Navier-Stockes dans le but d'expliquer des phénomènes tel le mouvement des vagues produites par un bateau en déplacement.

Médaille Fields

La **médaille Fields** est (avec le prix Abel) une des deux plus prestigieuses récompenses

En mathématiques. Toutes deux sont considérées comme équivalentes à un prix Nobel inexistant pour cette discipline.

Elle est attribuée tous les quatre ans depuis 1936 au cours du congrès international des mathématiciens à quatre mathématiciens au plus, tous de moins de 40 ans. Les lauréats reçoivent chacun une médaille et 15 000 dollars canadiens.

Origine et première attributions

John Charles Fields, mathématicien canadien, propose la création de cette médaille en **1923** lors d'une réunion internationale à **Toronto**. À sa mort, en **1932**, il lègue ses biens à la science afin de contribuer au financement de la médaille. L'attribution des deux premières médailles a lieu en 1936. La Seconde Guerre mondiale interrompt la délivrance de la distinction jusqu'en 1950. Au départ, seules deux médailles sont décernées tous les quatre ans. En 1966, la décision est prise de passer à quatre lauréats au plus.

Figure 3 : Photos de Médaille Fields

Figure 3 : John Charles Fields (1863 – 1932)

1954	Kunihiko Kodaira, Jean-Pierre Serre	**1990**	Vladimir Drinfeld, Vaughan Jones, Shigefumi Mori, Edward Witten
1958	Klaus Roth, René Thom	**1994**	Jean Bourgain, Pierre-Louis Lions, Jean-Christophe Yoccoz, Efim Zelmanov
1962	Lars Hörmander, John Milnor	**1998**	Richard Ewen Borcherds, Timothy Gowers, Maxime Kontsevitch , Curtis Tracy McMullen
1966	Michael Atiyah, Paul Cohen, Alexandre Grothendieck, Stephen Smale	**2002**	Laurent Lafforgue, Vladimir Voïevodski
1970	Alan Baker, Heisuke Hironaka, Sergueï Novikov, John Griggs Thompson	**2006**	Andreï Okounkov, Grigori Perelman (a décliné le prix), Terence Tao, Wendelin Werner
1974	Enrico Bombieri, David Mumford	**2010**	Ngô Bảo Châu, Stanislav Smirnov, Cédric Villani
1978	Pierre Deligne, Charles Fefferman, Gregori Margulis, Daniel Quillen	**2014**	Artur Ávila, Manjul Bhargava, Martin Hairer, Maryam Mirzakhani
1982	Alain Connes, William Thurston, Shing-Tung Yau	**2018**	- Caucher Birkar, Alessio Figalli, Peter Scholze, Akshay Venkatesh
1986	Simon Donaldson, Gerd Faltings, Michael Freedman	**2022**	Hugo Duminil-Copin, Maryna Viazovska, June Huh, James Maynard

Classification mathématique par matières

La **classification mathématique par matières** (**Mathematics Subject Classification**, avec abréviation **MSC**), est une classification à plusieurs niveaux établie conjointement par les deux répertoires bibliographiques en mathématiques que sont les *Mathematical Reviews* (AMS) et le *Zentralblatt MATH* (EMS, FIZ **(de)**, Springer). Elle est utilisée systématiquement par ces organes bibliographiques, ainsi que tous les journaux et monographies de recherche en mathématiques afin de faciliter l'indexation de ces publications et les recherches bibliographiques. Elle est amendée régulièrement suivant l'évolution des sciences mathématiques et en consultant largement la communauté mathématique : sa dernière révision date de 2020.

MSC2020-Mathematics Subject Classification System

Associate Editors of Mathematical Reviews and zbMATH

00 General and overarching topics; collections	45 Integral equations
01 History and biography	46 Functional analysis
03 Mathematical logic and foundations	47 Operator theory
05 Combinatorics	49 Calculus of variations and optimal control; optimization
06 Order, lattices, ordered algebraic structures	51 Geometry
08 General algebraic systems	52 Convex and discrete geometry
11 Number theory	53 Differential geometry
12 Field theory and polynomials	54 General topology
13 Commutative algebra	55 Algebraic topology
14 Algebraic geometry	57 Manifolds and cell complexes
15 Linear and multilinear algebra; matrix theory	

16 Associative rings and algebras

17 Non associative rings and algebras

18 Category theory; homological algebra

19 K-theory

20 Group theory and generalizations

22 Topological groups, Lie groups

26 Real functions

28 Measure and integration

30 Functions of a complex variable

31 Potential theory

32 Several complex variables and analytic spaces

33 Special functions

34 Ordinary differential equations

35 Partial differential equations

37 Dynamical systems and ergodic theory

39 Difference and functional equations

40 Sequences, series, summability

41 Approximations and expansions

42 Harmonic analysis on Euclidean spaces

43 Abstract harmonic analysis

44 Integral transforms, operational calculus

58 Global analysis, analysis on manifolds

60 Probability theory and stochastic processes

62 Statistics

65 Numerical analysis

68 Computer science

70 Mechanics of particles and systems

74 Mechanics of deformable solids

76 Fluid mechanics

78 Optics, electromagnetic theory

80 Classical thermodynamics, heat transfer

81 Quantum theory

82 Statistical mechanics, structure of matter

83 Relativity and gravitational theory

85 Astronomy and astrophysics

86 Geophysics

90 Operations research, mathematical programming

91 Game theory, economics, social and behavioral sciences

92 Biology and other natural sciences

93 Systems theory; control

94 Information and communication, circuits

97 Mathematics education