Centre universitaire de Mila
Institut des sciences et de la technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2019/2020

Matière : *Algèbre 4* Durée : 1 h
Responsable : *Y. Halim*

Examen de Rattrapage

Le 02/12/2020

Exercice 1 : (10 pts)

I) Soit f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que

$$\dim ker f = n - 1.$$

II) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$ d'éléments de E^*

$$f_0(P) = \int_0^1 P(x)dx, \quad f_1(P) = \int_0^1 xP(x)dx, \quad f_2(P) = \int_0^1 x^2P(x)dx.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E^*.
2. Déterminer la base antéduale B de $\mathcal{F}$.

Exercice 2 : (10 pts)

I) Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f_\beta : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + \beta x_1y_3 + \beta x_3y_1 \end{array}$$

1. Montrer que f_β est une forme bilinéaire symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associé a f_β.
3. Déterminer la matrice de f_β dans la base $\{\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer suivant les valeurs de β le rang de f_β
5. Déterminer les valeurs de β pour f_β soit non dégénérée.

II) Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$
Montrer que

$$f \; est \; alternee \Leftrightarrow f \; est \; antisymetrique$$

Bon courage