Université Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2022/2023

---

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

# Série de TD N° 1

***Exercice 1 :***

Soit
$$E = \mathbb{R}_2[X] = \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$
On considère :
$$F = \{P \in E : P'(0) = 0\}.$$

1. Justifier que F est un hyperplan de $E$, en déduire sa dimension.
2. Donner tous les supplémentaires de $F$ dans $E$.

***Exercice 2 :***

Déterminer la forme linéaire $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que
$$f(1,1,1) = 0, f(2,0,1) = 1, f(1,2,3) = 4.$$
Donner une base du $ker f$ le noyau de $f$.

***Exercice 3 :***

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :
$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (0,1,1,1), v_3 = (0,0,1,1), v_4 = (0,0,0,1).$$

1. Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la base dual de $B$.

***Exercice 4 :***(Interrogation 2019)

Soit
$$E = \mathbb{R}_2[X] = \left\{ aX^2 + bX + c : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$
Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par
$$\varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = \int_0^1 P(t)dt,\ \varphi_3(P) = \int_0^1 tP(t)dt.$$

1. Montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer sa base antéduale.

***Exercice 5 :***

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ On considère la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$ d'éléments de $E^*$ définis par, pour $j = 0, 1, 2$
$$\forall p \in E \ f_j(P) = P(j).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $E^*$.
2. Déterminer la base antéduale $B$ de $\mathcal{F}$.