1. Formes linéaires, Dualité

1.1 Formes linéaires

Dans la suite, on désigne par E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie ou non.

Définition 1.1.1 Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K.

■ Example 1.1

1. Si $E = \mathscr{C}([0,1],k)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, l'application
$$\begin{array}{rccl} \Psi : & E & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{array}$$
est une forme linéaire sur E.
2. Soit $\mathscr{M}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, l'application
$$\begin{array}{rccl} Tr : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ & M & \longmapsto & Tr(M) \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(K)$.
3. Si E est de dimension n, et $\mathbf{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E, alors les projections relativement a $\mathbf{B}$
$$\begin{array}{rccl} p_j : & E & \longrightarrow & K \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & x_j \end{array}$$
sont des formes linéaires sur E.

■

1.2 Hyperplans

Proposition 1.2.1 Soit f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension n. Alors

$$\dim ker f = n - 1.$$

Démonstration. D'aprés le Théorème du rang on a

$$\dim \ker f + \dim im f = \dim E.$$

Comme f est non nulle, $im f \neq \{0_k\}$ et $im f$ est un sous-espace de K, alors

$$0 < \dim im f \leq \dim K = 1,$$

donc $\dim im f = 1$, par conséquent

$$\dim ker f = n - 1.$$

■

La Proposition (1.2.1) conduit à généraliser la notion d'hyperplan aux espaces vectoriels de dimension finie ou non :

Définition 1.2.1 Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel $H \subset E$ tel qu'il existe une forme linéaire non nulle $f : E \to K$ tel que $H = ker f$.

Si la dimension de E est finie égale à n, on retrouve au moyen de la Proposition (1.2.1) la définition classique d'un hyperplan H de E : H est un sous -espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

■ **Example 1.2**

1. L'ensemble
$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$$
est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, car si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'application définie par
$$f(x,y,z) = x + 2y - z,$$
alors f est une forme linéaire non nulle et $\ker f = H$.
2. L'ensemble
$$H = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$$
est un hyperplan de $C([0,1],\mathbb{R})$, car si $g : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est l'application définie par
$$g(f) = f(0),$$
alors g est une forme linéaire non nulle et $\ker g = H$.

■

Corollaire 1.2.2 Soit H un hyperplan de E. Alors pour toute droite vectorielle D de E non contenue dans H, on a

$$E = H \oplus D.$$

R Par définition, une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

1.3 Dualité

1.3.1 Espace vectoriel dual

Définition 1.3.1 On appelle espace vectoriel dual de E, qu'on note E^*, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E.

$$E^* = \mathscr{L}(E,K).$$

Corollaire 1.3.1 Si E de dimension finie, alors E^* est aussi de dimension finie et on a

$$\dim E = \dim E^*.$$

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors on sait que $\mathscr{L}(E,K)$ est aussi de dimension finie et on a

$$\dim E^* = \dim \mathscr{L}(E,K) = \dim E \times \dim K = \dim E.$$

■

1.3.2 Base duale

Supposons que E de dimension finie et considérons une base quelconque $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E. Définissons la famille $\mathbf{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ d'éléments du dual E^* par les formules

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Notons que, pour tout $1 \leq i \leq n$, la forme e_i^* est la forme linéaire dont le noyau est l'hyperplan engendré par $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$ et telle que $e_i^*(e_i) = 1$.

Théorème 1.3.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors son dual E^* est un espace vectoriel de dimension n, et pour toute base $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E, $\mathbf{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de E^* appelée base dual de $\mathbf{B}$.

Démonstration. Puisque $\dim E^* = Card \mathbf{B}^* = n$, alors il suffit de montrer que $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ est libre. Pour cela, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k$ tels que

$$\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \ldots + \alpha_n e_n^* = 0.$$

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \ldots + \alpha_n e_n^*)(e_j) &= 0, \\ \alpha_1 e_1^*(e_j) + \alpha_2 e_2^*(e_j) + \ldots + \alpha_j e_j^*(e_j) + \ldots + \alpha_n e_n^*(e_j) &= 0, \\ \alpha_j &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, alors $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ forme une base de E^*. ■

■ **Example 1.3** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base

$$B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (0,1)\}$$

Déterminer la base dual de B.

On a $dim(\mathbb{R}^2)^* = dim\mathbb{R}^2 = 2$. Soit $B^* = \{f_1, f_2\}$ la base dual avec

$$\begin{aligned} f_i : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto a_i x + b_i y. \end{aligned}$$

donc

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2. \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} f_1(v_1) = 1 \\ f_1(v_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f_2(v_1) = 0 \\ f_2(v_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, b_2 = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto y - x. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.3 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ sa base dual, alors
i)

$$\forall x \in E, \; x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i,$$

ii)

$$\forall f \in E^*, \; f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*.$$

Démonstration.
i) Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$e_j^*(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_j^*(e_i) = x_j, \; (car \; e_i^*(e_j) = \delta_{ij}),$$

ii) Soit $f \in E^*$ avec $f = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*(e_j) = y_j, \; (car \; e_i^*(e_j) = \delta_{ij}).$$

■

1.3.3 Bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.3.2 Soit E un espace vectoriel sur K, on appelle bidual de E, qu'on note E^{**}, le dual de E^*.

$$E^{**} = (E^*)^* = \mathscr{L}(E^*, K).$$

Proposition 1.3.4 Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie. Alors

L'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\ }: \quad E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \widetilde{x} \end{aligned}$$

définie par : $\forall f \in E^*\ \widetilde{x}(f) = f(x)$ est linéaire bijective.
L'application $\sim$ est appelée **isomorphisme canonique** de E dans E^{**}.

Démonstration.

1. Pour tout $x \in E$, x fixé, l'application
$$\begin{aligned} \widetilde{x}: \quad E^* &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
est linéaire, on a donc $\widetilde{x} \in E^{**}$.
2. Soient $x, y \in E$, $\alpha \in K$ et $f \in E^*$.
$$\widetilde{(x+\alpha y)}(f) = f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y) = \widetilde{x}(f) + \alpha \widetilde{y}(f).$$
Donc $\sim$ est linéaire.
3. Ona $dimE = dimE^* = dimE^{**}$, il suffit donc de montrer que $\sim$ est injective $(Ker(\sim) = \{0_E\})$.
$$\begin{aligned} Ker(\sim) &= \{x \in E : \widetilde{x} = 0_{E^{**}}\} \\ &= \{x \in E : f(x) = 0_{E^{**}}\} \\ &= \{0_E\} \end{aligned}$$
car si $x \neq 0$, on peut considérer une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ avec $e_1 = x$ et on a $e_1^* \in E^*$, $e_1^*(x) = 1 \neq 0$ contradiction (car $\widetilde{x} = 0_{E^{**}} \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x) = 0$).

■