1.5 Exercices

Exercice 1. *1.* *On muni $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. *$\mathbb{R}^2$ muni de la loi interne définie par :*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution dans la page 23

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$.
9. $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.
10. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.
11. $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est bornée }\}$.
12. $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est minorée }\}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Solution dans la page 23

Exercice 3. *On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.*

1. *Montrer que* E, F, G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. *Montrer que* $E = F \oplus G$.

Solution dans la page 25

Exercice 4. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $\{(-1, 5, 0), (0, -1, 1), (1, 2, 3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(2, -1, 3), (1, 0, -3), (3, -2, 9)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $\{(0, 1, 0), (11, -2, -2), (4, -1, -1), (2, 1, 2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(3, 1, 0, -2), (0, -3, 1, 1), (7, 2, -4, 1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
5. $\{1, 2 + X, 1 - X^2\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.
6. $\{-X, 1 + X + X^2, X - X^3\}$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution dans la page 25

Exercice 5. *Soit* $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. *On note* F *l'ensemble des fonctions* f *de* E *telles que*

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

et G *l'ensemble des fonctions constantes sur* $[a, b]$.
Montrer que F *et* G *sont deux sous-espace supplémentaires dans* E.

Solution dans la page 26

Exercice 6. *Soient* F, G *et* H *trois sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que*

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H, \quad \text{et} \quad F \subset G.$$

Prouver que $F = G$.

Solution dans la page 27

Exercice 7. ***1.*** *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *on considère les vecteurs* $u := (1, -1, 1)$ *et* $v := (0, 1, a)$, *où* $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a *pour que* $w := (1, 1, 2) \in Vect(u, v)$.
2. *Même question pour* $u = (3, 1, m), v = (1, 3, 2)$ *et* $w = (1, -1, 4)$.

Solution dans la page 27

Exercice 8. *Soit* $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :*

1. $(x, e^x, \sin x)$;
2. $(e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $((\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Solution dans la page 27

Exercice 9. *Dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*, on considère les fonctions* e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 *et* g *définies par :*

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \cos 2x, \quad e_3(x) = \cos 4x$$

et

$$f_1(x) = \sin^2(x), \quad f_2(x) = \cos^2 2x, \quad g(x) = \cos^2 x.$$

On note $E = Vect(e_1, e_2, e_3)$, $F = Vect(f_1, f_2)$ *et* $G = Vect(g)$.
1. *Montrer que* $F \subset E$ *et* $G \subset E$.
2. *Déterminer les dimensions de* E, F *et* G.
3. *Montrer que* $E \oplus G$.

Solution dans la page 28

Exercice 10. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, on considère les ensembles*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y \text{ et } x = z\}.$$

1. *Montrer que* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Préciser une base et la dimension de* F *et de* G.

Solution dans la page 29

Exercice 11. *Soient*

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$$

et

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1 + X) = P(1 - X)\}.$$

1. *Montrer que* E *et* F *sont des sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer une base et la dimension de* E.
3. *Montrer que* $Vect(X, X^3)$ *est un supplémentaire de* F.

Solution dans la page 30

Exercice 12. *Soient*

$$u = (0, 1, -1, 2), \quad v(1, 3, 0, -2) \quad et \quad w = (2, 1, -3, 4).$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ *et considérons les ensembles*

$$F = \mathrm{Vect}\{u, v, w\} \quad et \quad G = \{(-a, a, 2b, 3a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminer les dimensions de $F, G, F + G$ *et* $F \cap G$*.*

Solution dans la page 31

Exercice 13. *Déterminer la dimension sur* $\mathbb{Q}$ *des* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriels suivants :*

$$F = \mathrm{Vect}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{8}\} \quad et \quad F = \mathrm{Vect}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}.$$

Solution dans la page 32

Exercice 14. *On considère la partie* F *de* $\mathbb{R}^4$ *définie par*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et donné une base de* F*.*
2. *Compléter la base trouvée en une base de* $\mathbb{R}^4$*.*
3. *On pose* $u_1 = (1, 1, 1, 1)$*,* $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ *et* $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$*. La famille* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est-elle libre ?*
4. *On pose* G *l'espace vectoriel engendré par les vecteurs* u_1*,* u_2 *et* u_3*. Quelle est la dimension de* G *?*
5. *Donner une base de* $F \cap G$*. En déduire que* $F + G = \mathbb{R}^4$*.*
6. *Est-ce qu'un vecteur de* $\mathbb{R}^4$ *s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G *?*
7. *Posons* $w_1 := (-1, 1, 1, 1)$ *et* $w_2 := (2, -2, -2, 1)$*. Montrer que* $F = Vect\{v_1, v_2\}$ *et exprimer* $u = (x, y, z, t) \in F$ *comme une combinaison linéaire de* w_1 *et* w_2*.*

Solution dans la page 32

Exercice 15. *Soit* $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid XP' = P(1 + X)\}$*.*
1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*
2. *Donner une base de* E *et en déduire sa dimension.*

3. *Compléter la base trouvée en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution dans la page 25

1.6 Solutions

Solution d'Exercice 1 dans la page 18 :

1. (a) $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ groupe commutatif ?

• Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,$$

alors $\oplus$ est commutative.

• Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (xy) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z,$$

donc $\oplus$ est associative.

• C'est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 \oplus x = 1x = x,$$

d'où 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ $(e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)} = 1)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{x} \oplus x = 1 = e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)}$$

donc tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un élément symétrique pour la loi $\oplus$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$1_{\mathbb{R}} \cdot x = 1 \cdot x = x^1 = x.$$

(c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\alpha \cdot (x \oplus y) = \alpha \cdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha \oplus y^\alpha) = \alpha \cdot x \oplus \alpha \cdot y.$$

(d) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \oplus y^\beta = \alpha \cdot x \oplus \beta \cdot x.$$

(e) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot x^\beta = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

2. $\mathbb{R}^2$ muni avec ces deux lois n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel car, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)^2 x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_1, (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_2)$$

mais

$$\alpha \cdot (x_1, x_2) + \beta \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2)x_1, (\alpha^2 + \beta^2)x_2).$$

Solution d'Exercice 2 dans la page 18 :

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$.
(b) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall X' = (x',y',z') \in E_1$ on a

$$(x+x') + 2(y+y') - (z+z') = (x+2y-z) + (x'+2y'-z') = 0,$$

d'où $X + X' \in E_1$.
(c) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda x + 2\lambda y - \lambda z = \lambda(x+2y-z) = 0.$$

2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin E_2$.
3. E_3 est un sou-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puisque pour tous $(x,y,z,t),(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
(a) $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in E_3$.
(b) $(x,y,z,t)+(x',y',z',t') = (x+x', y+y', z+z, t+t') \in E_3$, car $x+x' = y+y' = z+z' = t+t'$.
(c) $\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \in E_3$, car $\lambda x = \lambda y = \lambda z = \lambda t$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X = (1,0)$ et $Y = (0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X+Y = (1,1)$ n'est pas élément de E_4.
5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5, donc E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
6. Posons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z = 0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
7. Prenons $(5,0,2) \in F \subset F \cup G$ et $(1,1,0) \in G \subset F \cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0) = (6,1,2)$ n'est pas élément de F car $12+3-10 = 5 \neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6-1+2 = 5 \neq 0$. Ainsi, $E_7 = F \cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
8. E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car :
(a) $0_{\mathbb{R}[x]} = 0 \in E_8$.
(b) $\forall P_1, P_2 \in E_8$ on a

$$(P_1+P_2)(0) = P_1(0) + P_2(0) = P_1(2) + P_2(2) = (P_1+P_2)(2),$$

alors $P_1 + P_2 \in E_8$.
(c) $\forall P \in E_8$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P)(0) = \lambda \times P(0) = \lambda \times P(2) = (\lambda P)(2).$$

9. Comme $0_{\mathbb{R}[x]} \notin E_9$, alors E_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
10. En Remarquant que $P_1 = X$ et $P_2 = x^2$ sont des éléments de E_{10}, mais $x + x^2 = P_1 + P_2 \notin E_{10}$ en on déduit que E_{10} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
11. Soit $f, g \in E_{11}$ et soit M_1, M_2 un majorant respectif de $|f|, |g|$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

et
$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leq |\lambda| \times M_1,$$
et comme la fonction nulle est bornée, on obtient que E_{11} est un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
12. Considérons la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors f est minorée (par 0). Mais on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-f(x) = -x^2$. Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas minorée. Donc $f \in E_{12}$ et $-f \notin E_{12}$, d'où E_{12} n'est pas un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
13. C'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{13}$. Soient $f, g \in E_{13}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$(f+g)' + 2(f+g) = f' + 2f + g' + 2g = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha f)' + 2(\alpha f) = \alpha(f' + 2f) = 0,$$
donc E_{13} est un espace vectoriel.
14. Comme $\int_a^b 0 = 0$ alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{14}$. D'autre part, soient $f, g \in E_{14}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0$$
et
$$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \int_a^b \times \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0,$$
par suite E_{14} est un sous-espace vectoriel de .

Solution d'Exercice 3 dans la page 18 :
(1) Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante. Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp. constante). Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution d'Exercice 15 dans la page 21 : 1. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-1, 5, 0) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(1, 2, 3) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, alors
$$\begin{cases} -\alpha + \gamma & = & 0 \\ 5\alpha - \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \beta + 3\gamma & = & 0 \end{cases}$$
d'où il vient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille est libre.
2. La relation $\alpha(2, -1, 3) + \beta(1, 0, -3) + \gamma(3, -2, 9) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

donne le système

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma &= 0 \\ -\alpha-2\gamma &= 0 \\ 3\alpha-3\beta+9\gamma &= 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha &= -2\gamma \\ \beta &= \gamma \end{cases}$$

alors, il n'y a pas que $(0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée. En prenant $\gamma = 1$, on trouve la relation :

$$-2(2,-1,3)+(1,0,-3)+(3,-2,9) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

3. Comme $\mathrm{Card}\{0,1,0),(11,-2,-2),(4,-1,-1),(2,1,2)\} = 4 \geq \dim \mathbb{R}^3$, alors la famille est liée.
4. Soient $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(3,1,0,2)+\beta(0,-3,1,1)+\gamma(7,2,-4,1) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3\alpha+7\gamma &= 0 \\ \alpha-3\beta+2\gamma &= 0 \\ \beta-4\gamma &= 0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma &= 0 \end{cases}$$

par suite $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc la famille est libre.
5. On suppose qu'il existe $\alpha,\beta\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha+\beta(2+X)+\gamma(1-X^2) = 0$, donc on a $\alpha+2\beta+\gamma+\beta X-\gamma X^2 = 0$, par suite on obtient $\alpha=\beta=\gamma=0$. Alors la famille est libre.
6. Soient $\alpha,\beta\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $-\alpha X+\beta(1+X+X^2)+\gamma(X-X^3) = 0$, alors $\beta+(-\alpha+\beta+\gamma)X+\beta X^2-\gamma X^3 = 0$, d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc, la famille est libre.

Solution d'Exercice 5 dans la page 19 :
Soit $f \in E$. Posons

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

Puisque

$$\int_a^b \left[f(t)-\frac{I}{b-a}\right]dt = \int_a^b f(t)dt - \frac{I}{b-a}\int_a^b dt = \int_a^b f(t)dt - I = 0,$$

alors

$$f-\frac{I}{b-a} \in F.$$

Comme la fonction constante $\dfrac{I}{b-a}$ est élément de G on peut écrire :

$$f = \left[f-\frac{I}{b-a}\right]+\frac{I}{b-a},$$

donc $E = F + G$. Soit K une fonction constante sur $[a, b]$, i. e $K \in G$. $K \in F$ si et seulement si

$$0 = \int_a^b K dt = K(b - a),$$

alors $K = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, D'où $F \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

Solution d'Exercice 6 dans la page 19 : Il suffit de prouver que $G \subset F$. Soit $g \in G$. Puisque $0 \in H$, il existe $f \in H$ et $h \in H$ tel que $g = f + h$. On a donc $h = g - f \in G$ et $h \in H$, ainsi $h \in G \cap H = F \cap G$ d'où $h \in F$ puis $g = f + h \in F$. On a donc prouvé que $G \subset F$.

Solution d'Exercice 7 dans la page 19 : 1. $w \in \text{Vect}\{u, v\}$ si et seulement si $w = \alpha u + \beta v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si et seulement si

$$\begin{cases} 1 &= \alpha \\ 1 &= -\alpha + \beta \\ 2 &= \alpha + a\beta \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 2 \\ a &= \dfrac{2-\alpha}{\beta} \end{cases}$$

si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.

2. $w \in \text{Vect}\{u, v\}$ si et seulement si $w = \alpha u + \beta v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si et seulement si

$$\begin{cases} 1 &= 3\alpha + \beta \\ -1 &= \alpha + 3\beta \\ 4 &= a\alpha + 2\beta \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha &= \dfrac{1}{2} \\ \beta &= -\dfrac{1}{2} \\ a &= \dfrac{4-2\beta}{\alpha} \end{cases}$$

si et seulement si $a = 10$.

Solution d'Exercice 8 dans la page 20 : 1) Si on a une relation de liaison du type

$$ax + be^x + c\sin x = 0,$$

alors on met e^x en facteur et on trouve :

$$axe^{-x} + b + c\sin xe^{-x} = 0.$$

On fait tendre x vers ∞ et le membre de gauche tend vers b qui doit donc être nul. On a alors

$$ax + c\sin x = 0.$$

Si $a \neq 0$, le membre de gauche tend vers $\mp\infty$ quand x tend vers $+\infty$. C'est donc que $a = 0$. On en déduit $c = 0$ et la famille est libre.
2) Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_p x})$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison $\lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p} x$. On obtient

$$e^{a_p x}(\lambda_p + \lambda_{p-1} e^{(a_{p-1}-a_p)x} + \cdots + \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p-1} x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots$ et finalement λ_1 sont nuls.
4) Soit $N \geq 1$. Il suffit de prouver que la famille $(x \longmapsto (\sin x)_n)_{1 \leq n \leq N}$ est libre. Considérons des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ tels que

$$\lambda_1 \sin x + \cdots + \lambda_N (\sin x)^N = 0.$$

Divisons par x pour $x \neq 0$, on obtient

$$\lambda_1 \frac{\sin x}{x} + \lambda_2 \frac{\sin^2 x}{x} + \cdots + \lambda_N \frac{\sin^N x}{x} = 0.$$

Faisons tendre x vers 0. Le membre de gauche tend vers λ_1, celui de droite vers 0 et on obtient donc $\lambda_1 = 0$. Il suffit ensuite d'itérer le raisonnement en divisant successivement par $x^2, x^3, \ldots$, ou bien de faire une récurrence en simplifiant par $\sin x$.

Solution d'Exercice 9 dans la page 20 : 1. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

d'où

$$f_1 = \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2}, \quad f_2 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2} \quad \text{et} \quad g = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2},$$

ce qui prouve que $\{f_1, f_2\} \subset E$ et $g \in E$, par suite $F \subset E$ et $G \subset E$.
2. Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \cos 2x + \gamma \cos 4x = 0$. En prenant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{8}$ dans l'équation précédente on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta \frac{\sqrt{2}}{2} & = & 0 \\ \alpha - \gamma & = & 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. D'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une patrie libre de E, étant de plus une partie génératrice de E, elle en est une base et donc, $\dim E = 3$.

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha f_1+\beta f_2 3=0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \sin^2 x+\beta \cos^2 2x=0$. En prenant $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$ dans l'équation précédente on obtient $\beta=0$ et $\alpha=0$ respectivement. $\{f_1, f_2\}$ est donc une famille libre de F, étant de plus une famille génératrice de F, elle en est une base et donc, $\dim F=2$.
$\{g\}$ est une famille génératrice de G, elle est de plus libre car $g \neq 0$, elle est doncune base de G, d'où $\dim G=1$.
3. On a $\{f_1, f_2, g\}$ est une partie génératrice de $F+G$, montrons qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma g=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}: \alpha \sin^2 x+\beta \cos^2 2x+\gamma \cos^2 x=0$. En prenant $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lll}
\beta+\gamma & = & 0 \\
\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\gamma}{2} & = & 0 \\
\alpha+\beta & = & 0
\end{array}\right.$$

i.e

$$\left\{\begin{array}{lll}
\beta & = & -\gamma \\
\alpha & = & -\gamma \\
-2\gamma & = & 0
\end{array}\right.$$

d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. La famille $\{f_1, f_2, g\}$ est donc famille libre de $F+G$, étant de plus une famille génératrice de $F+G$, elle en est une base, donc $\dim(F+G)=3$. D'autre part, puisque $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $F+G \subset E$ et comme $\dim(F+G)=\dim E$, on obtient donc $F+G=E$. De plus, on sait que

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F \cap G),$$

qui donne $\dim(F \cap G)=0$, c'est-à-dire $F \cap G=\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$, ce qui achève de prouver que $E=F \oplus G$.

Solution d'Exercice 10 dans la page 20 : 1. On

$$\begin{aligned}
F & =\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=x+z\} \\
& =\{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\
& =\{x(1,1,0)+z(0,1,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\
& =\operatorname{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\},
\end{aligned}$$

d'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'autre part, puisque

$$\begin{aligned}
G & =\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y \text{ et } x=z\} \\
& =\{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& =\{y(2,1,2) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& =\operatorname{Vect}\{(2,1,2)\},
\end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. D'après le calcul précédent, la famille $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de F, donc il suffit de montrer que la famille est libre. En effet, comme les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnels, alors la famille est libre. Par suite $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$

est une base de F et $\dim F = 2$. D'autre part, le fait que $(2,1,2) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et que $\{(2,1,2)\}$ est une famille génératrice de G, impliquent que $\{(2,1,2)\}$ est une base de G et $\dim G = 1$.

Solution d'Exercice 11 dans la page 20 : 1. C'est clair que $0 \in E$. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et on a

$$(\lambda P + Q)(-1) = \lambda P(-1) + Q(-1) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0.$$

D'où $\lambda P + Q \in E$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
Montrons maintenant que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. En effet, c'est clair que $0 \in F$. D'autre part, pour tous $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P+Q)(X+1) = \lambda P(X+1)+Q(X+1) = \lambda P(1-X)+Q(1-X) = (\lambda P+Q)(1-X),$$

donc $\lambda P + Q \in F$.
2. Soient $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in E$. On a alors

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_0 &= -a_2 \\ a_1 &= - + a_3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} E &= \{-a_2 - a_3 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_2(-1 + X^2) + a_3(-X + X^3) \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{-1 + X^2, -X + X^3\}. \end{aligned}$$

La famille $\{-1 + X^2, -X + X^3\}$ donc est une famille génératrice de E et puisque les polynôme $-1 + X^2$ et $-X + X^3$ ont des degrés différent, alors elle est libre, donc elle est une base de E et $\dim E = 2$.
3. Commençons par la détermination d'une base de F. Soient $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in F$. Puisque

$$\begin{aligned} P(1+X) &= a_0 + a_1(1+X) + a_2(1+2X+X^2) + a_3(1+3X+3X^2+X^3) \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 + a_3 X^3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(1-X) &= a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-2X+X^2) + a_3(1-3X+3X^2-X^3) \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 - a_3 X^3, \end{aligned}$$

alors $P(1-X)P(1+X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -(a_1 + 2a_2 + 3a_3) \\ a_3 = -a_3 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_1 &= -2a_2 \\ a_3 &= 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{a_0 - 2a_2X + a_2X^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a_0 + a_2(-2X + X^2) \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{1, -2X + X^2\}. \end{array}$$

Comme les polynômes 1 et $-2X + X^2$ ont des degrés différents, alors $\{1, -2X + X^2\}$ est une base de F.

Solution d'Exercice 12 dans la page 21 : • $\dim F =?$. Par définition de F, on a $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice de F. Est-elle libre ?
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^4}$. D'où il vient

$$\left\{\begin{array}{lcl} \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 \\ -\alpha - 3\gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 4\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

i. e

$$\left\{\begin{array}{lcl} \beta & = & -2\gamma \\ \alpha & = & -3\gamma \\ \alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

on obtient alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.Par suite $\{u, v, w\}$ est libre. Puisque $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice et libre de F, alors elle est une base de F. Donc $\dim F = 3$.
• $\dim G =?$. On a

$$G = \{a(-1, 1, 0, 3) + b(0, 0, 2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\},$$

d'où, $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une partie génératrice de G et comme $(-1, 1, 0, 3)$ et $(0, 0, 2, 1)$ ne sont proportionnels, alors la famille $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est libre. Puisque $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille génératrice et libre de G, elle est une base de G. Donc $\dim G = 2$.
• $\dim F + G =?$. On sait que $F + G = \mathrm{Vect}\{u, v, w, (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$, mais $F + G \subset \mathbb{R}^4$, donc $\dim F + G \leq 4$, alors $\{u, v, w, (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille liée. Montrons que $\{u, v, w, (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille libre de $F + G$. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(0, 1, -1, 2) + \beta(1, 3, 0, -2) + \gamma(2, 1, -3, 4) + \delta(0, 0, 2, 1) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 \\ -\alpha - 3\gamma + 2\delta & = & 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 4\gamma + \delta & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e

$$\left\{\begin{array}{lcl} \beta & = & -2\gamma \\ \alpha & = & 5\gamma \\ \delta & = & 4\gamma \\ 22\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. $\{u, v, w, (0, 0, 2, 1)\}$ est donc une famille libre de $F + G$, alors $\dim(F + G) = 4$.
• On sait que
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G),$$
d'où
$$\dim(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Solution d'Exercice 13 dans la page 21 : Soit $x \in F$, alors il existe trois rationnels α, β et γ tels que $x = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{8}$. Or $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{8} = \alpha + (\beta + 2\gamma)\sqrt{2}$. Donc $x = r + s\sqrt{2}$, où $r, s \in \mathbb{Q}$, ce qui prouve que $\{1, \sqrt{2}\}$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soient $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $r+s\sqrt{2} = 0$. Si $s \neq 0$, alors $r+s\sqrt{2} = 0$ donne $\sqrt{2} = \frac{-r}{s} \in \mathbb{Q}$, ce contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D'où $s = 0$ et donc aussi $r = 0$, ce qui montre que la famille $\{1, \sqrt{2}\}$ est libre. Par suite, $\dim_{\mathbb{Q}} F = 2$.
Par définition de G, la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ est une famille génératrice de$G$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(r, s, t) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{6} = 0$, alors $t\sqrt{6} = -(r + s\sqrt{2})$, d'où $6t^2 = r^2 + 2s^2 + 2rs\sqrt{2}$. Si $rs \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = \frac{6t^2 - r^2 - 2s^2}{2rs} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D'où $rs = 0$. Donc, nous allons étudier deux cas :
• Si $r = 0$, alors on obtient $s + t\sqrt{3} = 0$. Supposons que $t \neq 0$, donc $\sqrt{3} = -\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible, d'où $t = 0$. Le fait que $r = t = 0$ implique $s = 0$.
• Si $s = 0$, alors on obtient $r + t\sqrt{6} = 0$. Supposons que $r \neq 0$, donc $\sqrt{6} = -\frac{r}{t} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible, d'où $r = 0$. Le fait que $s = r = 0$ implique $t = 0$.
On conclusion, on a montré que
$$((r, s, t) \in \mathbb{Q}^3 \text{ et } r + s\sqrt{2} + t\sqrt{6} = 0) \iff (r = s = t = 0),$$
ce qui montre que la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ est libre. D'où $\dim_{\mathbb{Q}} G = 3$.

Solution d'Exercice 14 dans la page 21 : 1. On a : $F = \mathrm{Vect}\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, donc F est une sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus comme $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ est une famille libre, alors $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ est une base de F.
2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.
3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système
$$\begin{cases} a + b - c & = & 0 \\ a + 2b & = & \\ a + 3b - c & = & 0 \\ a + 4b & = & 0 \end{cases}$$
ce qui donne facilement $a = b = c = d = 0$.

4. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b et c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a+3b-c & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a & = & -3b+c \\ b & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -c \\ b & = & c \\ c & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$.
Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1, 1, 1, 3)$.
D'autre part, d'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G = \mathbb{R}^4$.
6. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$, la somme n'est pas directe.
7.