حل السلسلة 1 (التحليل التوفيقي):.....أ. لمزاودة

المركز الجـــامعي عبد الحفيظ بوالصوف

السنة أولى LMD — السلـــسلة رقم 2

مقياس الإحصاء 2 — 2023/2022

التحليل التوفيقي- Analyse Combinatoire

التمرين 1: أجب على ما يلي:

1) كم عدد الطرق التي يمكن أن يصطف بها 10 أشخاص لأخذ صورة.
2) كم كلمة يمكن تشكيلها من جميع أحرف كلمة: التكنولوجيا، تاجنانت، Bookkeeper .
3) كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول طاولة مستديرة لتناول وجبة الغداء.

التمرين 2: ما هو عدد لوحات السيارات التي يمكن الحصول عليها من استعمال حرفين من الأحرف الهجائية (28 حرف) وثلاثة أرقام إلى يسار الأحرف وذلك باستعمال المبد الأساسي للعد في الحالات التالية:

1) عدم تكرار الحرف والرقم.
2) تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم.
3) تكرار الحرف والرقم.
4) بدون تكرار الحرف وتكرار الرقم بشرط الرقم الأخير يختلف عن 0.

التمرين 3: لتكن لديك المجموعات التالية:

1) $E_1 = \{6,6,1,2,2,2\}$ ، كم عدد سداسي يمكن تشكيله من المجموعة E_1.
2) $E_2 = \{1,2,5,6,9\}$ ، كم عدد فردي ثلاثي يمكن تشكيله من E_2 ؟ (بتكرار وبدون تكرار).
3) كم عددا فرديا أو من مضاعفات 2، مؤلفا من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من E_2 إذا استخدم كل رقم مرة واحدة؟
4) كم عددا مكونا من 5 أرقام مختلفة يمكن تشكيلها من المجموعة: $E_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
5) كم عددا مكونا من 9 أرقام يمكن تشكيله من E_3 مع التكرار وبدون تكرار.
6) كم عددا سداسي يمكن تشكيله من المجموعة: $E_4 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، بحيث نستعمل:

أ- الأرقام مع التكرار. ب- الأرقام متمايزة مثنى مثنى (بدون تكرار). ج- تكون مضاعفة لـ5.

التمرين 4: صندوق يحتوي على 6 كريات بيضاء (B) و4 كريات سوداء (N)، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة.

ما هو عدد طرق سحب: أ- 3 كريات. ب- 3 كريات بيضاء. ج- 1 بيضاء و 2 سوداء.

التمرين 5: التقى 4 أصدقاء فصافح كل منهم الآخر، كم مصافحة تمت بين الأصدقاء؟

التمرين 6: أوجد قيمة n في الحالتين التاليتين:

أ- $A_{n+1}^3 = A_n^4$ ب- $3C_{n+1}^3 = 7C_n^2$

حل التمرين 1:

1) عدد الطرق التي يمكن أن يصطف بها 10 أشخاص لأخذ صورة: ترتيب كل من كل ⇦ تباديل دون تكرار:

$P_n = n!$ ⇨ $P_{10} = 10!$

2) عدد الكلمات يمكن تشكيلها من جميع أحرف كلمة: (التكنولوجيا، تاجنانت،Bookkeeper) هي تباديل مع التكرار تحسب بالعلاقة: $P_n^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

✓ **التكنولوجيا**: عدد الأحرف 11(ا=2، ل=2، و=2) $P_{11}^{2,2,2} = \frac{11!}{2!2!2!} = 4989600.$

✓ **تاجنانت**: عدد الأحرف 7 (ت=2، ا=2، ن=2) $P_7^{2,2,2} = \frac{7!}{2!2!2!} = 630.$

✓ **Bookkeeper**: عدد الأحرف 10 (e=3، o=2، k=2) $P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151,200.$

3) عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول طاولة مستديرة لتناول الغداء حيث يجلسون كما يشاؤون.

الجلوس في شكل دائري يعني ترتيب دائري لـ 6 عناصر، وهنا نحن بصدد تباديل دائرية:

فيجلس أحد الأشخاص في أي مكان ثم نرتب البقية (الـ5 أشخاص) في الأماكن الشاغرة كما يلي:

$P_{(n-1)} = (n-1)!$ ⇨ $P_{(6-1)} = (6-1)! = 5! = 120$

حل التمرين 2:

أ- **استعمال المبدأ الأساسي للعد:**

لوحة السيارة تكون كما يلي:	الحروف	الأرقام
حرف | حرف | رقم | رقم | رقم	n=28 ; P=2	n=10 ; P=3

إذن عدد لوحات السيارات حسب الحالات يكون:

تكرار الحرف والرقم	تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم	عدم تكرار الحرف والرقم
28 | 28 | 10 | 10 | 10	28 | 28 | 8 | 9 | 10	27 | 28 | 8 | 9 | 10
$10^3 \times 28^2 = 784000$	$10.9.8 \times 28^2 = 564480$	$10.9.8 \times 28.27 = 544320$

بدون تكرار الحرف وتكرار الرقم بشرط الرقم الأخير يختلف عن الصفر					
27	28	10	10	9	إذن $9.10.10 \times 28.27 = 680400$ لوحة

ب- يمكن حل هذه الحالات بطريقة 2:

الأحرف	الأرقام
n=28 ; P=2	n=10 ; P=3
جزء من كل	جزء من كل

عدم تكرار الحرف والرقم (بدون تكرار)	الترتيب مهم	ترتيبة	$A_{10}^{3}.A_{28}^{2} = \frac{10!}{(10-3)!} \times \frac{28!}{(28-2)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} \times \frac{28.27.26!}{26!}$ $= 10.9.8 \times 28.27 = 544320$
تكرار الحرف والرقم	الترتيب مهم	قائمة	$card(\Omega)=n^{p}=10^{3}\times 28^{2}$
تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم	الترتيب مهم	قائمة للحرف وترتيبة للرقم	$A_{n}^{p}.n^{p} = A_{10}^{3} \times 28^{2} = \frac{10.9.8.7!}{7!} \times 28^{2} = 564480$

بدون تكرار الحرف وتكرار الرقم بشرط الرقم الأخير يختلف عن الصفر:			
	$9.10^{2}.28^{2}$	$A_{9}^{1}.10^{2}.28^{2}$	$A_{9}^{1}.n_{(n=10)}^{p=2}.n_{(n=28)}^{p=2}$

التمرين 3:

$E_1 = \{6,6,1,2,2,2\}$	n=6 (بها عناصر متشابهة)	تبديلة بتكرار $P_n^{n_1;n_2}$	$P_6^{2;3} = \frac{6!}{2!.3!} = 60$
$E_2 = \{1,2,5,6,9\}$	بتكرار	5 5 3	75 عدد فردي
	بدون تكرار	3 4 3	36 عدد فردي
$E_2 = \{1,2,5,6,9\}$	بدون تكرار (فردي أو مضاعفات 2)	3 4 2	فردي=36، مضاعفات 2=24 إذن 60=24+36 عدد
$E_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	مختلفة= بدون تكرار(n=9)	9 8 7 6 5	15120 عدد خماسي
$E_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	مع التكرار (n=9)	قائمة $n^p = 9^9$	387420489 عدد
	بدون تكرار	تبديلة $P_n = n!$	$9! = 362880$
	بتكرار (n=10)	9.10^5	900000 عدد

$E_4 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	بدون تكرار	9.9.8.7.6.5	136080 عدد
	مضاعف 5	$9.10^4.2$	180000 عدد

التمرين 4:

n=6+4=10 نقوم بسحب 3؛ أي P=3	عملية السحب دفعة واحدة (الترتيب غير مهم)	توفيقة

3 كريات	$C_n^p = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$	$\frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.7!} = 120$
3 كريات بيضاء	$C_{n=6}^p = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$	$\frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3.2} = 20$
1 بيضاء و2 سوداء	$C_6^1.C_4^2 = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{4!}{2!2!}$	$\frac{6!}{1!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = 6 \times 6 = 36$

التمرين 5:

المصافحة تتم بين اثنين والعدد الكلي 4 أي p=2 و n=4	التكرار غير موجود	الترتيب غير مهم	توفيقة
$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	عدد المصافحات التي تمت هي 6 مصافحات.		

التمرين 6:

1.إيجاد قيمة n التي تحقق المساواة:

$$A_{n+1}^3 = A_n^4 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)(n+1-1)(n-1)(n-2)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\Rightarrow (n+1)n(n-1) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\Rightarrow (n+1) = (n-2)(n-3)$$

$$\Rightarrow (n+1) = n^2 - 5n + 6$$

$$\Rightarrow n^2 - 6n + 5 = 0$$

إذن لدينا معادلة من الدرجة 2 نحسب المميز ونحسب الجدرين فنحصل على:

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = 5$$

2. إيجاد قيمة n التي تحقق المعادلة $3C_{n+1}^3 = 7C_n^2$

$$3C_{n+1}^3 = 3\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!} = 3\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{3.2.(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{2} ....(1)$$

$$7C_n^2 = 7\frac{n!}{2!.(n-2)!} = 7\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!.(n-2)!} = 7\frac{n(n-1)}{2} ....(2)$$

$$(1=2) \Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{2} = 7\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow n+1 = 7 \Rightarrow n = 6$$