Analyse combinatoire

تمهيد: نستعمل التحليل التوفيقي أو العد من أجل معرفة عدد الإمكانيات الكلية لأي تجربة عشوائية $(n_{(s)})$ أو $card(\Omega)$ هذه الأخيرة تسمح لنا بحساب احتمال أي حدث عشوائي.

1. المبدأ الأساسي للتحليل التوفيقي

إذا كان هناك إجراء معين يتم بـ(n_1) طريقة وإجراء ثاني يتم بـ (n_2) وإجراء من الرتبة (k) يتم بـ (n_k) طريقة، فإن هذه الإجراءات يتم تحقيقها معا بـ $(n_1 \times n_2 \times ....n_k)$؛ أي $\prod_{i=1}^{k} n_i$ طريقة.

مثال1: كم عدد مكون من ثلاث أرقام يمكن تشكيله من المجموعة التالية: $E = \{1,4,6,7,5\}$ في حالة التكرار، وفي حالة عدم التكرار.

الحل: لدينا المجموعة E مكونة من 5 أرقام .

حالة التكرار

آحاد	عشرات	آلاف
5	5	5

إذن هذا الاجراء يتم بـ$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ طريقة

وبالتالي يمكن تشكيل 125 عدد.

حالة عدم التكرار

آحاد	عشرات	آلاف
5	4	3

إذن هذا الاجراء يتم بـ$5 \times 4 \times 3 = 60$ طريقة

وبالتالي يمكن تشكيل 60 عدد

مثال2: يقدم مطعم 3 أصناف من اللحم وصنفين من الحساء و4 أصناف من التحلية. ما هو عدد الوجبات التي يستطيع هذا المطعم تقديمها بحيث كل وجبة تحتوي على لحم وحساء وتحلية.

الحل: لدينا 3 طرق لتقديم اللحم، و2 طريقة لتقديم الحساء و4 طرق لتقديم التحلية. إذن حسب المبدأ الأساسي للعدد فإن عدد الوجبات التي بإمكان هذا المطعم تقديمها للزبائن هي: $(3 \times 2 \times 4 = 24)$ وجبة.

ملاحظة هامة: من أجل فهم التحليل التوفيقي لابد من فهم خصائص التجربة العشوائية، هذه الأخيرة تتميز بثلاثة خصائص أساسية:

- ✓ عناصر التجربة أو المجموعة وهنا لابد من التمييز بين:
  - عدد عناصر المجموعة E التي نختار منها (n).
  - عدد العناصر المسحوبة أو المشكلة (P).
- ✓ أهمية الترتيب وهنا نميز بين حالتين:
  - الترتيب مهم؛ أي $(AB \neq BA)$.
  - الترتيب غير مهم؛ أي $(AB = BA)$.

✓ نوعية السحب، وهنا نميز بين حالتين:

- السحب مع الارجاع؛ أي مع التكرار.
- السحب بدون إرجاع؛ أي بدون تكرار.

2.القائمة: نسمي قائمة ذات P عنصر مأخوذة من n عنصر كل تشكيلة **مرتبة وبتكرار** ذات p عنصر.

عدد القوائم ذات p عنصر مأخوذة من المجموعة E ذات n عنصر هو n^p ؛ أي $card(\Omega)=n^P$

مثال 1: كم رقم سري مكون من 4 أرقام يمكن تشكيله لفتح هاتف نقالك.

n =10 / p=4	الترتيب مهم (أرقام)	التكرار ممكن

إذن الترتيب مهم والتكرار موجود وبالتالي نحن أمام قائمة: $card(\Omega)=n^P=10^4=10000$

أي يمكن تشكيل 10000 رقم سري.

مثال 2: لوحة تحكم بها 9 أزرار تسمح لنا بتشكيل رقم سري للولوج لقاعدة بيانات حكومية. كم رقم سري يتكون من حرفين وثلاثة أرقام يمكن تشكيله.

1	2	3
4	5	6
X	Z	Y

الحل: هناك إجراء خاص بالأرقام وإجراء خاص بالحروف.

الأرقام

n =6 / p =3	الترتيب مهم	التكرار موجود

$card(\Omega)=n^P=6^3=216$

الحروف

n =3 / p=2	الترتيب مهم	التكرار موجود

$card(\Omega)=n^P=3^2=9$

إذن حسب المبدأ الأساسي للعد فإنه يمكن تشكيل ($216\times 9=1944$) رقم سري.

3.الترتيبات (Arrangements): نسمي ترتيبة ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر كل تشكيلة **مرتبة وبدون تكرار** ذات p عنصر. يرمز لها بالرمز A_n^p ، حيث عدد الترتيبات تحسب كما يلي:

$$card(\Omega)=A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

تنبيه: من أجل القيام بالحسابات الخاصة بالترتيبات نستعمل قواعد الحساب التالية:

$$n!=n.(n-1).(n-2).......3.2.1$$
$$n!=n.(n-1)!$$
$$1!=1$$
$$0!=1$$

مثال1 : كم كلمة يمكن تشكيلها مكون من حرفين مختلفين من المجموعة E: $E=\{A,B,C\}$

$$\{AB,AC,BA,BC,CA,CB\}\rightarrow N=6$$

إذن هناك 6 كلمات مشكلة من حرفين مختلفين ومرتبة.

مثال 2: كم رقم سري مكون من 4 أرقام مختلفة يمكن تشكيله لفتح هاتف نقالك.

n =10 / p=4	الترتيب مهم (أرقام)	التكرار غير مسموح

إذن الترتيب مهم وبدون تكرار موجود وبالتالي نحن أمام ترتيبة:

$$card(\Omega)=A_{10}^{4}=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=5040$$

ومنه يمكن تشكيل 5040 رقم سري.

مثال 3: قسم به 35 طالب نريد تشكيل لجنة مكونة من 3 طلبة بحيث الأول يكون رئيس القسم، الثاني النائب الأول والثالث يكون النائب الثاني. بكم طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة.

الحل:

n =35 / p=3	الترتيب مهم (أرقام)	بدون تكرار

$$card(\Omega)=A_{35}^{3}=\frac{35!}{(35-3)!}=\frac{35!}{32!}=39270$$

4.التبديلات(Permutations): نسمي تبديلة ذات n عنصر كل تشكيلة **مرتبة بدون تكرار** لـــ n عنصر؛ أي هي طريقة لترتيب جنبا لجنب n عنصر. يرمز للتبديلة بـ P_n حيث:

$$P_n=n!=n(n-1)(n-2).......3.2.1$$

وهي تمثل عدد التباديل الممكن الحصول عليها من n عنصر.

ملاحظة هامة: طبعا نلاحظ أن التبديلة هي حالة خاصة من التراتيب، حيث نقوم بترتيب وبدون تكرار جميع العناصر n.على هذا الأساس فتبديلة المجموعة E ذات n عنصر هي كل ترتيبة ذات n عنصر.

$$Si\rightarrow n=p\rightarrow Alors$$

$$card(\Omega)=A_{n}^{n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

مثال 1: ما هو عدد تباديل المجموعة: $E=\{A,B,C\}$

التبديلات هي كل المجموعات الجزئية المرتبة الممكن تشكيلها بعناصر المجموعة E؛ أي هي:

$$\{ABC, ACB, BAC, BCA, CBA, CAB\} \rightarrow N=6$$

بوجه عام يمكن ترتيب n من العناصر بطرق عددها: $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$

مثال2: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة "تقوى".

الحل: هناك 4 حروف مختلفة عن بعضها البعض، وحسب تعريف التباديل يمكن الحصول على 24 كلمة:

$$P_4=4!=4\times3\times2\times1=24$$

ملاحظة هامة: غالبا ما نريد معرفة عدد التشكيلات لعدد من العناصر بعضها متشابه؛ أي عدد التبديلات لـ n عنصر، هذا الأخير عبارة عن n_1 عنصر متشابه زائد n_2 عنصرا متشابها زائد.......n_k عنصرا متشابها. بمعنى أن:

$n=n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k$، هنا لا يمكن تطبيق التبديلة العادية بل يتم تطبيق التبديلة التالية:

$$Si \rightarrow n=n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k \rightarrow Donc$$
$$card(\Omega)=P_n=\frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots..n_k!}$$

مثال 3: كم كلمة ليست بالضرورة لها معنى يمكن تشكيلها بحيث تحتوي على جميع أحرف كلمة "Economie"

التكرار غير ممكن	الترتيب مهم	n =8 /p=8=n

طبعا هذه خصائص التبديلة، لكن عند ملاحظة عناصر كلمة (Economie) نجد أنها تحتوي على بعض العناصر المتشابهة. وبالتالي لا يمكن تطبيق التبديلة العادية.

$$n=8=1_c+1_n+1_m+1_i+2_o+2_e$$
$$card(\Omega)=P_8=\frac{8!}{1!.1!.1!.1!.2!.2!}=\frac{8!}{4}=10080$$

إذن هناك 10080 كلمة يمكن تشكيلها باستعمال أحرف كلمة (Economie)، طبعا قد لا يكون للكلمة أي معنى.

5.التوفيقات (Combinaisons):

1.5 التوفيقة بدون تكرار: نسمي توفيقة ذات P عنصر مأخوذة من n عنصر كل تشكيلة **غير مرتبة وبدون تكرار** ذات P عنصر، ويرمز لها بالرمز C_n^p بحيث :

$$Card(\Omega) = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

2.5 التوفيقة مع التكرار: نسمي توفيقة ذات P عنصر مأخوذة من n عنصر كل تشكيلة **غير مرتبة مع التكرار** ذات P عنصر.

$$Card(\Omega) = C_{n+p-1}^p$$

خواص:

$$C_n^1 = n$$
$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

مثال 1: لدينا المجموعة: $E = \{A, B, C\}$ ، التوفيقات ذات 2 عنصر هي:

$$\{AB, AC, BC\} \rightarrow N = 3$$

إذن هناك 3 توفيقات يمكن تشكيلها من المجموعة E بدون تكرار.

$$Card(\Omega) = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \rightarrow \frac{A_n^p}{p!} = \frac{6}{2!} = 3$$

ملاحظة: لو طلب منك إيجاد عدد التوفيقات مع التكرار، فإنها تصبح كما يلي:

$$\{AB, AC, BC, AA, BB, CC\} \rightarrow N = 6$$

$$Card(\Omega) = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2.1}{4} = 6$$

مثال 2: نريد تشكيل فريق لكرة القدم في الصالة مكون من 6 أشخاص للعب البطولة الوطنية بين الجامعات، عملية الاختيار تكون من بين 4 أساتذة و8 طلبة. أوجد كم فريق يمكن تشكيله بحيث:

- ✓ الفريق كله مكون من الطلبة.
- ✓ 50% طلبة.

الحل: طبعا عملية الاختيار بدون تكرار والترتيب غير مهم فهي توفيقة.

الفريق كله مكون من الطلبة		50% طلبة	
n=8 /p=6	n =4 /p=0	n=8 /p=3	n =4 /p=3
$Card(\Omega)=C_8^6\times C_4^0=\frac{8!}{6!(8-6)!}\times 1=28$		$Card(\Omega)=C_8^3\times C_4^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}\times\frac{4!}{3!(4-3)!}=56\times 4=224$	
هناك 28 فريق		هناك 224 فريق	

6.أنواع السحب: ليكن لدينا n كرة في صندوق ونقوم بسحب P كرة. هنا نميز بين نوعين للسحب.

أ.**السحب مع الارجاع**: تتم عملية السحب مع الارجاع إذا قمنا بـ P عملية سحب في كل مرة نسحب كرة واحدة نرجعها للصندوق قبل القيام بعملية السحب الموالية.

- ✓ في هذه الحالة عدد طرق السحب تشكل قائمة؛ أي $Card(\Omega)=n^P$.

ب.**السحب بدون إرجاع**: يتم السحب هنا بدون إرجاع الكرة التي تم سحبها وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ يمكن أن يتم السحب مع مراعاة الترتيب وهنا نكون أمام الترتيبة؛ أي عدد الطرق هو: $Card(\Omega)=A_n^P$.
- ✓ يمكن أن يتم السحب دون مراعاة الترتيب وهنا نكون أمام توفيقة؛ أي عدد الطرق هو: $Card(\Omega)=C_n^P$.

ملاحظات هامة: هناك بعض العبارات تستعمل عند عملية السحب تساعد في تحديد عدد طرق السحب:

- ✓ عبارة في آن واحد تلغي أهمية الترتيب وبالتالي نكون أمم توفيقة.
- ✓ عدم تحديد وظيفة الأشخاص المسحوبين يلغي أهمية الترتيب وبالتالي نستعمل التوفيقة.
- ✓ عبارة على التوالي تجعل من الترتيب مهم وبالتالي نكون أمام ترتيبة.
- ✓ تحديد وظيفة الأشخاص الذين تم سحبهم يجعل من الترتيب مهم وبالتالي نستعمل الترتيبة.