إسم و لقب الطالب

المحور الأول

المعادلات التفاضلية

المحاضرة : 02

ب - المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

ملاحظة:

حفاظا على السير الحسن لحصة الأعمال الموجهة ، و قصد الإستفادة من وقتها الممنوح و زيادة الإستيعاب ، فإنه يتوجب على كل طالب إحترام خصوصية المادة و بصرامة ، و ذالك بالإلتزام بما يلي:

1- إحظار مطبوعة الدرس الخاص بالسلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو الدرس مكتوب باليد
2- إحظار مطبوعة السلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو السلسلة مكتوبة باليد
3- تدوين الحلول المكتوبة على الصبورة من طرف الطالب إجباري و يتولى الأستاذ التحقق من ذالك
4- يمنع إستخراج مطبوعة حلول السلسلة إلا بإذن من الأستاذ
5- يمنع إستعمال الهاتف للأغراض السابقة
6- على أستاذ الأعمال الموجهة طرد كل طالب لا يلتزم بإحدى التعليمات السابقة

ب 1- تعاريف

1_ نسمي **معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية** كل عبارة تربط بين دالة y و مشتقتها الأولى y' و المشتقة الثانية y'' و المتغير x

مثال: $\mathrm{Ln}y'' + x(y')^2 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

2_ تعريف

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية أنها **خطية بمعاملات ثابتة** إذا أمكن كتابتها على الشكل

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x) \dots\dots (E)}$$

حيث a و b هما عددين حقيقيين ثابتين من $\mathbb{R}$

- إذا كانت $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ، (E) تصبح المعادلة $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$ و نسميها عندئذ **بالمتجانسة** أو بدون طرف ثاني
- إذا كانت $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$ ، (E) نسميها عندئذ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية **بطرف ثاني**

مثال:

$y' + 3\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية متجانسة و بمعاملات ثابتة

$y' + 3\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}y = (1 + x^2)e^x$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بطرف ثاني و بمعاملات ثابتة

ب 2- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثاب

i) حل المعادلة المتجانسة (بدون طرف ثاني)

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0 \dots\dots (E_0)}$$

- نسمي العبارة

$$r^2 + ar + b$$

بكثير الحدود المميز لـ (E_0)

- قضية :

- إذا كان كثير الحدود المميز لـ (E_0) يقبل جذرين حقيقيين **مختلفين** $\boldsymbol{r_1}$ ، $\boldsymbol{r_2}$ فإن حلول المعادلة (E_0) تكون على الشكل :

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \quad ; \ y_1 = e^{r_1x} \ , \ y_2 = e^{r_2x} \quad C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}} \quad ; \ C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}$$

- إذا كان كثير الحدود المميز لـ (E_0) يقبل جذر **مضاعف** $\boldsymbol{r}$ فإن حلول المعادلة (E_0) تكون على الشكل :

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \quad ; \ y_1 = e^{rx} \ , \ y_2 = xe^{rx} \quad C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}} \quad ; \ C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}$$

ii) حل المعادلة بطرف ثاني

لإيجاد حلول المعادلة $(\boldsymbol{E})$ نستعمل طريقة تغيير الثابتين : $C_1 = C_1(x) \ , \ C_2 = C_2(x)$ و نبحث عن عبارتيهما بدلالة المتغير x حيث مشتقاتيهما يحققان الشرط الإضافي:

$$\boldsymbol{C'_1}y_1 + \boldsymbol{C'_2}y_2 = \boldsymbol{0 \dots\dots (a)}$$

بالتعويض في المعادلة (E) نحصل على

$$\boldsymbol{C'_1}y'_1 + \boldsymbol{C'_2}y'_2 = \boldsymbol{f(x) \dots\dots (b)}$$

و ترجع المسألة إذن إلى إيجاد الدالتين $C_1(x) \ , \ C_2(x)$ اللتين تحققان مشتقتيهما جملة المعادلتين

$$\begin{cases} \boldsymbol{C'_1}y_1 + \boldsymbol{C'_2}y_2 = \boldsymbol{0 \dots\dots. (a)} \\ \boldsymbol{C'_1}y'_1 + \boldsymbol{C'_2}y'_2 = \boldsymbol{f(x) \dots\dots (b)} \end{cases}$$

مثال : أوجد حلول المعادلة التفاضليتين:

$$1) \quad y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{2x} \dots\dots. (E)$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة معادلتها المتجانسة

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

كثير الحدود المميز $r^2 - 3r + 2$ يقبل جذرين مختلفين $r_1 = 1$ ، $r_2 = 2$

إذن حلول المعادلة المتجانسة هي

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad ; \; y_1 = e^x \; , \; y_2 = e^{2x} \quad C_1 \; , \; C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad ; \; C_1 \; , \; C_2 \in \mathbb{R}$$

لإيجاد حلول المعادلة $(\boldsymbol{E})$ نستعمل طريقة تغيير الثابتين : $C_1 = C_1(x) \; , \; C_2 = C_2(x)$ حيث المشتقتين C'_1 و C'_2 يحققان جملة المعادلتين (a) و (b) ، إذن

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{2x} = 0 \ldots \ldots (a) \\ C'_1 e^x + 2C'_2 e^{2x} = (x+1)e^{2x} \ldots \ldots (b) \end{cases}$$

$$(b)-(a) \Rightarrow C'_2 e^{2x} = (x+1)e^{2x} \Rightarrow C'_2 = (x+1)$$

$$\Rightarrow \; C_2(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + K_2 \; , \; K_2 \in \mathbb{R}$$

إيجاد $C_1(x)$: من المعادلة (a) ينتج

$$C'_1 = -C'_2 e^x = (x+1)e^x$$

إذن

$$C_1(x) = \int (x+1)e^x dx = e^x + \int x e^x dx$$

$$= \; e^x + x e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x e^x + K_1 \; , \; K_1 \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة (E) هو

$$y(x) = (x e^x + K_1)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + K_2\right)e^{2x}$$

$$\Rightarrow \; y(x) = K_1 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + K_2\right)e^{2x} \quad , \; K_1 \; , K_2 \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2} \ldots \ldots (E')$$

معادلتها المتجانسة $y'' - 2y' + y = 0$ بمميز يقبل جذر مضاعف $r = 1$ ؛ $y_1(x) = e^x$ ، $y_2(x) = x e^x$

و الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

باستعمال طريقة تغيير الثابت

$$\begin{cases} \boldsymbol{C'_1} y_1 + \boldsymbol{C'_2} y_2 = \boldsymbol{0} \ldots \ldots (\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{C'_1} y'_1 + \boldsymbol{C'_2} y'_2 = \frac{e^x}{x^2} \ldots \ldots (\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

ينتج :

$$\begin{cases} C'_1e^x + C'_2xe^x = 0 \ldots\ldots(a) \\ C'_1e^x + C'_2(1+x)e^x = \dfrac{e^x}{x^2} \ldots\ldots(b) \end{cases}$$

$$(b)-(a) \Rightarrow C'_2e^x = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow C'_2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{x} + K_2 \ , \ K_2 \in \mathbb{R}$$

من المعادلة (a) ينتج

$$C'_1 = -xC'_2 = -\frac{1}{x} \Rightarrow C_1(x) = -Ln|x| + K_1 \ , \ K_1 \in \mathbb{R}$$

في الأخير حلول المعادلة (E') هي الدوال التي تكتب على الشكل

$$y(x) = (K_1 - Ln|x|)e^x + \left(-\frac{1}{x} + K_2\right)xe^{2x} \quad , \quad K_1 \ , K_2 \in \mathbb{R}$$

ملاحظة : المعادلات التي تملك كثير حدود لا يقبل جذور حقيقية خارج المقرر الدراسي