# Algèbre 2

# Table des matières

# Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année licence, semestre 2. Il expose un cours d'algèbre linéaire illustré par des exercices corrigés de difficultés variables. Pour une bonne compréhension de ce cours les étudiants sont invités à réviser les notions déjà étudiées, aux premier semestre, sur les ensembles, les structures algébriques et les polynômes.

Les espaces vectoriels se présentent comme le sujet le plus important en algèbre linéaire. Ils apparaissent dans plusieurs domaines des mathématiques.

Maîtriser les principes de ce chapitre permet de :

**1** Identifier un espace vectoriel.

**2** Définir un sous-espace engendré par des vecteurs.

**3** Déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant.

**4** Obtenir une base pour un espace vectoriel.

**5** Définir la dimension d'un espace vectoriel.

**5** Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels.

# Chapitre 1

# Espaces vectoriels

## 1.1 Généralités sur les espaces vectoriels

### 1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

**Définition 1.1.1.** *(Espace vectoriel)*
*Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble $E$ muni de deux lois de compositions :*

- *Une loi de composition interne notée $+$,*
- *Une loi de composition externe notée $\cdot$,*

*et s'il vérifie les propriétés suivantes :*
**(i)** $(E,+)$ *est un groupe commutatif,*
**(ii)** $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x,$
**(iii)** $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(x,y)\in E^2, \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y,$
**(iv)** $\forall x\in E, 1_{\mathbb{K}}\cdot x=x,$
**(v)** $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x),$
*avec $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.*

**Remarques 1.1.1.** **1.** *Les éléments de $E$ sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.*
**2.** *L'élément neutre du groupe $(E,+)$ est noté $0_E$ ou le vecteur nul de $E$.*
**3.** *On peut multiplier un vecteur par un scalaire mais pas deux vecteurs entre eux.*
**4.** *Un espace vectoriel contient toujours au moins le vecteur nul, il ne peut être vide.*

#### 1.1.1.1 Propriétés élémentaires d'un espace vectoriel

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
**1.** $\forall x, y$ et $z\in E,\quad x+y=x+z$ alors $y=z$.
**2.** $\forall x\in E,\quad 0_{\mathbb{K}}\cdot x=0_E$.
**3.** $\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda\cdot 0_E=0_E$.
**4.** $\forall x,y\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$
**5.** $\forall x\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda x=0_E\Rightarrow\lambda=0$ ou $x=0_E$.

**Démonstration .** **1.** *On ajoute $-x$ (la symétrie) à l'égalité, on obtient*

$$(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z),$$

*par l'associativité, on obtient* $((-x) + x) + (y) = ((-x) + x) + (z)$,
*mais,* $((-x) + x) = 0_E$ *alors,* $0_E + y = 0_E + z$,
*d'après l'axiome de l'élément neutre,* $y = z$.

**2.** *On a,* $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *alors,* $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}x$,
*par la distributivité,* $0_{\mathbb{K}}x + 0_{\mathbb{K}}x = 0_{\mathbb{K}}x = 0_{\mathbb{K}}x + 0_E$,
*par la première propriété,* $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

**3.** *La même preuve que la deuxième propriété.*

**4.** *Dans la suite de la preuve, et pour chaque étape, on utilise l'une des axiomes,*
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda(x + ((-y) + y)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda(x + 0_E)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y - \lambda y = \lambda(x + 0_E) - \lambda y$, *(on ajoute la symétrie* $-\lambda y$*)*
$\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

**5.** *Prouver* $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$, *revient à montrer* $\lambda x = 0_E$ *et* $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0$,
$(\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}0$, *(l'inverse)*
$1x = 0_E$, *(l'élément neutre)*
$x = 0_E$.

**Exemple 1.1.1.** *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps et* $n$ *un entier positif.*

1. *Tout sous-corps de* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
2. *Soit l'ensemble des polynômes* $\mathbb{K}[X]$ *tels que,* $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ *et* $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$. *On pose*

$$P + Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)X^n,$$

$$\lambda \cdot P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n,$$

*alors* $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

3. *$A$ un ensemble quelconque. Notons* $\mathbb{K}^A$ *ou* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ *l'ensemble de toute les applications* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. *Pour* $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on pose*

$$\begin{array}{rccc} f + g : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (f + g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f: & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$

*Le triplet* $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

**4.** *Soit* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble de toutes les suites d'éléments de* $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *muni par la loi interne* $+$ *et la loi externe* $\cdot$ *définies par :*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & (u_n + v_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & (\lambda, (u_n)) & \longmapsto & (\lambda u_n). \end{array}$$

*est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

**Proposition 1.1.1.** *Soit* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Alors le produit cartésien* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ *muni de l'addition,*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

*et de la multiplication externe,*

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),$$

*est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

### 1.1.2 Combinaisons linéaires

La combinaison linéaire c'est l'opération fondamentale effectuée sur des vecteurs de $E$.

**Définition 1.1.2.** *$E$ un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une famille de $n$ vecteurs de $E$ et* $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont des scalaires. On dit que le vecteur*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

*est une combinaisons linéaire de la famille* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Le vecteur $v$ est construit à partir des scalaires par la loi externe et des vecteurs par la loi interne. Autrement dit, le sous-espace vectoriel $\mathbb{L}$ n'est autre que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(v)_{v \in \mathbb{L}}$.

**Exemple 1.1.2.** *On a l'égalité suivante,*

$$-4 - X - 10X^2 = -3(2 + X^2) + \frac{1}{2}(4 - 2X - 8X^2),$$

*alors, le vecteur* $3 - 2X - 5X^2$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* $2 + X^2$ *et* $4 - 2X - 8X^2$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

### 1.2.1 Définition et propriétés

**Définition 1.2.1.** *(Sous-espace vectoriel)*
*Soient* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $F$ *une partie de* $E$ *est dite un sous-espace vectoriel de* $E$*, si*

***(i)*** $F$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$ *;*

***(ii)*** $F$ *est stable par multiplication par un scalaire i.e* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \lambda \cdot x \in F$.

Dans la pratique, on utilise la caractérisation suivante pour montrer qu'une partie non vide $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Théorème 1.2.1.** *(Caractérisation des sous-espaces vectoriels)*
*Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $F \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$ *si et seulement si :*

***1.*** $0_E \in F$ *;*

***2.*** $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda x + y \in F$.

**Exemple 1.2.1.** ***1.*** $\{0_E\}$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $E$*. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de* $E$.

***2.*** $E$ *est lui même un sous-espace vectoriel de* $E$*. C'est le plus grand sous-espace vectoriel de* $E$.

***3.*** *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*, soit*

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

*Le fait que* $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$ *implique* $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$*. Pour* $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

*et*

$$2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

*donc* $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$. *D'où* $F$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

**4.** $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ *est sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$, *car* $\deg 0 = -\infty \leq n$ *et pour tous* $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n.$$

**5.** *L'ensemble* $F = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \right\}$ *est sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *En effet, c'est clair que* $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ *et pour tous* $f, g \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\frac{d^2(\lambda f + g)}{dx^2} + (\lambda f + g) = \lambda \left( \frac{d^2 f}{dx^2} + f \right) + \frac{d^2 g}{dx^2} + g = 0.$$

**6.** $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x + y^3 = 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *car n'est pas stable par multiplication par un scalaire, en effet* $(1, 0) \in F$ *mais* $(2, 0) \notin F$.

**Théorème 1.2.2.** *(Stabilité par combinaison linéaire)*
*Soient* $F$ *un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $E$ *et* $\{f_i\}_{i \in I} \in F^I$. *Alors toute combinaison linéaire de* $\{f_i\}_{i \in I}$ *appartient à* $F$.

### 1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

**Théorème 1.2.3.** *(Intersection de sous-espaces vectoriels - réunion de sous-espaces vectoriels)*

1. *L'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*
2. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

**Exemple 1.2.2.** **1.** *Considérons le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^4$ :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}.$$

*On a*

$$F = F_1 \cap F_2$$

*où*

$$F_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0\} \text{ et } F_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}.$$

*Puisque* $F_1$ *et* $F_2$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$, *alors* $F$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

**2.** *Soit*

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0 \text{ ou } P(1) = 0\}.$$

*On a*

$$G = G_1 \cup G_2$$

*où*

$$G_1 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \text{ et } G_2 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}.$$

*On a* $X \in G_1$ *et* $X - 1 \in G_2$*, mais* $X \notin G_2$ *et* $X - 1 \notin G_1$*, donc* $G_1 \not\subset G_2$ *et* $G_2 \not\subset G_1$*. Alors,* $G$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$.

**Définition 1.2.2.** *(Somme de sous-espaces vectoriels)*
*Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* $F$ *et* $G$ *deux sous-espaces vectoriels de* $E$*. On appelle somme de* $F$ *et* $G$*, notée* $F + G$*, l'ensemble*

$$F + G := \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

**Remarque 1.2.1.** *Si* $F, G$ *et* $H$ *trois sous-espaces vectoriels de* $E$*, on a alors*

1. $F + G = G + F, \quad F + (G + H) = (F + G) + H, \quad F + \{0_E\} = F, \quad F + E = F, \quad F + F = F.$
2. *Si* $H = F + G$*, l'écriture* $F = H - G$ *n'a pas de sens.*
3. *Si* $F + G = F + H$*, on ne conclut pas hâtivement que* $G = H$.

**Théorème 1.2.4.** *La somme* $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$*. De plus* $F + G$ *contient* $F$ *et* $G$ *et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant* $F$ *et* $G$.

**Remarque 1.2.2.** $F + G$ *se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de* $E$ *contenant l'ensemble* $F \cup G$.
*On peut généraliser la proposition précédente à la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.*

**Théorème 1.2.5.** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* $F_1, \ldots, F_n$ $n$ *sous espaces vectoriels de* $E$*. Alors, la somme*

$$F_1 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \; : \; (u_1, \cdots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

*est un sous-espace vectoriel de* $E$ *contenant* $F_1, \ldots, F_n$.

**Remarque 1.2.3.** $F_1 + \cdots + F_n$ *se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de* $E$ *contenant l'ensemble* $\cup_{i=1}^{n} F_i$.

**Définition 1.2.3.** *(Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)*
*On dit que deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ sont en somme directe si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*

**1.** *pour tout $w \in F + G$, il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$;*

**2.** *$F \cap G = \{0_E\}$.*

*Dans ce cas, la somme $F + G$ se note $F \oplus G$.*

**Exemple 1.2.3.** *Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ :*

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad et \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\}$$

*sont en somme directe, puisque si $(a, a, a) \in G$, alors $a = a - 2a$, d'où $a = 0$, par suite $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.*

**Définition 1.2.4.** *(Sous-espace vectoriels supplémentaires)*
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F$ est supplémentaire à $G$ dans $E$ si et seulement si*

$$E = F + G \quad et \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

**Exemple 1.2.4.** *Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux espaces vectoriels :*

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\} \quad et \quad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}.$$

*On a $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. En effet, pour toute $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}.$$

*Puisque $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. De plus, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) = -f(x),$$

*donc*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0,$$

*d'où $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$.*

**Théorème 1.2.6.** *(Existence des espaces vectoriels supplémentaires)*
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de $E$ admet au mois un sous-espace vectoriel supplémentaire.*

### 1.2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

**Définition 1.2.5.** *(Sous-espace vectoriel engendré par une partie)*
*Soit $A$ une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par $A$ l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant $A$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant $A$. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.*

**Exemple 1.2.5.**
1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, *car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$.*
2. $\mathrm{Vect}(E) = E$, *car $\mathrm{Vect}(E)$ est un sous-espace vectoriel contenant $E$ et $E$ est le plus grand sous-espace vectoriel de $E$.*

**Théorème 1.2.7.** *Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$.*

**Définition 1.2.6.** *(Sous-espace vectoriel engendré par une famille)*
*Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i, i \in I\}$. Dans ce cas, on note ce sous-espace vectoriel par $\mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$. Cet ensemble est alors l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$.*

**Exemple 1.2.6.**
1. *Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $A := \{(-2,0,1),(3,1,1)\}$ est*

$$\mathrm{Vect}(A) = \{a(-2,0,1) + b(3,1,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(-2a+3b, b, a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

2. *Dans $\mathbb{C}_2[X]$, soient les vecteurs $u = iX - X^2$ et $v = 1 + i + X$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(u,v) &= \{\lambda(iX - X^2) + \mu(1+i+X) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu(1+i) + (i\lambda+\mu)X - \mu X^2 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

**Théorème 1.2.8.** ***1.*** *Si un vecteur $w$ est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n, w) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n).$$

**2.** *Si un vecteur $w$ est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k + w, v_{k+1}, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n).$$

**Exemple 1.2.7.** ***1.*** *Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs*

$$v_1 = (-2, 1, 0), \quad v_2 = (3, 0, -1) \quad et \quad w = (-8, 1, -2).$$

*Le fait que $w = v_1 - 2v_2$ donne*

$$\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, w\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

**2.** *Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a*

$$\mathrm{Vect}\{1, \cos^2, \sin^2\} = \mathrm{Vect}\{1, \cos^2\}.$$

**Théorème 1.2.9.** *Soient $A$ et $B$ deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Alors*

$$A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$$

*et*

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B).$$

## 1.3 Partie génératrice, Partie libre et Base

### 1.3.1 Partie génératrice- Famille génératrice

**Définition 1.3.1.** *(Partie génératrice)*
*Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $X$ une partie de $E$. On dit que la partie $X$ est génératrice de $E$ ou engendre $E$ si tout élément de $E$ est combinaison linéaire de $X$, i. e $E = \mathrm{Vect}\{X\}$. Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, on dit aussi que la famille $\{x_i\}_{i \in I}$ est génératrice de $E$ ou engendre $E$.*

**Exemple 1.3.1.** ***1.*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ suivant*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1).$$

*Alors* $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_i, 1 \leq i \leq n)$. *En effet, tout vecteur* $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *peut s'écrire sous la forme*

$$v = x_1(1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

**2.** *Dans* $\mathbb{C}$ *vu comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, la famille* $\{1, i\}$ *est génératrice.*

**3.** *La famille* $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *engendre* $\mathbb{K}[X]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\{1, X, \dots, X^n\}$ *engendre* $\mathbb{K}_n[X]$.

**4.** *L'ensemble* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par la famille* $\{(-3, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. *En effet on a*

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y + 2z\} \\ &= \{(-3y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

**5.** *L'ensemble* $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$ *engendré par la famille* $\{1 - X, 1 - X^2\}$. *En effet, si* $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in G$, *alors* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, *d'où*

$$P = -a_1 - a_2 + a_1 X + a_2 X^2 = -a_1(1 - X) - a_2(1 - X^2).$$

**6.** *Dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *considérons le sous-espace vectoriel*

$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\}.$$

*Puisque*

$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times 3^n\},$$

*alors, la suite* $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *engendre* $H$.

**7.** *Soit dans* $\mathbb{C}$ *le sous-espace vectoriel*

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}.$$

*On a*

$$K = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = y\} = \{x(1 + i) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

*donc* $\{1 + i\}$ *engendre* $K$.

**Remarque 1.3.1.** *La partie génératrice d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel n'est pas unique.*

### 1.3.2 Familles libres, familles liées

**Définition 1.3.2.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre ou linéairement indépendante dans E si*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}).$$

*On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ tels que } (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \text{ et } \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E.$$

**Proposition 1.3.1.**
- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille quelconque de E, on dit que la famille $(v_i)_{i \in F}$ est libre, si toute sous-famille $(v_i)_{i \in H}$, où $H \subset F$ est un ensemble fini est libre.*
- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille libre quelconque de E, toute sous- famille $(v_i)_{i \in H}$, où $H \subset F$ est libre.*
- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille libre quelconque de E et si i et j sont deux éléments de F tels que $i \neq j$, alors $v_i \neq v_j$.*

**Remarque 1.3.2.** *Toute partie de E contenant le vecteur $0_E$ est liée.*

**Exemple 1.3.2.**
1. *Une famille à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.*
2. *La famille $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ de $\mathbb{K}^n$ est libre.*
3. *La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.*
4. *La famille $\{\sin, \cos\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\alpha \sin + \beta \cos = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})},$$
*alors*
$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \sin x + \beta \cos x = 0.$$
*En particulier $\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0$ et $\alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$.*
5. *La famille $\{(-2, 1), (-3, 3), (1, 1)\}$ est liée dans $\mathbb{R}^2$, car $(-3, 3) - 2(-2, 1) - (1, 1) = (0, 0)$.*

**Théorème 1.3.1.** *Soit $n \geq 2$. La famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est combinaison linéaire des autres.*

### 1.3.3 Base

**Définition 1.3.3.** *(Base)*
*On appelle base toute famille de vecteurs à la fois génératrice et libre.*

**Exemple 1.3.3.** **1.** $\{1, i\}$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

**2.** $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$*. Cette base est appelée la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

**3.** *La famille* $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$*. On l'appelle la base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$.

**4.** *La famille* $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{K}[X]$.

**Remarque 1.3.3.** **1.** *La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul.*

**2.** *Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.*

**Exemple 1.3.4.** **1.** *Les familles* $\{(2, 0, 2), (1, 3, -5), (1, -1, 0)\}$, $\{(-1, 1, 0), (1, 4, 2), (1, -2, 7)\}$ *et*

$\{(-3, 2, 5), (1, 1, 1), (3, 1, -1)\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^3$

**2.** *Les familles* $\{-1, 1 + X, (1 + X)^2\}$ *et* $\{2, -1 + 2X, X - X^2\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}_2[X]$.

**Théorème 1.3.2.** *(Propriété fondamentale)*
*Soit* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $E$*. Tout élément* $v$ *de* $E$ *s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des* $e_i$ *:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

*Les scalaires* $\lambda_i$ *s'appellent coordonnées de* $v$ *dans la base* $B$.

**Exemple 1.3.5.** **1.** *Les coordonnées du couple* $(-2, 1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans la base* $\{(1, 1), (5, -1)\}$ *est* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$*, car*

$$(-2, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(5, -1).$$

**2.** *Les coordonnées du polynôme* $2 - X^2 + X^3$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *sont* $(2, 0, -1, 1)$*. Considérons maintenant la nouvelle base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *:*

$$\{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}.$$

*Le fait que*

$$2 - X^2 + X^3 = 2 \times 1 + (1 + X) - 2 \times (1 + X + X^2) + (1 + X + X^2 + X^3),$$

*implique que les coordonnées de* $2 - X^2 + X^3$ *dans la nouvelle base sont* $(2, 1, -2, 1)$.

**Théorème 1.3.3.** *(Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels)*
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriels de $E$ non réduit à $\{0_E\}$. Si $B_F$ est une base de $F$ et $B_G$ est une base de $G$, alors $B_F \cup B_G$ est une famille génératrice de $F + G$. De plus, si $F$ et $G$ sont en somme directe, alors $B_F \cup B_G$ est une base de $F \oplus G$.*

**Exemple 1.3.6.** **1.** *Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants :*

$$F = \text{Vect}\{(1, -1, 0, 2)\} \quad \textit{et} \quad G = \text{Vect}\{(-2, 5, 3, 1), (1, 1, -2, -2)\}.$$

*Puisque $(1, -1, 0, 2) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ et les vecteurs $(-2, 5, 3, 1), (1, 1, -2, -2)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1, -1, 0, 2)\}$ et $\{(-2, 5, 3, 1), (1, 1, -2, -2)\}$ sont respectivement une base de $F$ et de $G$. Donc $\{(1, -1, 0, 2), (-2, 5, 3, 1), (1, 1, -2, -2)\}$ est une famille génératrice de $F + G$.*

**2.** *Puisque les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ :*

$$F = \text{Vect}\{1\} \quad \textit{et} \quad G = \text{Vect}\{X^2\}.$$

*sont en somme directe, alors $\{1, X^2\}$ est une base $F + G$.*

## 1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

**Définition 1.4.1.** *(Espace vectoriels de dimension finie)*
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $E$ est de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie, et de dimension infinie sinon.*

**Exemple 1.4.1.** **1.** *Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont de dimension fine.*

**2.** *$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.*

**Théorème 1.4.1.** *(Existence du base)*
*Tout espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ et fini admet une base.*

**Théorème 1.4.2.** *(Formule de Grassmann)*
*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soient $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

*En particulier, $F$ et $G$ en somme directe si et seulement si*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G).$$

**Théorème 1.4.3.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ est de dimension finie et on a*

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

*De plus, on a*

$$\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E.$$

**Exemple 1.4.2.** *Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.*

**Théorème 1.4.4.** *(Dimension)*
*Si $E$ est de dimension finie, alors toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de $E$ et est noté $\dim(E)$.*

**Remarque 1.4.1.** *La dimension de l'espace nul est $0$.*

**Exemple 1.4.3.**

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$.
2. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.
3. $\mathbb{K}[X]$ *est de dimension infinie.*
4. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ *et* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

**Théorème 1.4.5.** *Dans un espace vectoriel de dimension $n$ :*

1. *toute famille libre a au plus $n$ éléments,*
2. *toute famille libre de $n$ élément est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins $n$ élément,*
4. *toute famille génératrice de $n$ élément est une base.*

**Exemple 1.4.4.**

1. *La famille $\{(0,-1,3),(-1,3,0),(3,0,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et* $\mathrm{Card}\{(0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
2. *La famille $\{1, 1+X, (1+X)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, car elle est libre et* $\mathrm{Card}\{1, 1+X, (1+X)^2\} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

**Théorème 1.4.6.** *(Caractérisation de la supplémentarité)*
*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie $E$. Alors $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si au moins deux des trois assertions suivantes sont vraies :*

***(i)*** $\dim F + \dim G = \dim E$.

***(ii)*** $F \cap G = \{0_E\}$.

***(iii)*** $F + G = E$.