

TD #3 (Chapitre 2 : Méthode des volumes pour les problèmes de diffusion)

Exo. 1

La figure 1 montre une large plaque d'épaisseur $L=2\text{cm}$ avec conductivité thermique constante $k=0.5\text{W/m.K}$ et génération de chaleur uniforme $q=1000\text{KW/m}^3$. Les faces A et B sont respectivement aux températures de 100°C et 200°C . En assumant que les dimensions dans les directions y et z sont assez larges que les gradients de température sont importants uniquement dans la direction x , calculer la distribution de température en régime permanent. Comparer le résultat numérique obtenu avec la solution analytique :

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$$

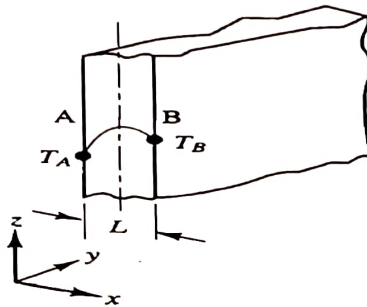


Figure 1

Exo. 2

La figure 2 est une ailette cylindrique avec section A uniforme. La base est à une température de 100°C (T_B) et l'extrémité est isolée (adiabatique). L'ailette est exposée à une température ambiante de 20°C . Le transfert de chaleur unidimensionnel (1-D) dans cette situation est gouverné par :

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

Avec h est le coefficient de transfert de chaleur convectif, P le périmètre, k la conductivité thermique et T_∞ la température ambiante. En discrétisant l'équation de transfert de chaleur (1-D) et en utilisant un maillage à 5 volumes de contrôle ($\delta x=0.2\text{m}$), calculer la distribution de température le long de l'ailette et comparez le résultat obtenu avec la solution analytique donnée par :

$$\frac{T - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)}$$

Avec $n^2 = hP/(kA)$, L est la longueur de l'ailette et x la distance le long de l'ailette.
 Données : $L=1\text{m}$, $hP/(kA)=25\text{m}^{-2}$ (noter : $kA=\text{const.}$)

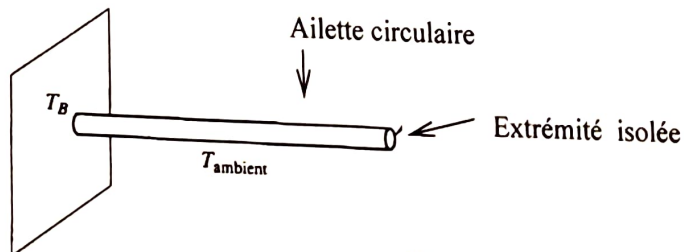


Figure 2

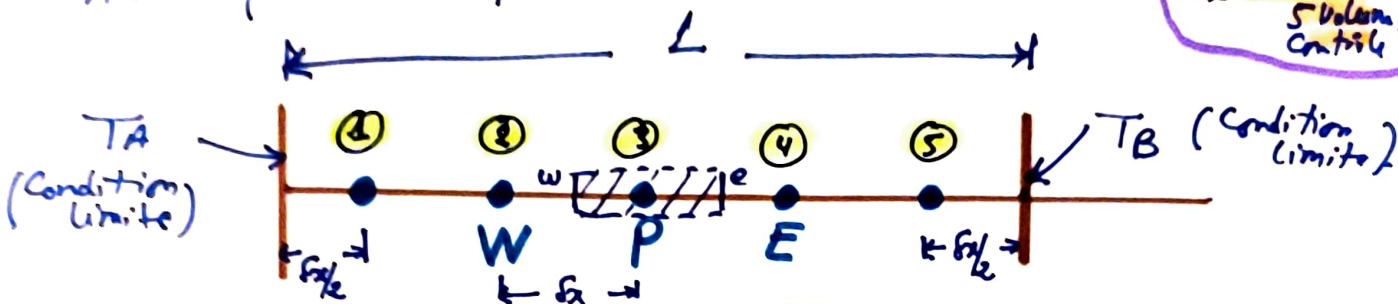
Exercice 1

(l'équation de la conduction thermique, en régime permanent, 1-D, avec génération de chaleur volumétrique \dot{q} est,

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (1)$$

Le domaine est divisé en 05 volumes de contrôle, dont $\delta x = 0,004m$, par unité de surface dans le plan $y-z$ (Fig. 1), et en considérant que $A = cte$ ($A_w = A_e = A$).

$\delta x = \frac{L}{5 \text{ volumes de contrôle}}$



(Fig. 1)

L'intégration de l'eq. (1) donne:

$$\int_{OV} \frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) dV + \int \dot{q} dV = 0 \quad (2)$$

$(dV = A \cdot \delta x)$

$$\left[\left(KA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(KA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \dot{q} A \cdot \delta x = 0$$

$$\left[K_e A_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - K_w A_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + \dot{q} A \cdot \delta x = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{K_e A_e}{\delta x} + \frac{K_w A_w}{\delta x} \right)}_{a_p} T_P = \underbrace{\left(\frac{K_e A_e}{\delta x} \right)}_{a_E} T_E + \underbrace{\left(\frac{K_w A_w}{\delta x} \right)}_{a_W} T_W + \underbrace{\dot{q} A \cdot \delta x}_{S_u} \quad (3)$$

Avec: $K_e = K_w = K$
 $A_e = A_w = A$

(l'équation (3) est écrite sous la forme générale (pour les noeuds 2, 3, 4):

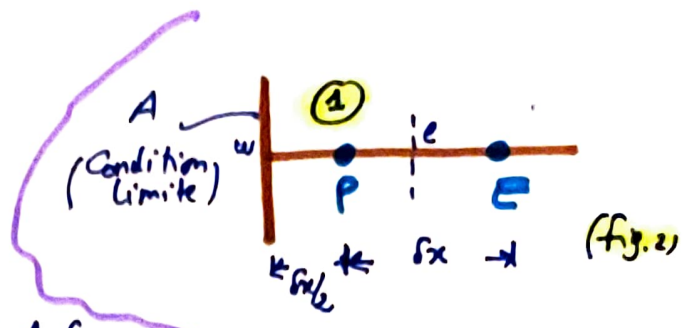
$$a_p T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (4)$$

a_W	a_E	a_p	S_P	S_u
$\frac{KA}{\delta x}$	$\frac{KA}{\delta x}$	$a_W + a_E - S_p$	0	$\dot{q} A \cdot \delta x$

Nœud (1)

L'intégration de l'eq. (1) au volume de contrôle entourant le nœud (1) donne (Fig. 2):

$$\left[\left(KA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(KA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \dot{q} DV = 0$$



$$\left[K_e A_e \left(\frac{T_e - T_p}{\delta x} \right) - K_w A_w \left(\frac{T_p - T_w}{\delta x/2} \right) \right] + \dot{q} A \cdot \delta x = 0 \quad (6)$$

Avec: $K_p = K_e = K_w = K$
 $A_e = A_w = A$

L'équation (6) pour le nœud (1):

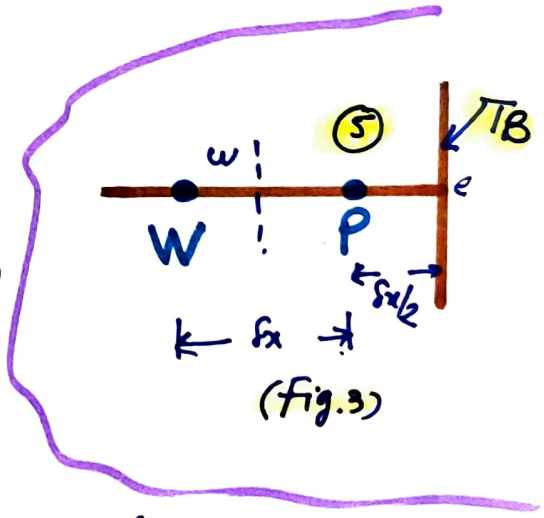
$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (7)$$

a_w	a_e	a_p	S_p	S_u
0	$\frac{KA}{\delta x}$	$a_w + a_e - S_p$	$-\frac{2KA}{\delta x}$	$\dot{q} A \delta x + \frac{2KA}{\delta x} T_A$

Nœud (5)

L'intégration de l'eq. (1) au volume de contrôle entourant le nœud (5) (Fig. 3) donne:

$$\left[\left(KA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(KA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \dot{q} DV = 0 \quad (8)$$



$$\left[K_e A_e \left(\frac{T_B - T_p}{\delta x/2} \right) - K_w A_w \left(\frac{T_p - T_w}{\delta x} \right) \right] + \dot{q} A \cdot \delta x = 0 \quad (9)$$

Avec: $K_B = K_w = K_e = K$
 $A_w = A_e = A$

L'équation (9) donne:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (10)$$

a_w	a_e	a_p	S_p	S_u
$\frac{KA}{\delta x}$	0	$a_w + a_e - S_p$	$-\frac{2KA}{\delta x}$	$\dot{q} A \delta x + \frac{2KA}{\delta x} T_B$

Application:

3/9

$$A = 1 \text{ m}^2, \quad K = 0,5 \text{ W/m.K}, \quad \dot{q} = 1000 \frac{\text{KW}}{\text{m}^3}, \quad L_x = 0,004 \text{ m}.$$

Nœud	aW	aE	Su	SP	qf = q1 + q2 + ...
1	0	125	$4000 + 250T_A$	-250	375
2	125	125	4000	0	250
3	125	125	4000	0	250
4	125	125	4000	0	250
5	125	0	$4000 + 250T_B$	-250	375

La forme matricielle des équations est:

$$\begin{bmatrix}
 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\
 -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\
 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\
 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\
 0 & 0 & 0 & -125 & 375
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 29000 \\
 4000 \\
 4000 \\
 4000 \\
 54000
 \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel Matlab ou l'algorithme TDMA (Thomas),

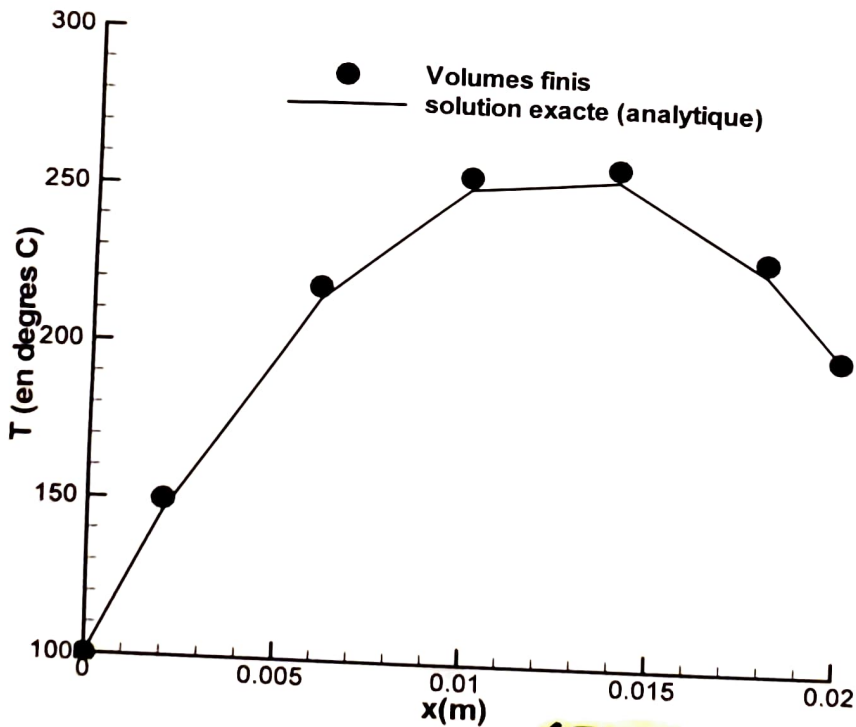
$$\begin{aligned}
 T_1 &= 150 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 T_2 &= 218 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 T_3 &= 254 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 T_4 &= 258 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 T_5 &= 230 \text{ } ^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

• Comparison avec la solution exacte (Tableau 1 et Fig 2)

4/9

Nature	1	2	3	4	5
$x(m)$	9,002	9,006	9,01	9,014	9,018
Volumes finis	150	218	254	258	230
Solution exacte	146	214	250	254	226
Erreur % = $\frac{(\text{analytique} - \text{Volumes finis})}{\text{analytique}} \times 100$	2,73	1,86	1,60	1,57	1,76

- Tableau 1 -

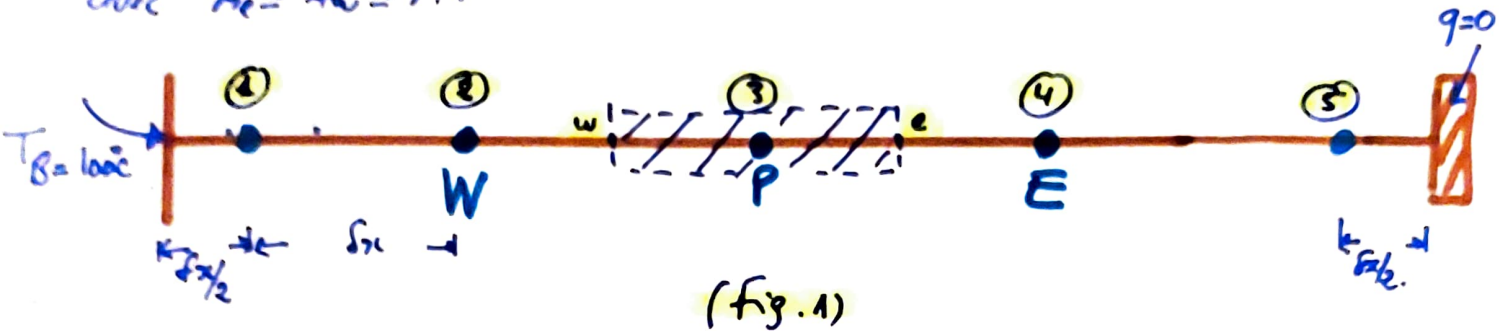


(Fig. 2)

Le transfert de chaleur est 1-D dans cette situation, gouverné par:

$$\frac{d}{dx} \left(KA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) contient un terme puit, $-hP(T - T_\infty)$. Nous utilisons un maillage uniforme composé de 05 volumes de contrôle, $\delta x = 0,2m$ (fig.1), avec $A_e = A_w = A$.



(fig.1)

Avec: $KA = \text{const.}$, l'équation (1) peut être écrite comme:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad (2)$$

$$n^2 = \frac{hP}{KA}$$

L'intégration (2) de l'eq. (2) sur un volume de contrôle (Fig. 1) donne:

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int n^2 (T - T_\infty) dV = 0 \quad (3)$$

ou $(dV = A \cdot \delta x)$.

$$\left[\left(A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] - \left[\underbrace{n^2 (T_p - T_\infty) A \cdot \delta x}_{\text{terme puit est considéré uniforme dans le volume de contrôle}} \right] = 0 \quad (4)$$

En divisant l'eq. (4) par A , on obtient:

$$\left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - \left[n^2 (T_P - T_\infty) \cdot \delta x \right] = 0 \quad (5)$$

L'équation (5) devient après réarrangement,

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{1}{\delta x} \right)}_{ap} T_P = \underbrace{\left(\frac{1}{\delta x} \right)}_{aW} T_W + \underbrace{\left(\frac{1}{\delta x} \right)}_{aE} T_E + \underbrace{n^2 \delta x T_\infty}_{su} - \underbrace{n^2 \delta x}_{sp} \quad (6)$$

La forme générale de l'équation discrétisée pour les noeuds (6/9)

(2), (3), (4) est:

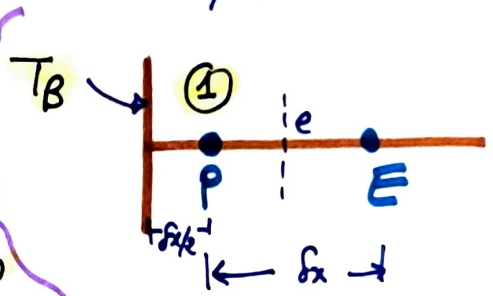
$$a_p T_p = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (7)$$

a_W	a_E	a_p	S_p	S_u
$\frac{1}{\delta x}$	$\frac{1}{\delta x}$	$a_W + a_E - \rho$	$-n^2 \delta x$	$n^2 T_\infty \delta x$

Noeud (1):

Le noeud (1) (fig.2), l'intégration de l'éq. (2) donne:

$$\left[\left(\frac{T_E - T_p}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_p - T_B}{\delta x/2} \right) \right] - \left[n^2 (T_p - T_\infty) \delta x \right] = 0 \quad (8)$$



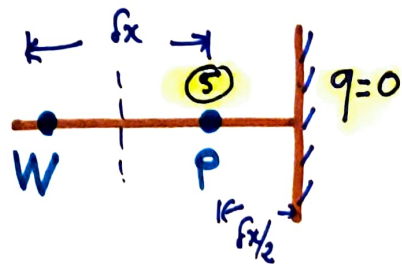
(fig.2)

a_W	a_E	a_p	S_p	S_u
0	$\frac{1}{\delta x}$	$a_W + a_E - \rho$	$-n^2 \delta x - \frac{2}{\delta x}$	$n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_B$

Noeud (5)

Au noeud (5) (fig.3), l'intégration de l'éq. (2) donne:

$$\left[0 - \left(\frac{T_p - T_W}{\delta x} \right) \right] - \left[n^2 (T_p - T_\infty) \delta x \right] = 0 \quad (9)$$



(fig.3)

a_W	a_E	a_p	S_p	S_u
$\frac{1}{\delta x}$	0	$a_W + a_E - \rho$	$-n^2 \delta x$	$n^2 \delta x T_\infty$

Application

7/9

Noeuds	QW	QE	Su	Sp	Qp = QW + QE - Sp
1	0	5	100 + 10T ₈	-15	20
2	5	5	100	-5	15
3	5	5	100	-5	15
4	5	5	100	-5	15
5	5	0	100	-5	10

La forme matricielle des équations est,

$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

La solution en utilisant l'algorithme TDNA :

$$T_1 = 64,22 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 36,91 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 25,50 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 22,60 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 21,30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Noeuds	Distance	Volumes finis	analytique	Différence	erreur %
1	0,1	64,22	68,52	4,30	6,27
2	0,3	36,91	37,86	0,95	2,51
3	0,5	26,50	26,61	0,11	0,41
4	0,7	22,60	22,53	-0,07	-0,31
5	0,9	21,30	21,21	-0,09	-0,42

La solution numérique (volumes finis) peut être améliorée en employant un maillage fin (raffiné). Considérons le même problème en subdivisant la longueur de l'ailette en 10 volumes de contrôle.

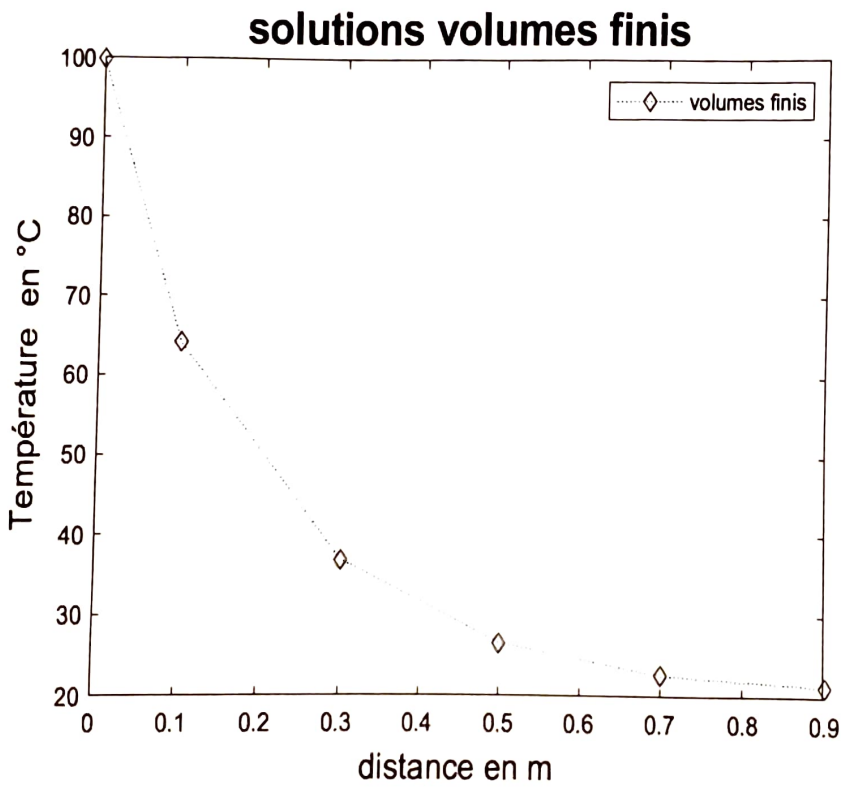
Les équations discrétisées restent les mêmes comme avant, mais les valeurs numériques des coefficients et les termes sources sont différentes. Pour ce cas, avec le nouveau maillage (10 volumes de contrôle), $(6x = 9m)$

La comparaison des résultats du 2^{ème} calcul est montrée dans le tableau suivant:

Noeuds	Distance	Volumes finis	analytique	Différence	erreur %
1	0,05	80,59	82,31	1,72	2,08
2	0,15	56,94	57,79	0,85	1,47
3	0,25	42,55	43,93	0,40	0,93
4	0,35	33,24	33,92	0,18	0,53
5	0,45	28,40	28,46	0,06	0,21
6	0,55	25,16	25,17	0,01	0,03
7	0,65	23,21	23,19	-0,02	-0,08
8	0,75	22,06	22,03	-0,03	-0,13
9	0,85	21,47	21,39	-0,08	0,37
10	0,95	21,13	21,11	-0,02	-0,09

Les résultats obtenus par le nouveau maillage (10 volumes de contrôle) montre un bon accord avec la solution analytique, maintenant la déviation maximale est seulement de 2% (voir le Tableau).

La figure 2 montre la distribution de la température le long de l'aile obtenue par volumes finis et Matlab.



(Fig. 2)