

— Chapitre #3 —

3.1. Introduction

Dans les problèmes où l'écoulement de fluide joue un rôle important, nous devons tenir compte des effets de la convection.

L'équation de transport d'une variable générale ϕ , sans le terme transitoire, est

$$\text{div}(\rho \mathbf{U} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

↑
Vecteurs vitesse (u, v, w)

La forme intégrale sur un volume de contrôle est

$$\underbrace{\int \eta \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dA}_{\text{flux convectif net}} = \underbrace{\int \eta \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA}_{\text{flux diffusif net CV}} + \underbrace{\int S_\phi dV}_{\substack{\text{génération} \\ \text{ou} \\ \text{destruction} \\ \text{de } \phi \text{ dans le CV}}} \quad (3.2)$$

Cette équation représente l'équilibre des flux dans le volume de contrôle (CV).

Le problème principal dans la discrétisation des termes convectifs est le calcul de la valeur de ϕ aux faces du volume de contrôle et des flux convectifs à travers ces faces.

3.2. Diffusion et Convection 1-D en régime permanent

En absence de sources, la diffusion et la convection en régime permanent d'une variable ϕ dans un champ d'écoulement u (1-D) sont gouvernées par:

$$\frac{d}{dx} (\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3.3)$$

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

L'écoulement doit aussi satisfaire la continuité,

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (3.4)$$

L'intégrale de l'éq. (3.3) sur un volume de contrôle de la fig. 3.1 donne:

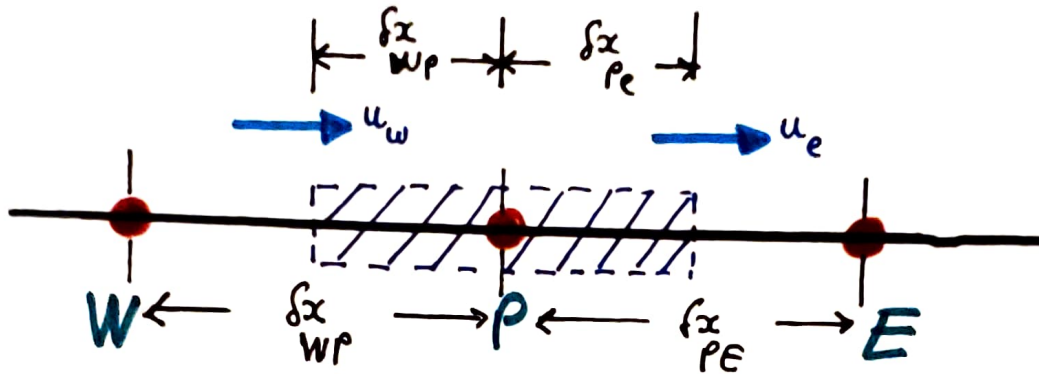


Fig. 3.1: Un volume de contrôle autour du nœud P.

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dx$$

$$(\rho u \phi A)_e - (\rho u \phi A)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (3.5)$$

et l'intégration de l'éq. (3.4) donne:

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (3.6)$$

Noter que $f = \rho u$ et $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$

flux massique
convectif/unité de
surface

conductance

$$(3.7)$$

En supposant que $A_w = A_e = A$, et en employant l'approche ~~aux~~ différences centrées pour représenter la contribution des termes de diffusion, l'équation (3.5) devient comme:

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (3.8)$$

Avec: $F_e = (e u)_e$, $F_w = (e u)_w$ (3.9a)

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{pe}}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{wp}} \quad (3.9b)$$

et l'éq. 3.6 est,

$$F_e - F_w = 0 \quad (3.10)$$

Dans l'ordre de résoudre l'éq. 3.8, nous devons calculer la variable ϕ aux faces e et w . Des schémas numériques seront proposés dans les paragraphes suivants:

3.3 Le schéma numérique aux différences centrées (CDS)*

En faisant l'hypothèse que le profil de la variable ϕ est linéaire entre chaque deux points consécutifs du maillage, on peut écrire:

$$\phi_e = f \phi_E + (1-f) \phi_P \quad (3.11a)$$

$$\phi_w = f \phi_W + (1-f) \phi_P \quad (3.11b)$$

Si $f = \frac{1}{2}$ on obtient le schéma ^{aux} différences centrées. Les valeurs des quantités ϕ_e et ϕ_w selon ce schéma sont données par:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (3.11c)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \quad (3.11d)$$

* CDS (Central Differencing Scheme).

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

En remplaçant ces équations (3.11c et 3.11d) dans l'éq. 3.8, on obtient:

$$\frac{f_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{f_w}{2} (\phi_W + \phi_P) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$\left[\left(D_w - \frac{f_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{f_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{f_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{f_e}{2} \right) \phi_E \quad (3.12)$$

$$\underbrace{\left[\left(D_w + \frac{f_w}{2} \right) - \left(D_e - \frac{f_e}{2} \right) + (f_e - f_w) \right]}_{a_P} \phi_P = \underbrace{\left(D_w + \frac{f_w}{2} \right)}_{a_W} \phi_W + \underbrace{\left(D_e - \frac{f_e}{2} \right)}_{a_E} \phi_E \quad (3.13)$$

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (3.14)$$

Avec:

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{f_w}{2}$	$D_e - \frac{f_e}{2}$	$a_W + a_E + (f_e - f_w)$

3.4. Le schéma numérique aux différences avant (UDS)*

- Quand l'écoulement est suivant une direction positive (fig. 3.2a)
 $U_w > 0, U_e > 0 \quad (f_w > 0, f_e > 0)$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_P \quad (3.15)$$

L'équation 3.8 devient

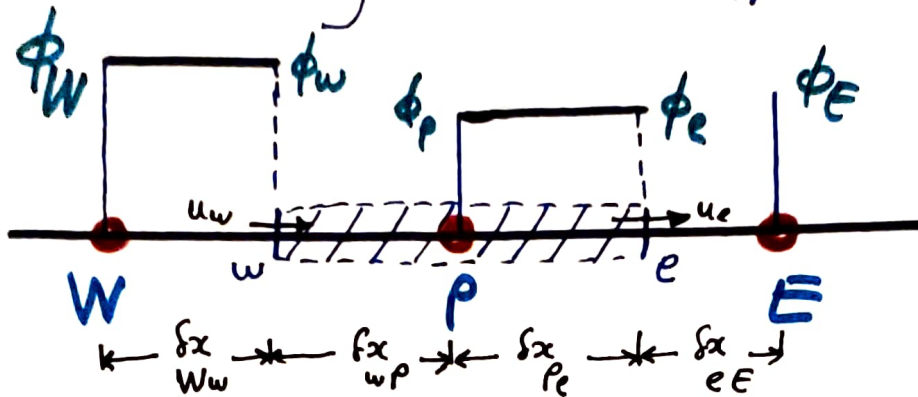
$$f_e \phi_P - f_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (3.16)$$

* UDS (First order Upwind Differencing Scheme).

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

pour donner:

$$\left[(D_w + f_w) + D_e + (f_e - f_w) \right] \phi_p = (D_w + f_w) \phi_W + D_e \phi_E \quad (3.17)$$



(Fig. 3.2a)

- Quand l'écoulement est dans la direction négative (fig. 3.2b):

$$u_w < 0, u_e < 0 \quad (f_w < 0, f_e < 0)$$

$$\phi_w = \phi_p \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_E \quad (3.18)$$

L'équation 3.8 devient

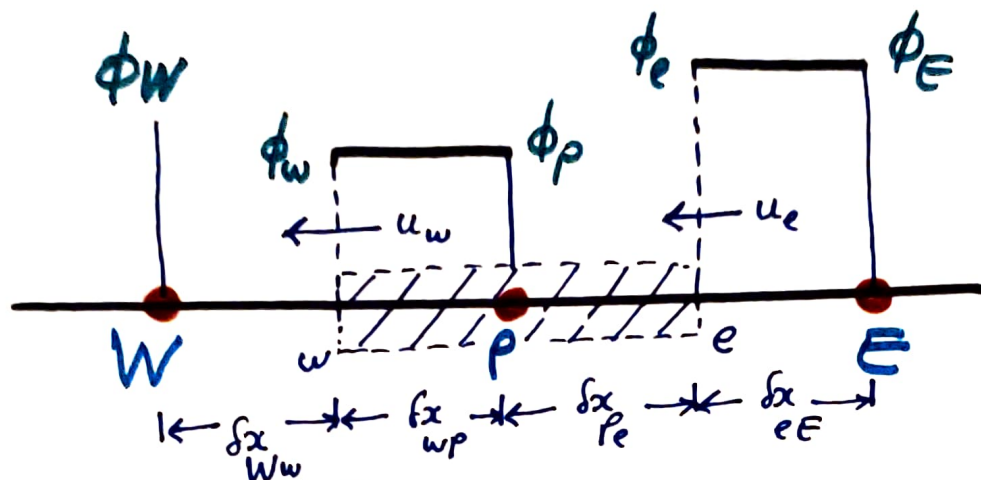
$$f_e \phi_E - f_w \phi_p = D_e (\phi_E - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_W) \quad (3.19)$$

ou

$$\left[\underbrace{D_w + (D_e - f_e) + (f_e - f_w)}_{a_p} \right] \phi_p = \underbrace{D_w}_{a_w} \phi_W + \underbrace{(D_e - f_e)}_{a_E} \phi_E \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} a_p \phi_p &= a_w \phi_W + a_E \phi_E \\ a_p &= a_w + a_E + (f_e - f_w) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion



(Fig. 3.2b)

Les coefficients des équations (3.17) et (3.20) (a_p, a_w, a_e) sont :

	a_w	a_e
$f_w > 0, f_e > 0$	$D_w + f_w$	D_e
$f_w < 0, f_e < 0$	D_w	$D_e - f_e$

Une forme générale pour les coefficients adjacents du schéma numérique "UDS" qui couvre les deux directions de l'écoulement est donnée comme suit :

a_w	a_e
$D_w + \max(f_w, 0)$	$D_e + \max(0, -f_e)$

En langage Fortran :

$$a_w = D_w + \max_1(f_w, 0)$$

$$a_e = D_e + \max_1(-f_e, 0)$$

3.4. Le schéma numérique hybride

Le schéma numérique hybride (Spalding, 1972) est basé sur une combinaison des schémas aux différences centrées (CDS) et (UDS). La formule du schéma hybride pour le flux net à travers la face w par unité de surface est:

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{P_{ew}} \right) \phi_W + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{P_{ew}} \right) \phi_P \right] \quad (3.11)$$

• Pour $-2 < P_{ew} = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(e_w)_w}{(F_w/\delta x_{wp})} < 2$

P_{ew} = nombre de Péclet
 $= \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux diffusif}}$

• Pour $P_{ew} \geq 2$, $q_w = F_w A_w \phi_W$

• Pour $P_{ew} \leq -2$, $q_w = F_w A_w \phi_P$

La forme générale de l'équation discrétisée est

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E \\ a_P &= a_W + a_E + (f_e - f_w) \end{aligned} \quad (3.13)$$

a_W	a_E
$\max[f_w, (D_w + \frac{f_w}{2}), 0]$	$\max[-f_e, (D_e - \frac{f_e}{2}), 0]$

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

3.5 Schéma numérique hybrid pour la Convection-diffusion multi-dimensionnelle (3-D)

L'équation discrétisée qui couvre tout les cas est donnée par:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T \\ a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F \end{aligned} \quad (3.24)$$

et les coefficients de cette équation pour le schéma hybrid sont donnés comme suit:

	Ecoulement unidimensionnel (1-D)	Ecoulement bidimensionnel (2-D)	Ecoulement tridimensionnel (3-D)
a_W	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$
a_E	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$
a_S	—	$\max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}), 0]$	$\max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}), 0]$
a_N	—	$\max[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0]$	$\max[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0]$
a_B	—	—	$\max[F_b, (D_b + \frac{F_b}{2}), 0]$
a_T	—	—	$\max[-F_t, (D_t - \frac{F_t}{2}), 0]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Dans les expressions ci-dessus, les valeurs de F et D sont calculées avec les formules suivantes:

face	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$

3.6 Le schéma numérique Power-law (loi de puissance)

Le schéma Power-law de Patankar (1980) est une très bonne approximation de la solution exacte unidimensionnelle (1-D) et produit des résultats meilleurs que le schéma numérique hybride.

Dans ce schéma, la diffusion est nulle quand $Pe > 10$ (nombre de Péclet). Si $0 < Pe < 10$, le flux est évalué en utilisant une approximation polynomiale; par exemple, le flux net par unité de surface à la face Ouest "w" est évalué comme suit:

$$q_w = f_w \left[\phi_w - \beta_w (\phi_p - \phi_w) \right] \quad (3.25a)$$

$0 < Pe < 10$

$$\text{ou } \beta_w = (1 - 0,1 Pe_w)^5 / Pe_w \quad (3.25b)$$

et

$$q_w = f_w \phi_w \quad Pe > 10$$

Les coefficients de l'eq. discrétisée (1-D) en utilisant le schéma Power-law pour la convection-diffusion (1-D) en régime permanent sont données par:

$$a_p = a_w + a_e + (f_e - f_w)$$

a_w	a_e
$D_w \max[0, (1 - 0,1 Pe_w)^5] + \max(f_w, 0)$	$D_e \max[0, (1 - 0,1 Pe_e)^5] + \max(-f_e, 0)$

Avec: $Pe_w = f_w / D_w$, $Pe_e = f_e / D_e$.

Remarque: Le schéma numérique Power-law est plus précis pour les problèmes 1-D (Proche de la solution exacte). Plusieurs logiciels commerciaux, par exemple, Fluent, utilisent ce schéma par défaut pour les calculs.

3. Le schéma numérique QUICK

Le schéma QUICK (The Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics) de Léonard (1979) utilise une interpolation quadratique de trois nœuds (Fig. 3.3).

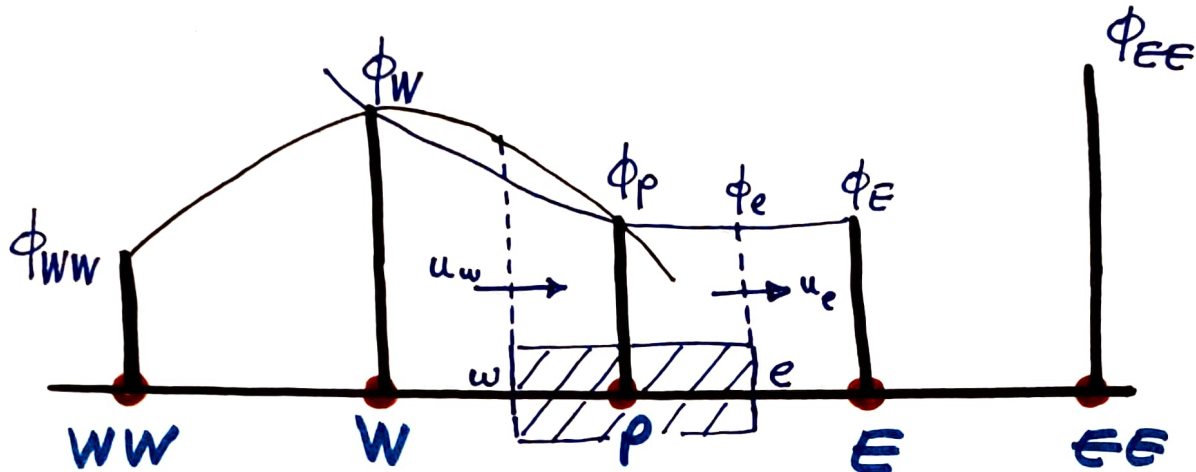


Fig. 3.3: Les profils quadratiques utilisés dans le schéma QUICK.

- Quand $u_w > 0$

$$\phi_w = \frac{6}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{WW} \quad (3.26)$$

- Quand $u_e > 0$

$$\phi_e = \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W \quad (3.27)$$

La forme discrétisée de l'équation de transport (eq. 3.8) peut être écrite comme,

$$\begin{aligned} & [f_e (\frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_{WW}) - f_w (\frac{6}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{WW})] \\ & = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \end{aligned}$$

laquelle peut être réarrangée pour donner:

$$\begin{aligned} [D_w - \frac{3}{8} f_w + D_e + \frac{6}{8} f_e] \phi_P &= [D_w + \frac{6}{8} f_w + \frac{1}{8} f_e] \phi_W + [D_e - \frac{3}{8} f_e] \phi_E \\ &\quad - \frac{1}{8} f_w \phi_{WW} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

$\vec{u}$:

a_W	a_E	a_{WW}	a_P
$D_w + \frac{6}{8} f_w + \frac{1}{8} f_e$	$D_e - \frac{3}{8} f_e$	$-\frac{1}{8} f_w$	$a_W + a_E + a_{WW} + (f_e - f_w)$

- Pour $f_w < 0$, $f_e < 0$ ($u_w < 0$, $u_e < 0$)

$$\phi_w = \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_W - \frac{1}{8} \phi_E \quad (3.29)$$

$$\phi_e = \frac{6}{8} \phi_E + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{EE}$$

En remplaçant ces deux formules (3.29) dans l'éq. 3.8, on obtient:

a_W	a_E	a_{EE}	a_P
$D_w + \frac{3}{8} f_w$	$D_e - \frac{6}{8} f_e - \frac{1}{8} f_w$	$\frac{1}{8} f_e$	$a_W + a_E + a_{EE} + (f_e - f_w)$

Le schéma Quick pour les problèmes de Convection-diffusion (1-D) peut être résumé comme suit:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} \\ a_P &= a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (f_e - f_w) \end{aligned} \quad (3.30)$$

a_W	a_{WW}	a_E	a_{EE}
$D_w + \frac{6}{8} d_w f_w + \frac{1}{8} d_e f_e + \frac{3}{8} (1 - d_w) f_w$	$-\frac{1}{8} d_w f_w$	$D_e - \frac{3}{8} d_e f_e - \frac{6}{8} (1 - d_e) f_e - \frac{1}{8} (1 - d_w) f_w$	$\frac{1}{8} (1 - d_e) f_e$

Avec: $d_w = 1$ pour $f_w > 0$ et $d_e = 1$ pour $f_e > 0$.
 $d_w = 0$ " $f_w < 0$ et $d_e = 0$ pour $f_e < 0$.

3.8 Schéma numérique à haute précision [3].

Afin d'améliorer la précision du schéma numérique LDS, l'expression de la variable ϕ à la face e du volume de contrôle (Fig. 3.4) peut s'écrire comme suit (Eq. 3.31):

$$\phi_e = \phi_p + \Delta\phi_e \quad (3.31)$$

où
$$\phi_e \approx \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \left(\frac{1-\kappa}{2} \right) \left[\frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x} \right] + \frac{1+\kappa}{2} \left[\frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} \right] \quad (3.32)$$

La forme finale de l'expression de ϕ_e (eq. 3.32) est:

$$\phi_e = \phi_p + \frac{1}{4} \left[(1-\kappa) \Delta_e^- + (1+\kappa) \Delta_e^+ \right], \quad \kappa \geq 0 \quad (3.33a)$$

Avec Δ_e , Δ_e^+ , Δ_e^- , et Δ_e^- sont des opérateurs définis comme suit:

$$\Delta_e = \phi_e - \phi_p \quad \Delta_e^+ = \phi_{ee} - \phi_e \quad (3.34)$$

$$\Delta_e^- = \phi_p - \phi_w \quad \Delta_e^- = \phi_w - \phi_{ww} \quad (3.35)$$

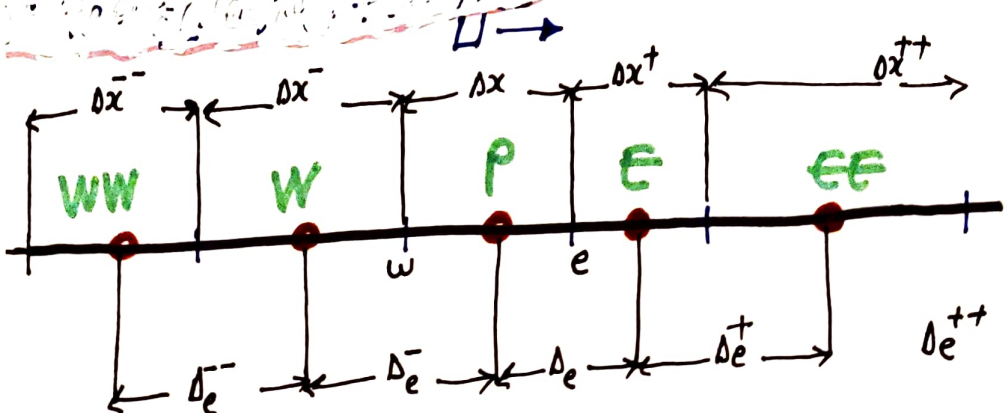


Fig. 3.4: Volume de Contrôle 1-D.

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

La relation (3.33) a l'avantage d'être universelle, de sorte que nous pouvons passer d'un schéma à un autre en changeant simplement le paramètre K , très pratique pour la programmation d'un code de calcul. Avec un seul sous-programme, nous avons une famille de schémas numériques différents:

- $K=1$, SOU, Second order Upwind Differencing Scheme
$$\phi_e = \frac{3}{2} \phi_p - \frac{1}{2} \phi_w$$
$$(\phi_w = \frac{3}{2} \phi_W - \frac{1}{2} \phi_{WW})$$
(3.36)
- $K=\frac{1}{2}$, QUICK
$$\phi_e = \frac{3}{8} \phi_E + \frac{3}{4} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_W$$
(3.36)
- $K=\frac{1}{3}$, CUI (Cubic Upwind Interpolation Scheme)
$$\phi_e = \frac{1}{3} \phi_E + \frac{5}{6} \phi_p - \frac{1}{6} \phi_W$$
(3.36)
- $K=\frac{1}{2}$, CDS
$$\phi_e = 0.5 (\phi_p + \phi_E)$$

3.9. la fausse-diffusion

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

3.10. Résumé du chapitre 3

Les problèmes de discrétisation d'équation de convection-diffusion, sous la supposition que le champ d'écoulement est connu, ont été discutés.

- Les équations discrétisées pour un nœud interne général pour les schémas, différents centrés, upwind, hybride, et Power-law d'un problème de convection-diffusion (1-D):

$$\begin{aligned}a_p \phi_p &= a_w \phi_w + a_e \phi_e \\ a_p &= a_w + a_e + (f_e - f_w)\end{aligned}$$

- Les coefficients adjacents pour ces schémas sont:

Schéma	a_w	a_e
Différentes centrées (CDS)	$D_w + \frac{f_w}{2}$	$D_e - \frac{f_e}{2}$
UDS	$D_w + \max(f_w, 0)$	$D_e + \max(0, -f_e)$
Hybrid	$\max[f_w, (D_w + \frac{f_w}{2}), 0]$	$\max[-f_e, (D_e - \frac{f_e}{2}), 0]$
Power-Law	$D_w \max[0, (1 - 0.1 P_{ew})^5] + \max(f_w, 0)$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 P_{el})^5] + \max(-f_e, 0)$

Chapitre 3: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de Convection-diffusion

- Les conditions aux limites s'ajoutent dans les équations discrétisées via les termes sources. Leur traitement est spécifique pour chaque schéma de discrétisation.
- Le schéma aux différences Centrées^(CDS) n'est pas souhaitable pour les problèmes de convection-diffusion, car ce schéma donne des solutions non-physiques pour des valeurs du nombre de Péclet $|Pe| \gg 2$.
- Les schémas numériques LDS, hybrid, et Power-law sont stables, mais souffrent de la fausse-diffusion dans les écoulements multi-dimensionnels, si le vecteur vitesse n'est pas parallèle à une direction.
- Les équations discrétisées de la méthode standard QUICK de Leonard (1979) ont la forme suivante pour un nœud interne général:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE}$$

Les coefficients adjacents du schéma QUICK sont:

	QUICK
a_W	$D_w + \frac{6}{8} \alpha_w F_w + \frac{1}{8} \alpha_e F_e + \frac{3}{8} (1 - \alpha_w) F_w$
a_{WW}	$-\frac{1}{8} \alpha_w F_w$
a_E	$D_e - \frac{3}{8} \alpha_e F_e - \frac{6}{8} (1 - \alpha_e) F_e - \frac{1}{8} (1 - \alpha_w) F_w$
a_{EE}	$\frac{1}{8} (1 - \alpha_e) F_e$

Avec: $\alpha_w = 1$ pour $F_w > 0$ et $\alpha_e = 1$ pour $F_e > 0$
 $\alpha_w = 0$ " $F_w < 0$ " $\alpha_e = 0$ " $F_e < 0$

Remarque:

Les schémas numériques d'ordre élevé, tel que QUICK peuvent minimiser des erreurs de la fausse-diffusion, mais ils sont moins stables.