Université Frères Mentouri-Constantine 1
Faculté des Sciences de la Technologie
Département de Génie Mécanique
Master 1 : *Energétique*
«*Méthode des volumes finis*»

TD #2 (Chapitre 2 : *Méthode des volumes pour les problèmes de diffusion*)

Exo. 1

Considérer le problème de la conduction de chaleur dans une barre cylindrique, sans source de chaleur, dont ses extrémités sont maintenues à des températures constantes respectivement de 100°C et 500°C. Le problème unidimensionnel (1-D) schématisé dans la *figure 1* est gouverné par :

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0$$

Calculer, en régime permanent, la distribution de la température le long de la barre. La conductivité thermique k égale à 1000 W/m.K, et la section A est 10×10^{-3} m.

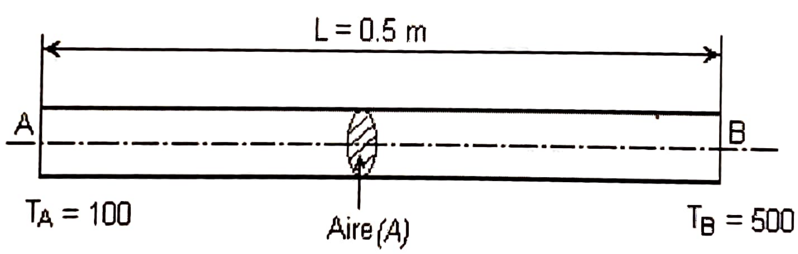


Figure 1

Prof. R. Bessaih

Solution TD#2 (Exemple#2)

Exo. 1

Le problème unidimensionnel (1-D) schématisé sur la fig. 1 est gouverné par:

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad -(1)$$

Divisons la longueur de la barre en 05 volumes de contrôle égaux, $\delta x = 0.1m$.

L'intégration de l'éq. (1) sur un volume de contrôle (à comparer avec l'éq. 2.10, chapitre #2) donne:

$$\underbrace{\left(\frac{K_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{K_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)}_{a_P} T_P = \underbrace{\left(\frac{K_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)}_{a_W} T_W + \underbrace{\left(\frac{K_e A_e}{\delta x_{PE}}\right)}_{a_E} T_E \qquad -(2)$$

Avec: $K_e = K_w = K$, $A_e = A_w = A$, $\delta x_{PE} = \delta x_{WP} = \delta x$, l'équation discrétisée pour les noeuds 2, 3, 4 est:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E \qquad -(3)$$

$$\begin{cases} a_W = \frac{K}{\delta x} A \\ a_E = \frac{K}{\delta x} A \\ a_P = a_W + a_E - S_P \\ S_u = 0 \\ S_P = 0 \end{cases}$$

Les noeuds 1 et 5 sont des noeuds limites, et par conséquent exigent une attention spéciale (ou un traitement spécial).

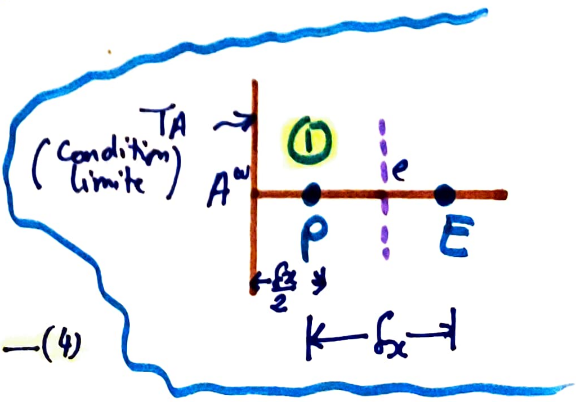
Noeud 1: l'intégration de l'éq 1 sur le volume de contrôle entourant le noeud 1 donne:

$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) \underbrace{dx.A}_{dV} = 0$$

$$KA\left.\frac{dT}{dx}\right|_w^e = 0$$

$$K_e A_e \left.\frac{dT}{dx}\right|_e - K_w A_w \left.\frac{dT}{dx}\right|_w = 0$$

$$K_e A_e\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - K_w A_w\left(\frac{T_P - T_A}{(\delta x/2)}\right) = 0 \qquad -(4)$$



Avec : $K_e = K_w = K$

$A_e = A_w = A$

l'équation (4) peut être réarrangé pour donner :

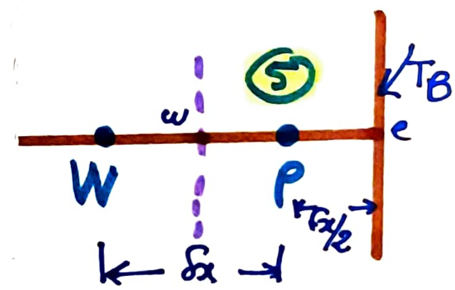
$$\underbrace{\left(\frac{KA}{\delta x} + \frac{KA}{\delta x/2}\right)}_{a_P} T_P = \underbrace{0.}_{a_W=0}\, T_W + \underbrace{\left(\frac{KA}{\delta x}\right)}_{a_E} T_E + \underbrace{\left(\frac{KA}{\delta x/2}\right) T_A}_{S_u} \quad -(5)$$

L'équation discrétisée pour le noeud (1) est : —(6)

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

$$\begin{cases} a_W = 0 \\ a_E = \dfrac{KA}{\delta x} \\ a_P = a_W + a_E - S_P \\ S_P = -\dfrac{KA}{(\delta x/2)} = -\dfrac{2KA}{\delta x} \\ S_u = \dfrac{KA}{(\delta x/2)} T_A = \dfrac{2KAT_A}{\delta x}. \end{cases}$$

Noeud (5) : Le volume de contrôle entourant le noeud (5) peut être traité de la même manière. Son équation discrétisée est obtenue en intégrant l'éq. (1) sur le volume de contrôle entourant le noeud (5) :



$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) \underbrace{dx\, A}_{dV} = 0$$

$$KA \left.\frac{dT}{dx}\right|_w^e = 0$$

$$K_e A_e \left.\frac{dT}{dx}\right|_e - K_w A_w \left.\frac{dT}{dx}\right|_w = 0$$

$$K_e A_e \left(\frac{T_B - T_P}{\delta x/2}\right) - K_w A_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x}\right) = 0 \quad -(7)$$

Avec : $K_e = K_w = K$

$A_e = A_w = A$

l'éq. (7) peut être réarrangée comme suit :

$$\underbrace{\left(\frac{KA}{\delta x} + \frac{KA}{\delta x/2}\right)}_{a_P} T_P = \underbrace{\left(\frac{KA}{\delta x}\right)}_{a_W} T_W + \underbrace{(\quad)}_{a_E=0}.\, T_E + \underbrace{\frac{KA}{\delta x/2} T_B}_{S_u} \quad -(8)$$

L'équation discrétisée pour le noeud (5) est:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad \text{— (9)}$$

$$\begin{cases} a_W = \dfrac{KA}{\delta x} \\ a_E = 0 \\ a_P = a_W + a_E - S_P \\ S_P = -\dfrac{KA}{(\delta x/2)} = -2\dfrac{KA}{\delta x} \\ S_u = \dfrac{KA}{(\delta x/2)} T_B = \dfrac{2KA\,T_B}{\delta x} \end{cases}$$

Application:

Le terme $\dfrac{KA}{\delta x} = \dfrac{1000 \times 10 \times 10^{-3}}{0{,}1}$

$$\frac{KA}{\delta x} = 100$$

Noeuds	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	100	$200 T_A$	-200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200 T_B$	-200	300

Les équations algébriques pour cet exemple sont :

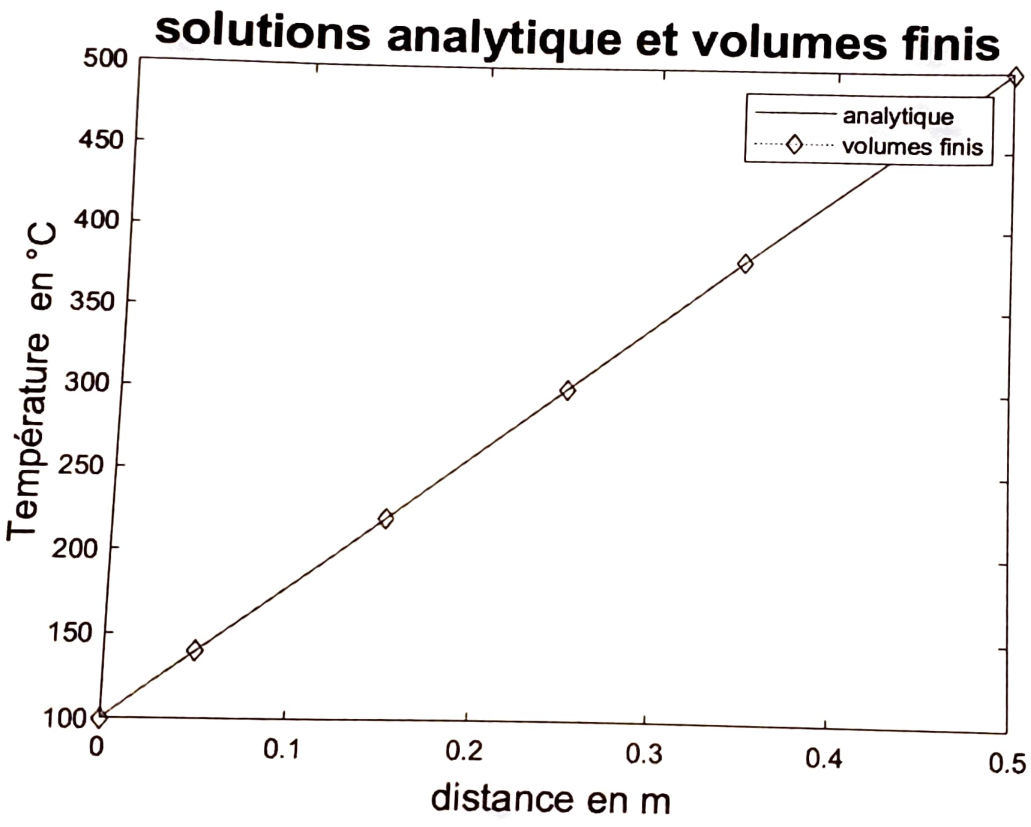
$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Noeud } 1: & 300\,T_1 = 100\,T_2 + 200\,T_A \\
\text{" } 2: & 200\,T_2 = 100\,T_1 + 100\,T_3 \\
\text{" } 3: & 200\,T_3 = 100\,T_2 + 100\,T_4 \\
\text{" } 4: & 200\,T_4 = 100\,T_3 + 100\,T_5 \\
\text{" } 5: & 300\,T_5 = 100\,T_4 + 200\,T_B
\end{array}\right\} \quad (10)$$

sous forme matricielle (Matrice Tridiagonale)

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200\,T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200\,T_B \end{bmatrix} \quad (11)$$

En utilisant le logiciel Matlab, l'algorithme Thomas,

$T_1 = 140\ °C$
$T_2 = 220\ °C$
$T_3 = 300\ °C$
$T_4 = 380\ °C$
$T_5 = 460\ °C$


solutions analytique et volumes finis
Température en °C
distance en m
analytique
volumes finis
500
450
400
350
300
250
200
150
100
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5