

Chapitre: 2

2.1. Formulation Série-Taylor

La procédure habituelle pour dériver des équations aux différences finies consiste à approcher les dérivées de l'équation différentielle via une série de Taylor tronquée. Considérons les points de grille illustrés sur la figure 2.1. Pour le point de grille 2, situé entre les points 1 et 3 tels que $\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, le développement de la série de Taylor autour de 2 donne

$$\phi_1 = \phi_2 - \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 - \dots \quad (2.1)$$

et

$$\phi_3 = \phi_2 + \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 + \dots \quad (2.2)$$

En tronquant la série juste après le troisième point, et en ajoutant et en soustrayant les deux équations, on obtient

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 = \frac{\phi_3 - \phi_1}{2 \Delta x} \quad (2.3)$$

et

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 = \frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2}{(\Delta x)^2} \quad (2.4)$$

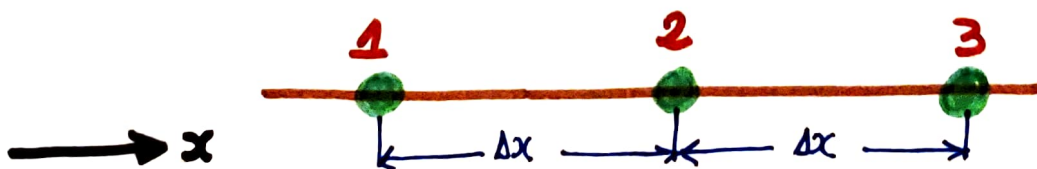


Fig. 2.1: Trois points de grille successifs utilisés pour le développement de la série de Taylor [1].

2.2 formulation Volume de Contrôle

L'idée de base de la formulation volume - Contrôle est facile à Comprendre: le domaine de calcul est divisé en un certain nombre de volumes de Contrôle de sorte qu'il ait un volume de Contrôle entourant chaque point de grille. L'équation différentielle est intégrée sur chaque volume de Contrôle. Le résultat est l'équation de discrétisation contenant les valeurs de ϕ pour un groupe de points de grille.

L'équation de discrétisation ainsi obtenue exprime le principe de conservation de ϕ pour le volume de Contrôle fini.

2.3 Equation de transport et Théorème de divergence de Gauss

L'équation de transport de diffusion, en régime permanent, d'une variable ϕ est donnée comme:

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_{\phi} = 0 \quad (2.5)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma: \text{Coefficient de diffusion} \\ S_{\phi}: \text{Terme source} \end{array} \right.$

En intégrant l'eq.(2.5) sur un volume de Contrôle (CV), laquelle forme l'étape clé de la méthode des volumes finis (ou volumes de Contrôle), qui la distingue des autres méthodes numériques (différences finies, éléments finis, spectrale...), donne la forme suivante:

$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_{\phi} dV = \int_A n \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_{\phi} dV = 0$$
$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV = \int_A n \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA \quad (2.6)$$

(Théorème de Green - Ostrogradski).

"Ce Théorème affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (une intégrale de surface)."

2.4. Méthode des volumes finis pour la diffusion unidimensionnelle (1-D)

Considérons l'équation de diffusion en régime permanent d'une variable ϕ dans un domaine (1-D) défini dans la figure 2.2.

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (2.7)$$

où Γ est le coefficient de diffusion et S le terme source. Les valeurs aux limites de ϕ aux points A et B sont mentionnées. Un exemple de ce type de processus concerne la conduction de chaleur (1-D) dans une tige.

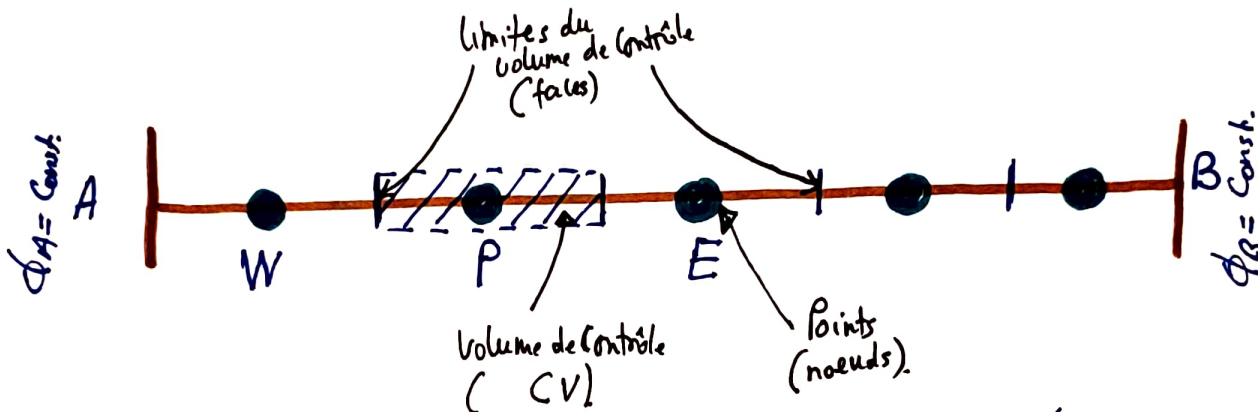


Fig. 2.2: Volume de Contrôle dans le cas unidimensionnel (1-D)

• Etape 1: génération du maillage

La première étape dans la méthode des volumes finis est de diviser le domaine en volumes de contrôle. Le nœud principal est identifié par P, les nœuds à l'Ouest et l'Est sont définis par W et E, respectivement. La face Ouest du volume de Contrôle est désignée par "w" et la face Est par "e". (Fig. 2.3).

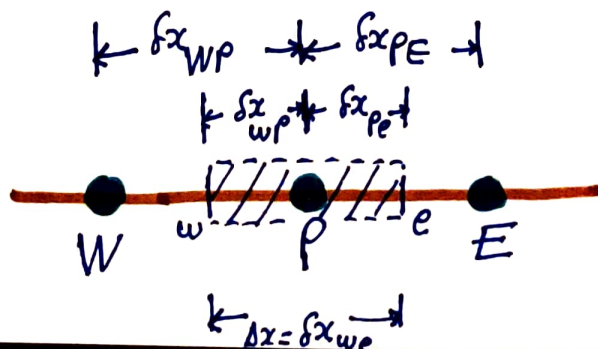


Fig. 2.3: Génération du maillage (1-D).

Les distances entre les nœuds W et P , et entre P et E , sont identifiées par Δx_{WP} et Δx_{PE} . Similairement, les distances entre la face w et le nœud P et entre P et la face e sont désignées par Δx_{wp} et Δx_{pe} , respectivement.

• Étape 2: Discretisation

L'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation gouvernante (ou les équations) sur un volume de contrôle pour produire une équation discrétisée à un point P . Pour le volume de contrôle défini dans la fig. 2.3, l'intégration donne:

$$\int_{DV} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{DV} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} DV = 0 \quad (2.8)$$

Avec: A est la section de la face du volume de contrôle, DV est le volume ($DV = \Delta x \cdot 1 \cdot 1$, 1-D) et $\bar{S}$ est la valeur moyenne des termes source S sur le volume de contrôle.

L'équation (2.8) exprime que le flux de diffusion de ϕ quittant la face Est (e) moins (-) le flux de diffusion de ϕ entrant la face Ouest (w) est égal à la génération de ϕ , i.e. il constitue une équation d'équilibre pour ϕ sur le volume de contrôle.

Le coefficient de diffusion interfacial Γ (Γ_e et Γ_w) et le gradient $d\phi/dx$ à la face "e" et à la face "w" sont:

Pour un maillage uniforme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \\ \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \end{array} \right. \quad (2.9a)$$

$$(2.9b)$$

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

et les termes de flux diffusives sont évalués comme:

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (2.10)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (2.11)$$

Dans des situations pratiques, le terme source S peut-être une fonction de la variable ϕ . Dans tels cas, la méthode des volumes finis calcul le terme source par une forme linéaire:

$$\overline{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P \quad (2.12)$$

En substituant les équations (2.10), (2.11) et (2.12) dans l'éq. (2.8), on obtient

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) peut être réécrite comme,

$$\underbrace{\left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} - \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right)}_{a_P} \phi_P = \underbrace{\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right)}_{a_W} \phi_W + \underbrace{\left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right)}_{a_E} \phi_E + S_u \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) peut être écrite comme,

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (2.15)$$

Avec:

a_W	a_E	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$a_W + a_E - S_p$

Les valeurs de S_u et S_p peuvent être obtenues à partir de l'éq. (2.12):
 $\overline{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$. Les équations (2.15) et (2.12) représentent la forme discrétisée de l'équation (2.7). Ce type d'équation discrétisée est central pour tous les développements qui suivent.

• Etape 3: Solution des équations

Les équations discrétisées de la forme (eq. 2.15) doivent être résolues dans chaque nœud. Pour les volumes de Contrôle qui sont adjacents aux limites, l'équation générale discrétisée (eq. 2.15) est modifiée pour incorporer les conditions aux limites. Le système résultant des équations algébriques linéaires est alors solutionnée pour obtenir la distribution de la variable ϕ aux nœuds. Dans le chapitre 5, nous développons les méthodes de solution des matrices.

2.5 Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion bidimensionnels (2-D).

La méthodologie utilisée en déterminant les équations discrétisées dans le cas (1-D) peut être facilement étendue aux problèmes 2-D.

Pour illustrer la technique, Considérons l'équation de diffusion 2-D, en régime permanent, donnée par [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_{\phi} = 0 \quad (2.16)$$

Une portion du maillage 2-D utilisé pour la discrétisation est montré à la fig. 2.4.

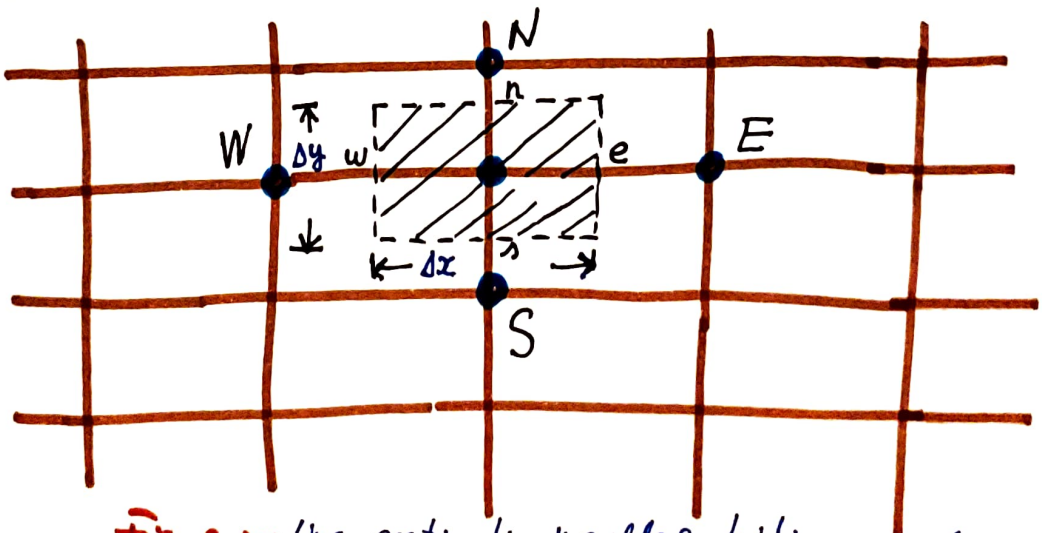


Fig. 2.4: Une partie du maillage bidimensionnel.

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

En plus aux noeuds adjacents Est (E) et Ouest (W), le noeud P a aussi maintenant les noeuds adjacents Nord (N) et Sud (S).

La même notation comme dans l'analyse 1-D est utilisée pour les faces. L'intégration de l'éq. (2.16) sur le volume de contrôle (Fig. 2.4) donne :

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{dx \cdot dy \cdot 1}{dV} + \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dx \cdot dy \cdot 1}{dV} + \int S_{\phi} dV = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} dV = dx \cdot dy \cdot 1 & (\text{cas 2-D}) \\ dV = dx \cdot dy \cdot dz & (\text{cas 3-D}). \end{cases}$$

Noter que : $A_e = A_w = A = dy \times 1$ et $A_n = A_s = dx \times 1$, l'équation 2.17 devient

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} dV = 0 \quad (2.18)$$

Cette équation (2.18) représente l'équilibre de la génération de ϕ dans un volume de contrôle et les flux à travers ses faces (w, e, s, n) :

- flux à travers la face Ouest (w) : $\Gamma_w A_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}}$ (2.19a)

- " " Est (e) : $\Gamma_e A_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}}$ (2.19b)

- " " Sud (s) : $\Gamma_s A_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}}$ (2.19c)

- " " Nord (n) : $\Gamma_n A_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}}$ (2.19d)

En substituant les expressions (2.19a — 2.19d) dans l'équation (2.18), nous obtenons

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

a_p

$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}} - s_p \right) \phi_p$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}} \right)}_{a_w} \phi_w + \underbrace{\left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}} \right)}_{a_e} \phi_e + \underbrace{\left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}} \right)}_{a_s} \phi_s + \underbrace{\left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}} \right)}_{a_s} \phi_n + S_u \quad (2.20)$$

(l'équation (2.20) peut être écrite sous la forme d'équation générale discretisée pour les nœuds internes)

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_s \phi_s + a_n \phi_n + S_u \quad (2.21)$$

ou:

a_w	a_e	a_s	a_n	a_p
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}}$	$a_w + a_e + a_s + a_n - s_p$

Remarque: Les surfaces des faces (w, e, s, n) dans le cas 2-D sont:

$$A_w = A_e = \Delta y \times 1 = \Delta y$$

$$A_n = A_s = \Delta x \times 1 = \Delta x$$

2.7 Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion tridimensionnels (3-D)

La diffusion en régime permanent dans une situation tridimensionnelle (3-D) est gouvernée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_{\phi} = 0 \quad (2.22)$$

Un volume de contrôle typique est montré à la fig. 2.5.

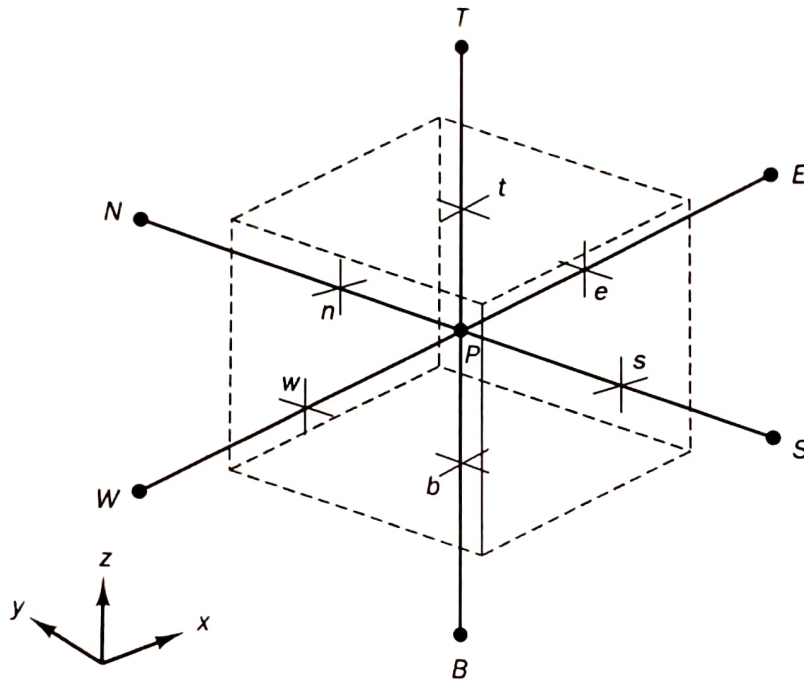


Fig. 2.5: Une cellule en trois dimensions et des nœuds adjacents [2]

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

Une cellule contenant le nœud P a maintenant six nœuds adjacents identifiés comme Ouest, Est, Sud, Nord, bas et top (haut) (W, E, S, N, B, T). Les notations w, e, s, n, b et t sont utilisées pour désigner respectivement les faces Ouest, Est, Sud, Nord, Bottom et Top.

L'intégration de l'éq. (2.22) sur le volume de contrôle de la fig. 2.5 donne:

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} DV = 0 \quad (2.23)$$

En suivant la procédure développée pour les cas (1-D) et (2-D), la forme discrétisée de l'éq. (2.23) est:

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_e - \phi_p}{\delta x_{pe}} \right) A_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{\delta x_{wp}} \right) A_w \right] \\ & + \left[\Gamma_n \left(\frac{\phi_n - \phi_p}{\delta y_{pn}} \right) A_n - \Gamma_s \left(\frac{\phi_p - \phi_s}{\delta y_{sp}} \right) A_s \right] \\ & + \left[\Gamma_t \left(\frac{\phi_t - \phi_p}{\delta z_{pt}} \right) A_t - \Gamma_b \left(\frac{\phi_p - \phi_b}{\delta z_{bp}} \right) A_b \right] \\ & + (S_u + S_p \phi_p) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

L'équation (2.24) peut être réécrite pour donner l'équation discrétisée pour les nœuds internes:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u \quad (2.25)$$

où:

a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_p$

2.8. Systèmes de Coordonnées polaires

Pour illustrer la détermination de l'équation de discrétisation en coordonnées polaires, nous allons considérer la situation bidimensionnelle en r et θ .

L'équation de diffusion en régime permanent en r - θ est:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{K}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S = 0 \quad (2.26)$$

où T est la température, K la conductivité thermique.

Le maillage et le volume de contrôle en coordonnées (r, θ) sont montrés à la figure 2.7. L'épaisseur dans la direction z du volume de contrôle est supposée être égale à l'unité.

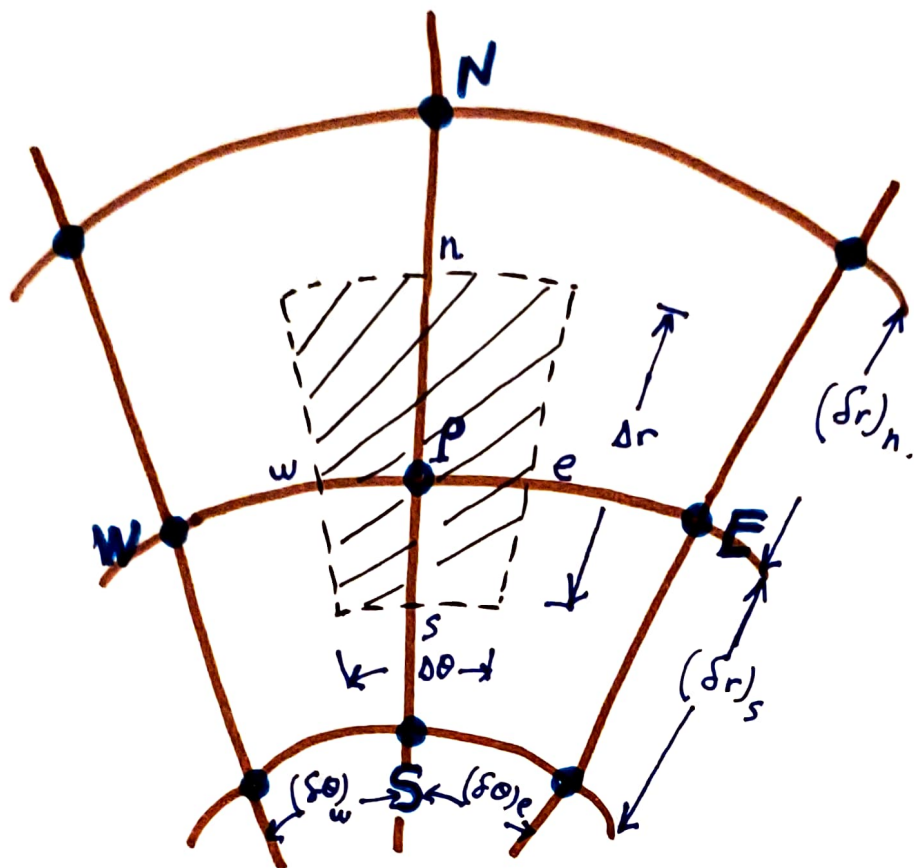


Fig. 2.7: Volume de Contrôle en Coordonnées polaires.

Pour obtenir l'équation discrétisée, nous multiplions l'éq. (2.26) par r et intégrons sur le volume de contrôle en r et θ , $r dr d\theta$ (un élément de volume d'épaisseur unitaire).

En suivant la même procédure que dans la section 2.5 (cas 2D), nous obtenons l'équation discrétisée

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + S_u \quad (2.27)$$

Avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{K_e \Delta r}{r_e (\delta\theta)_e} \\ a_W = \frac{K_w \Delta r}{r_w (\delta\theta)_w} \\ a_N = \frac{K_n r_n \Delta\theta}{(\delta r)_n} \\ a_S = \frac{K_s r_s \Delta\theta}{(\delta r)_s} \\ a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \end{array} \right.$$

2.9. Détermination de la conductivité K_e à l'interface

Pour une bonne représentation du flux thermique à l'interface "e" de la fig. 2.8:

$$q_e = \frac{K_e (T_P - T_E)}{(\delta x)_e} \quad (2.28)$$

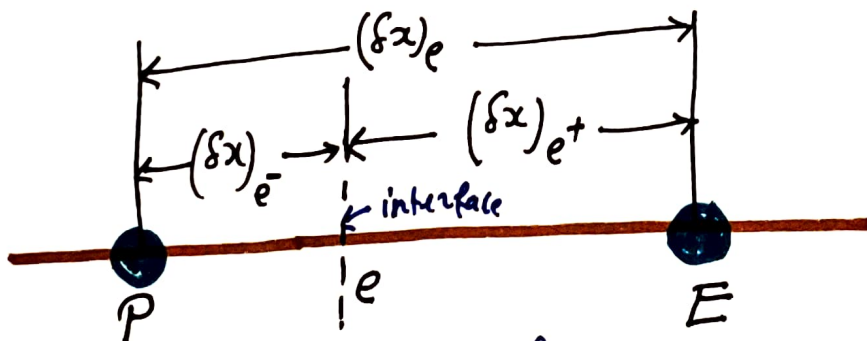


Fig. 2.8: Les distances associées avec l'interface e

L'expression de K_e conduit à un q_e correct.

Chapitre 2: La Méthode des Volumes Finis pour les Problèmes de diffusion

Considérons que le volume de contrôle entourant le point de grille P est rempli d'un matériau de conductivité uniforme K_P , et celui entourant E d'un matériau de conductivité K_E .

Le flux thermique (1-D) en régime permanent est:

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_e / K_P + (\delta x)_e / K_E} \quad (2.29)$$

En combinant les eqs (2.18) - (2.29):

$$K_e = \left(\frac{1 - f_e}{K_P} + \frac{f_e}{K_E} \right)^{-1} \quad (2.30)$$

avec: $f_e = \frac{(\delta x)_e}{(\delta x)_e}$

Lorsque l'interface "e" est placée à mi-chemin entre P et E , on a $f_e = 0,5$; alors

$$K_e^{-1} = 0,5 (K_P^{-1} + K_E^{-1}) \quad (2.31a)$$

ou
$$K_e = \frac{2 K_P K_E}{K_P + K_E} \quad (2.31b)$$

Une expression similaire peut être écrite pour au

2.10. Récapitulatif des équations discrétisées pour les problèmes de diffusion

- Les équations discrétisées pour les problèmes de diffusion (1-D), (2-D), et (3-D) ont été trouvées pour prendre la forme suivante:

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_u \quad (2.32)$$

où $\sum$ indique une sommation sur tout les nœuds adjacents (nb), et a_{nb} sont les coefficients adjacents, a_w, a_e en 1-D, a_w, a_e, a_s, a_n en 2-D et $a_w, a_e, a_n, a_s, a_b, a_t$ en 3-D; ϕ_{nb} sont les valeurs de la variable ϕ aux nœuds adjacents et $(S_u + S_p \phi_p)$ est le terme source linéarisé.

- Pour tout les cas, les coefficients autour du nœud P ont la forme suivante:

$$a_p = \sum a_{nb} - S_p \quad (2.33)$$

- Un récapitulatif des coefficients adjacents pour les problèmes de diffusion 1-D, 2-D, et 3-D est donné dans le tableau 2.1.

	a_w	a_e	a_s	a_n	a_b	a_t
1-D :	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	—	—	—	—
2-D :	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}}$	—	—
3-D :	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{bp}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{pt}}$

2.11. Règles de base (Règles de Patankar)

- Règle N°1 : Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les volumes de contrôle voisins considérés.
- Règle N°2 : Tous les coefficients $a_p, a_s, a_n, \dots$ etc doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.
Supposons que dans l'éq. (2.13) : $a_p \phi_p = a_w T_w + a_E T_E + S_u$
 $\phi = \text{Température}$
 $a_p > 0, a_E > 0$ et $a_w < 0$. Alors, si T_w augmente, il faut que T_p baisse, donc on obtient un comportement physique non-réalisé.
- Règle N°3 : Lors de la linéarisation du terme source :
$$\bar{S}_{OV} = S_u + S_p \phi_p \quad (\text{eq. 2.12}),$$

 S_p doit être < 0 , car sinon on peut avoir $a_p < 0$ avec $a_E, a_w, \dots > 0$.
(Contraire à la règle N°2).
tout les coefficients doivent avoir le même signe.