الإجابة النموذجية لامتحان الإحصاء 3

سنة ثانية ليسانس
علوم مالية ومحاسبة 2023/2022

08/08

التمرين الأول (إجباري):

$Z \rightsquigarrow N(0;1)$ ، $X \rightsquigarrow N(4;16)$

• $P(Z<3,42)=?$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$P(Z<3,42)=\phi(3,42)=\boxed{0,9996}$ 01

وجدنا العمدة في تقاطع السطر 35 والعمود 3. 01

• $P(X>6)=?$

نحول X إلى Z المعيارية:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \rightsquigarrow N(0;1)$ 01

$P(X>6)=1-P(X\leq 6)=1-P\left(Z\leq \dfrac{6-4}{\sqrt{16}}\right)=1-P(Z\leq 0,5)$

$=1-\phi(0,5)=1-0,6914$

01 $=\boxed{0,3086}$

• $P(Z<a)=0,5792 \Rightarrow a=??$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد العمدة 0,5792 في تقاطع السطر 3 مع العمود 1 وبذلك تكون عمدة a هي 0,2 02 $\boxed{a=0,2}$

• $P(Z<-b)=0,0113 \Rightarrow b=??$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بالقيم السالبة نجد العمدة 0,0113 في تقاطع السطر 18 والعمود 2. وبذلك تكون عمدة b هي $\boxed{b=2,28}$

02

التمرين 2 (إختباري):

1) $n = 30$; $\mu = 20$; $\sigma^2 = 16$ ، X مجهول التوزيع.

- **التوزيع الإحتمالي للمتوسط الحسابي للعينة:**

بما أن حجم العينة يعتبر كبير $(n = 30)$، فإنه وحسب نظرية النهاية المركزية توزيع المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سوف يكون طبيعيا لمتوسط $\mu = 20$ وتباين $S^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16}{30}$، أي: 01

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu ; \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(20 ; \frac{16}{30}\right)$$ 01

- **التوزيع الإحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:**

$n_1 = 30$ $\quad \mu_1 = 20$ $\quad \sigma_1^2 = 16$

$n_2 = 40$ $\quad \mu_2 = 25$ $\quad \sigma_2^2 = 9$

X_1 و X_2 مجهولي التوزيع.

بما أن حجم العينتين كبير $(n_1 \geq 30)$ و $(n_2 > 30)$ فإنه وحسب نظرية النهاية المركزية يكون التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين هو الآخر موزعا طبيعيا: 01

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) = N\left(-5 ; \frac{16}{30} + \frac{9}{40}\right)$$ 01

- **اختبار فرضية أن متوسط المجتمع يساوي 19 من السؤال 1:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 19 \\ \text{vs} \\ H_1: \mu \neq 19 \end{cases}$$ 0,5

. الاختبار من جانبين ومستوى المعنوية $\alpha = 5\%$، وبذلك تكون القيم الجدولية هي:

$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$ 0,5 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

. وتكون قيمة Z_c المحسوبة هي:

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{20 - 19}{\sqrt{\frac{16}{30}}} = 1{,}36$$ 0,5

وبذلك:

$$|Z_c| < |Z_t|$$

وهي تقع في منطقة ~~الرفض~~ القبول، أي نرفض فرضية متوسط المجتمع يساوي 19. 0,5

التمرين 3 ○ (إختياري): $\boxed{1}$

$n = 20 \qquad \mu = 70 \qquad S^2 = 4$

• التوزيع الاحتمالي المتوسط:

حجم العينة صغير، وتباين المجتمع الطبيعي مجهول، وبذلك ~~...~~ التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينة سوف يتبع ~~...~~ توزيع ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$: 01

$$\bar{x} \rightsquigarrow t_{(n-1)} \quad 19 \qquad T = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \rightsquigarrow t_{(n-1)}$$

• احتمال أن يكون متوسط طول الشجيرة أقل من 68 سم:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \rightsquigarrow t_{(n-1)} = \frac{\bar{x}-70}{\sqrt{\frac{4}{20}}}$$ 01

$$P(\bar{x} < 68) = P\left(t < \frac{68-70}{\sqrt{\frac{4}{20}}}\right) = P(t < -4,47)$$ 01 $$= P(t > 4,47)$$

من جدول توزيع ستودنت عند درجة حرية 19 نجد:

$$\boxed{P(t > 4,47) = 0,01}$$ 01

• اختبار فرضية متوسط المجتمع يساوي 68 سم:

$$\begin{cases} H_0: \mu_0 = 68 \\ \text{vs} \\ H_1: \mu_0 \neq 68 \end{cases}$$ 0,5

$$-t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} = -1,729$$ 0,5 $$t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} = 1,729$$

$$t_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{70-68}{\sqrt{\frac{4}{20}}} = 2,24$$ 0,5

$$|t_c| > |t_t|$$

وبذلك نرفض فرضية متوسط المجتمع يساوي 68 سم. 0,5

الصفحة 4

التمرين 04 (إختياري):

- $n=16 \; ; \; S=1,5 \; ; \; \bar{X}=49,5 \qquad \alpha=1\%$

مجال الثقة للمتوسط μ:

تباين المجتمع الطبيعي مجهول، نستبدله بتباين العينة، وحيث أن حجم العينة صغير فإن التوزيع الاحتمالي للمتوسط يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$ 0,5

وبذلك يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع هو:

$$\bar{X} - t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$ 0,5

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} \Rightarrow t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)} = t_{(0,005;15)} = 2,947$$ 0,5

بالتعويض نجد:

$$49,5 - 2,947\sqrt{\frac{(1,5)^2}{16}} \leq \mu \leq 49,5 + 2,947\sqrt{\frac{(1,5)^2}{16}}$$

$$\boxed{48,52425 \leq \mu \leq 50,4757}$$ 0,5

- مجال الثقة لتباين الأوزان عند $\alpha = 5\%$:

$$\frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2};n-1)}}$$ 0,1

من جدول مربع كاي نجد:

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} = \chi^2_{(0,975;15)} = 6,27$$ 0,5 $$\chi^2_{(\frac{\alpha}{2};n-1)} = \chi^2_{(0,025;15)} = 27,49$$

$$\frac{(15)(1,5)^2}{6,27} \geq \sigma^2 \geq \frac{(15)(1,5)^2}{27,49}$$ 0,5

$$\boxed{0,3588 \geq \sigma^2 \geq 0,0818}$$

- اختبار فرضية متوسط المجتمع يساوي 50:

$$\begin{cases} H_0: \mu_0 = 50 \\ vs \\ H_1: \mu_0 \neq 50 \end{cases}$$ 0,5

$$-t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} = -1,753 \qquad t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} = 1,753$$ 0,5

$$t_c = \frac{49,5-50}{\sqrt{\frac{(1,5)^2}{16}}} = -1,33$$ 0,5

$$|t_c| < |t_t|$$

وبذلك نرفض فرضية متوسط المجتمع يساوي 50. 0,5

التمرين 05 (اختياري)

$n_1 = 75$ $\quad \bar{X}_1 = 14$ $\quad S_1 = 2$ $\quad \alpha = 5\%$

$n_2 = 50$ $\quad \bar{X}_2 = 12$ $\quad S_2 = 1,5$

اختبار فرضية وجود فرق معنوي بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \text{vs} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$ 01

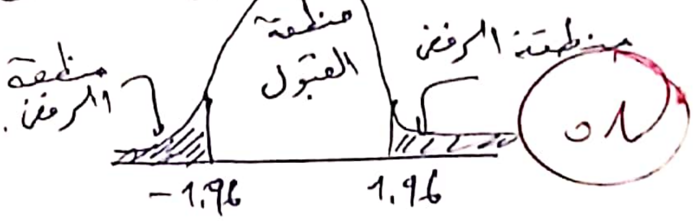
الاختبار من جانبين (جهتين) وبذلك تكون القيم الجدولية هي:

$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1,96$ 01 $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

أما احصائية الاختبار:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{4}{75} + \frac{2,25}{50}}} = 6,37$$ 02

حيث Z المحسوبة أكبر من القيم الجدولية ومنه نرفض الفرضية H_0 !! 01
يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين.



01

انتهى.