Corrigé Type Alg 3

Exercice 01 :

1) La forme de Jordan : On calcul $P_A(\lambda)$.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \left[\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2. \end{array} \right.$$ (0,5)

Alors : $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$; $sp(A) = \{2, 2\}$. (0,5)

Donc : $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5)

2) Calculer J^n : on a : $J = D + N$ (0,25) avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La formule de Binome donne : $J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$ (0,25)

Mais : $N.N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N^2$ (0,25)

Donc : $J^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N = D^n + n D^{n-1} N$ (0,25)

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ (0,5)

3) Matrice de Passage : On calcule les sous-espace propre :

* $E_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (0,25)

Soit : $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ y = -\frac{1}{2} x. \right.$ (0,5)

$E_2 = \left\{ (x, -\frac{1}{2} x) \,;\, x \in \mathbb{R} \right\} = \langle (2, -1) \rangle$ (0,25)

* Complétons nous la base : $(A - 2I) w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (0,25)

soit : $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ (0,5)

$E_\lambda = \left\{ (x, \frac{1}{2} - \frac{x}{2}) \,;\, x \in \mathbb{R} \right\} = \langle (2, -1) ; (0, 1) \rangle$ (0,2)

Donc : $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (0,5)

4) Calculs A^n : On a : $A^n = P J^n P^{-1}$

On calcul d'abord P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{Com} P^t$

- $\det P = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ 0,5

- $\text{Com} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc : $A^n = P J^n P^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 1

Exercice 02

1) $\det(f) = 0 \Rightarrow f$ n'est pas injectif 1

$\Rightarrow \ker(f) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists v \in E$; $f(v) = 0 = 0.v$ 1

En vertu de la déf. formelle des v.p, v sont des vecteurs propres associés à la valeurs "0".

2) On a $f^2(v) = \lambda^2 v$ 0,5

$f^2 = -2 Id_E \Rightarrow f^2 + 2 Id_E = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 v + 2v = 0$

$\Rightarrow (\lambda^2 + 2) v = 0$ 1

$\Rightarrow v = 0$ car $\lambda^2 + 2 \neq 0$

(contradiction) 0,5

Donc : f n'admet pas des vecteurs propres

Suite Exercice(01)

Calcule de e^{At} : $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} & \frac{t^2}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

2pts

Exercice(03)

1) Calculer x et y : (0,1)

On a : $AX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soit : $\begin{cases} x+5 = \lambda \\ 2y+4 = 2 \\ 3\lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ (1)

2) $x = y = 1$: Diagonalisation :

$C_1 \leftarrow C_2 - C_1$ (0,1) (0,1)

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda)$ (0,1) (0,1)

$P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)$; $sp(A) = \{\overset{d}{0}, \overset{s}{3}\}$

* les sous-espaces propres :

• $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ (0,1)

Soit : $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -x-y$ (0,1)

(0,1)

$E_0 = \{(x, y, -x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1) ; (0,1,-1) \rangle$

• $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(0,1)

Soit : $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z. \end{cases}$ 0,5

Alors $E_3 = \langle (1,1,1) \rangle$ 0,5

Donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5