Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF-Mila
Institut de science et de technologie

Département de science et technique
Master II Electromécanique — année universitaire 2022/2023
Module Techniques de Commande Avancés

Corrigé Type

Exercice 01 (10 points)

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0$$
$$-4x_2 - x_3 + \dot{x}_2 = u$$
$$2x_3 + \dot{x}_3 = 0$$
$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

1. Représentation du système sous une forme d'état. 0,50 0,50

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

0,50

2. Calcul de la fonction de transfert $H(s)$.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+3}{s^2 - 2s - 8}$$

01,0

3. Stabilité du système

On a le polynôme caractéristique du système

$$D(s) = s^2 - 2s - 8$$

1,00 0,50

Dont les solutions $s_1 = -2, s_2 = -2$ et $s_3 = 4$ ce qui implique l'instabilité du système

4. Calcul de la sortie $y(t)$.

On a

$$y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}\big(x(0) + BU(s)\big) = C(sI - A)^{-1}\left(x(0) + \frac{1}{s}B\right)$$

0,50

$$(sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}s+2 & -1 & 0\\ 0 & s-4 & -1\\ 0 & 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s-4)} & \frac{1}{(s+2)^2(s-4)}\\ 0 & \frac{1}{s-4} & \frac{1}{(s+2)(s-4)}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$y(s) = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s-4)} & \frac{1}{(s+2)^2(s-4)} \\ 0 & \frac{1}{s-4} & \frac{1}{(s+2)(s-4)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{s}\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{\boldsymbol{s+3}}{\boldsymbol{s(s+2)(s-4)}}$$ 0,50

$$= -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}s} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}(s+\mathbf{2})} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}(s-\mathbf{4})}$$ 0,25

$$y(t) = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}e^{-2t} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}e^{4t}$$ 0,25

5. Commndabilité du système

On a la matrice de commandabilité

$$M_c = [B\ AB\ \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 0,50

$$\det(M_c) = 0$$ 0,50

0,50

Donc le système est non commandable.

6. Forme commandable. 01,00

D'après la réponse 5 le système est non commandable, donc on ne peut pas mettre le système sous forme cannonique de commande.

7. Commande par retour d'état $u = -Kx + y_r$ de gain $K = [k_1\ k_1\ k_3]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : $-4, \quad -3 \pm j6$. 01,00

D'après la réponse 5 le système est non commandable, donc on ne peut pas calculer la commande par retour d'état.

8. Calcul de la valeur finale de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire. 0,50

Nous n'avons appliqué aucune commande sur le système ce qui implique l'absence de la boucle fermée.

<u>Exercice 02</u> (05 points)

On considère le problème de commande pour le système du deuxième ordre suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{y} = [-1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Calcul de la commande optimale $\boldsymbol{u = -Kx}$ minimisant le critère suivant :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (y^2 + u^2)\, dt$$

La commande optimale est donnée par $\boldsymbol{u = -R^{-1}B^TPx}$ 0,50

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T C = 0$$ — 0,50.

et $Q = 1$ et $R = 1$.

On calcul la solution de l'équation de Riccati

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Ce qui implique

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11}+p_{12} \\ 0 & p_{21}+p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11}+p_{21} & p_{12}+p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Il en résulte le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -p_{12}p_{21} + 1 = 0 & — 0{,}50 \\ p_{11} + p_{12} - p_{12}p_{22} - 1 = 0 & — 0{,}50 \\ p_{11} + p_{21} - p_{21}p_{22} - 1 = 0 & — 0{,}50 \\ p_{21} + p_{12} + 2p_{22} - p_{22}^2 + 1 = 0 & — 0{,}50 \end{cases}$$

D'où

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ — 01,00

En fin

$$u = -R^{-1}B^T Px = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ — 0,50

Le retour d'état optimal est tel que

$$K = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$ — 0,50.

<u>Exercice 03</u> (05 points)

1. Les avantages de la commande adaptative par rapport aux autres types de commande

La commande adaptative est un technique de commande robuste utiliser pour la commande des systèmes incertains, à paramètre inconnus, mal connus ou variant dans le temps — 0,50

2. La commande adaptative se distingue de tous les autres types de commande par

La loi d'adaptation paramétrique — 0,50

3. Les principaux types de la commande adaptative et l'explication de la différence entre eux

0,50 0,50

Commande adaptative **direct** dans laquelle la loi d'adaptation paramétrique estime directement les paramètres de la commande.

0,50 0,50

Commande adaptative **indirect** dans laquelle la loi d'adaptation paramétrique estime les paramètres du système puis les utilise dans le calcul de la commande

4. Soit le système du premier ordre suivant :

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} U(s)$$

où $b > 0$ et a sont deux constantes inconnus. Les performances désirées du système sont spécifiées par le modèle de référence suivant :

$$Y_m(s) = \frac{1}{s+1} r(s)$$

Calcul de la commande adaptative par modèle de référence

$\dot{y} + ay = bu$ Modèle du système

$\dot{y}_m + y_m = r$ Modèle de référence 0,50

On a $\dot{y} + y = b\left(u - \frac{a-1}{b} y\right)$ ce qui implique $\dot{e} = -e + b\left(u - \frac{a-1}{b} y - \frac{1}{b} r\right) \equiv -e + b(u - a_y y + a_r r)$

où $a_y = \frac{a-1}{b}$ et $a_r = \frac{1}{b}$.

La commande adaptative est alors

$$u = \hat{a}_r r + \hat{a}_y y$$ 0,50

telle que

$$\dot{\hat{a}}_r = -\gamma_r . e . r$$ 0,50
$$\dot{\hat{a}}_y = -\gamma_y . e . y$$ 0,50

Avec γ_r et γ_y sont des paramètres d'adaptation paramétrique.