# Table des matières

# Chapitre 1

# *Fonctions circulaires réciproques, Fonctions hyperboliques et leurs réciproques*

## 1.1 *Fonctions circulaires réciproques*

### 1.1.1 *Fonction Arc sinus:*

*La fonction* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ *est continue et strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, donc elle est bijective et admet une fonction réciproque continue et strictement croissante sur* $[-1,1]$*; notée:*

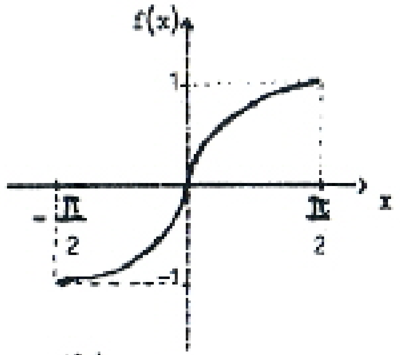
$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\left(\forall x \in [-1,1]\,; y = \arcsin x \Longrightarrow x = \sin y, \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

*De plus la fonction* arcsin *est indéfiniment dérivable sur* $]-1,1[$.

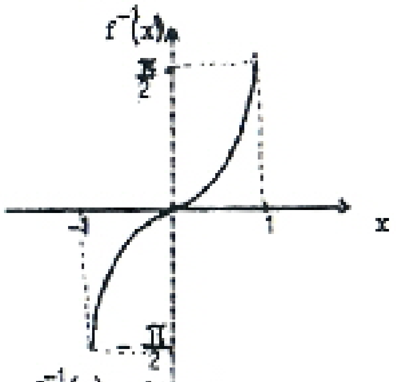
*i.e:* $\arcsin \in C^{\infty}\left(]-1,1[\right)$.

*et on a:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \forall x \in ]-1,1[.$$
$$(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}; \quad \forall f(x) \in ]-1,1[.$$




$f(x) = \sin x$




$f^{-1}(x) = \text{Arc} \sin x$

*On a:*

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \arcsin(0) = 0 \quad ; \quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

### 1.1.2 *Fonction Arc cosinus:*

*La fonction* $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *est continue et strictement décroissante sur* $[0, \pi]$, *donc elle est bijective et admet une fonction réciproque continue et strictement décroissante sur* $[-1, 1]$*; notée:*

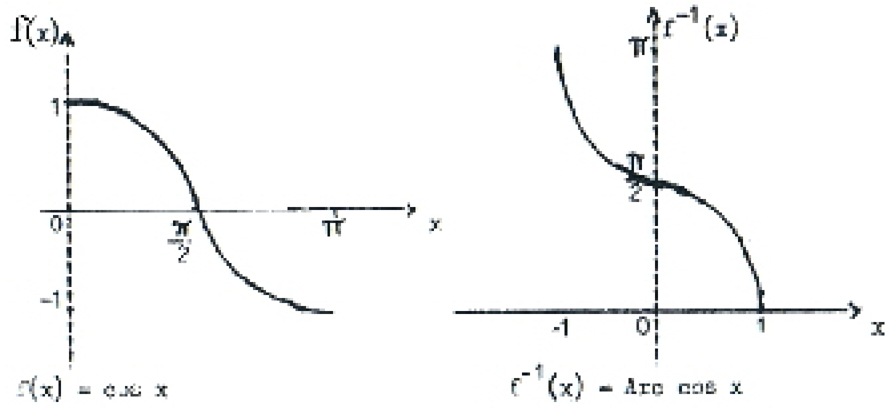
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$
$$(\forall x \in [-1, 1] \, ; y = \arccos x \Longrightarrow x = \cos y, \forall y \in [0, \pi]).$$

*De plus la fonction* arccos *est indéfiniment dérivable sur* $]-1, 1[$.

*i.e:* $\arccos \in C^{\infty}(]-1, 1[)$.

*et on a:*

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$
$$(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}; \quad \forall f(x) \in ]-1, 1[.$$




*On a:*

$$\begin{array}{lll}
\arccos(-1) = \pi & ; \quad \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} & ; \quad \arccos(1) = 0 \\
\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\pi}{3} & ; \quad \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} & ; \quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4} \\
\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} & ; \quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6} & ; \quad \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}
\end{array}$$

- *On peut montrer facilement que:*

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi, \qquad \forall x \in [-1,1].$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in [-1,1].$$

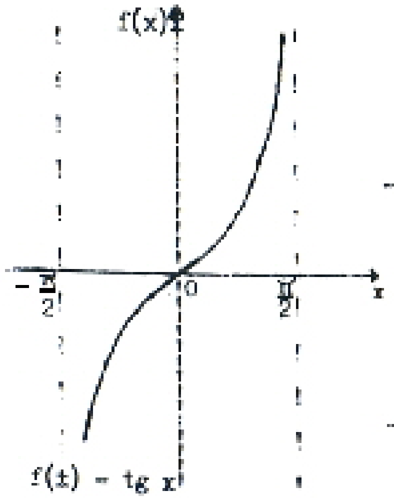
### 1.1.3 *Fonction Arc tangente:*

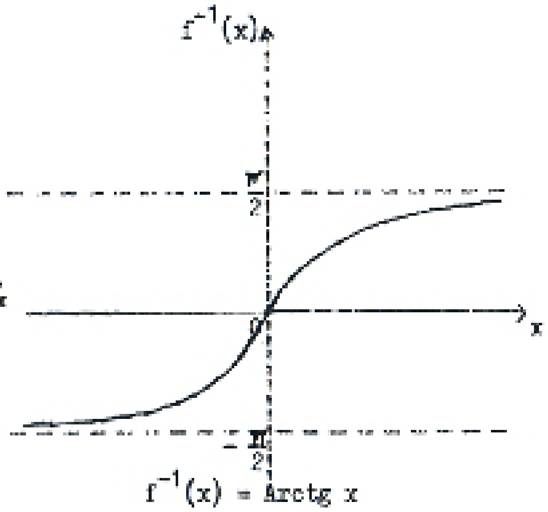
*La fonction* $\mathrm{tg}\ : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *donc elle est bijective et admet une fonction réciproque continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*; notée:*

$$\mathrm{arctg}\ : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}; y = \mathrm{arctg}\ x \Longrightarrow x = \mathrm{tg}\ y, \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

*De plus* $\mathrm{arctg} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *et on a:*

$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$(\mathrm{arctg}\ f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}; \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}.$$




### 1.1.4 *Fonction Arc cotangente:*

*La fonction* cotg $: ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et strictement décroissante sur* $]0, \pi[$, *donc elle est bijective et admet une fonction réciproque continue et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$; *notée:*

$$\begin{gathered} \operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, \pi[ \\ (\forall x \in \mathbb{R}; y = \operatorname{arccotg} x \Longrightarrow x = \operatorname{cotg} y, \quad \forall y \in ]0, \pi[) \, . \end{gathered}$$

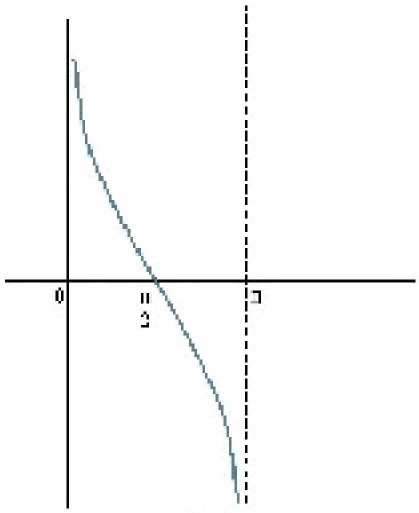
*De plus* $\operatorname{arccotg} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *et on a:*

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

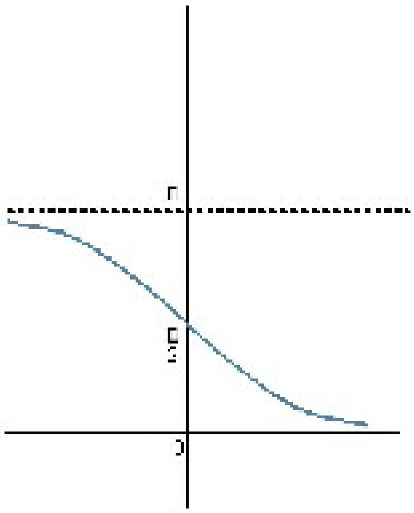
$$(\operatorname{arccotg} f(x))' = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}; \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}.$$

*On a:*

$$\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$



*Cotgx*



*Arccotgx*

- *On peut montrer facilement que:*

$$\text{arctg } x + \text{arccotg } x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0.$$
$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \forall x < 0.$$

## 1.2 *Fonctions hyperboliques et leurs réciproques*

### 1.2.1 *Fonctions hyperboliques*

***Définitions:***

- *La fonction* $ch\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *s'appelle cosinus hyperbolique.*
- *La fonction* $sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *s'appelle sinus hyperbolique.*
- *La fonction* $th\ x = \dfrac{sh\ x}{ch\ x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ *s'appelle tangente hyperbolique.*
- *La fonction* $coth\ x = \dfrac{1}{th\ x} = \dfrac{ch\ x}{sh\ x} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ *avec* $x \neq 0$ *s'appelle cotangente hyperbolique.*
- *La fonction* $ch$ *est paire et les fonctions* $sh$, $th$, $coth$ *sont impaires.*

- *Les fonctions* $ch$, $sh$, $th \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *et la fonction* $coth \in C^{\infty}(\mathbb{R}/\{0\})$ *on a:*

  $*$ $(sh\ x)' = ch\ x$

  $*$ $(ch\ x)' = sh\ x$

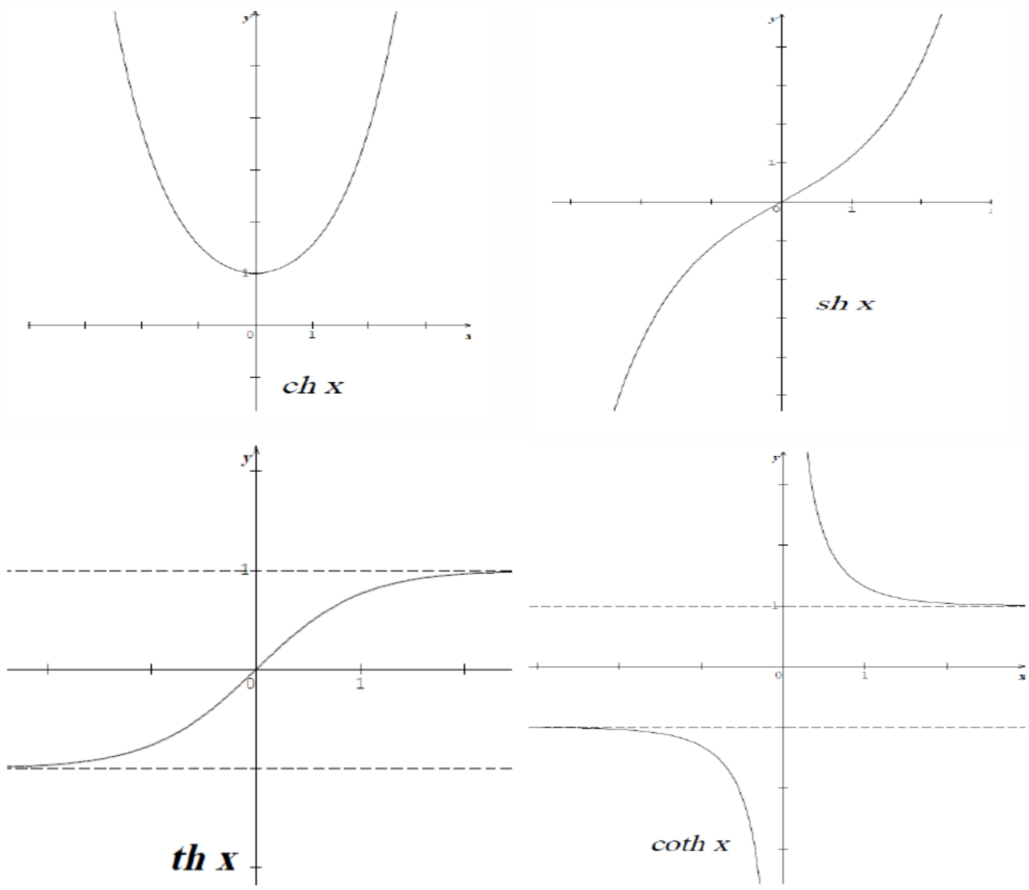
  $*$ $(th\ x)' = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$

  $*$ $(coth\ x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x} = 1 - coth^2 x$

***<u>Relations:</u>***

1) $ch\ x + sh\ x = e^x$.
2) $ch\ x - sh\ x = e^{-x}$.
3) $ch^2 x - sh^2 x = 1$.
4) $ch(x+y) = ch\ x\ ch\ y + sh\ x\ sh\ y$.
5) $ch(2x) = ch^2 x + sh^2 x = 1 + 2sh^2 x = 2ch^2 x - 1$.
6) $sh(x+y) = sh\ x\ ch\ y + sh\ y\ ch\ x$.
7) $sh(2x) = 2sh\ x\ ch\ x$.

***<u>Graphes des fonctions hyperboliques:</u>***




### 1.2.2 *Fonctions hyperboliques réciproques*

**1-** ***Fonction argument sinus hyperbolique:***

*La fonction* $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, donc elle est bijective, sa fonction réciproque est continue et strictement croissante appelée* ***Argument sinus hyperbolique*** *et noté:*

$$Argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}; y = Argsh\ x \Longleftrightarrow x = sh\ y, \quad \forall y \in \mathbb{R}).$$

*On peut écrire* $Argsh\ x$ *à l'aide de la fonction logarithmique:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Argsh\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

*et on a:* $Argsh \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *et*

$$(Argsh\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**2- *Fonction argument cosinus hyperbolique:***

*La fonction* $ch : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$ *n'est pas strictement monotone sur* $\mathbb{R}$. *Alors; on a considèré sa restriction sur* $]-\infty, 0]$ *ou* $[0, +\infty[$.

*La restriction ch sur* $[0, +\infty[$

*i.e:* $ch : [0, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[$ *est continue et strictement croissante, donc elle est bijective, sa fonction réciproque est continue et strictement croissante appelée* ***Argument cosinus hyperbolique*** *et noté:*

$$Argch : [1, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$(\forall x \geq 1;\ y = Argch\ x \Longleftrightarrow x = ch\ y, \quad \forall y \in [0, +\infty[) .$$

*On peut écrire* $Argch\ x$ *à l'aide de la fonction logarithmique:*

$$\forall x \geq 1,\ Argch\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

*et on a:* $Argch \in C^{\infty}(]1, +\infty[)$ *et*

$$(Argch\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \forall x > 1.$$

**3- *Fonction argument tangente hyperbolique:***

*La fonction* $th : \mathbb{R} \longrightarrow ]-1, 1[$ *est continue et strictement croissante, donc elle est bijective, sa fonction réciproque est continue et strictement croissante appelée* ***Argument tangente hyperbolique*** *et notée:*

$$Argth : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\forall x \in ]-1, 1[;\ y = Argth\ x \Longleftrightarrow x = th\ y, \quad \forall y \in \mathbb{R}) .$$

*On a aussi:*

$$Argth\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right); \quad \forall x, \ |x| < 1$$

*De plus :* $Argth \in C^{\infty}(]-1, 1[)$ *et on a:*

$$(Argth\ x)' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad \forall x, \ |x| < 1.$$

## 4- ***Fonction argument cotangente hyperbolique:***

*La fonction coth* $: \mathbb{R}^* \longrightarrow ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ *est continue et strictement décroissante, donc elle est bijective, sa fonction réciproque est continue et strictement décroissante appelée* ***Argument cotangente hyperbolique*** *et notée:*

$$Argcoth\ : ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(\forall x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[;\ y = Argcoth\ x \Longleftrightarrow x = coth,\quad \forall y \in \mathbb{R}^*)\,.$$

*On a aussi:*

$$Argcoth\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right);\quad \forall x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

*De plus :* $Argcoth\ \in C^{\infty}(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$ *et on a:*

$$(Argcoth\ x)' = \frac{1}{1-x^2};\quad \forall x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\,.$$