

Série d'exercices N 02

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes

❶ $\int x^2(1 - x^3)^4 dx$

❷ $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

❸ $\int 1 + \tan^2(x) dx$

❹ $\int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^3} dx$

❺ $\int x e^{-4x^2+9} dx$

❻ $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + 2x^3}} dx.$

Exercice 2

Par l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes

❶ $\int x^2 \sin x dx$

❷ $\int x e^x dx$

❸ $\int (\ln x)^2 dx$

❹ $\int \arctan x dx.$

Exercice 3

Faire le changement de variable pour calculer les intégrales suivantes

❶ $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

❷ $\int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx$

❸ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

❹ $\int \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx.$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes

❶ $\int_{-3}^1 |x+1| dx$

❷ $\int_0^\pi \cos^4(x) \sin x dx$

❸ $\int_1^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{2x - 1} dx,$

❹ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$

❺ $\int_2^3 \frac{3x+2}{x^2+x-2} dx$

❻ $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx.$

Formulaire : Dérivées et primitives usuelles

Dans tout le formulaire, les quantités situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I .

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	\mathbb{R}	0
x	\mathbb{R}	1
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	\mathbb{R}	e^x
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Opérations et dérivées

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f', \lambda \text{ désignant une constante}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f \\ g \end{pmatrix}' = \frac{g'}{g^2} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En particulier, si $u > 0 : \forall a \in \mathbb{R}$,

$$(u^a)' = au^{a-1}$$

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle I . Ces primitives sont uniques à une constante près notée C .

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	\mathbb{R}	$\lambda x + C$
x	\mathbb{R}	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	\mathbb{R}_+^*	$x \ln x - x + C$
e^x	\mathbb{R}	$e^x + C$
$\sin x$	\mathbb{R}	$-\cos x + C$
$\cos x$	\mathbb{R}	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
 - Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
 - Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).
 - Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I).
 - Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
 - Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u .
- En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + C & \text{si } a = -1 \end{cases}$$