Centre Universitaire de Mila | Année universitaire 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie | Semestre I

Domaine: LMD-Math (1^{er} année) | Durée $1h$ 30

Analyse I | 11/01/2023

Examen

Exercice 1: (6 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par: $\forall n \geq 1; u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

1) Montrer que: $\forall n \geq 1;\ \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$ 1,5

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. 2

3) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente 1 et trouver sa limite. 1,5

Exercice 2: (7 pts)

1) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \quad ; \quad \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$$

2 ; 1

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & \text{si } 0 < x \leq e \\ ax + b & \text{si } x > e \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$. 4

Exercice 3: (7 pts)

1) On suppose que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont 1 irrationnels, et calculer $\sqrt{\alpha\beta}$. 1
- Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel. 1

2) Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure; si elles existent, de la partie A de $\mathbb{R}$ définie par:

$$A = \left\{\cos(2n\frac{\pi}{7});\ \ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

1,5

3) Montrer l'inégalité suivante:

$$a \leq \sqrt{a^2 + x^2} \leq a + \frac{x^2}{a}\ ; \quad \forall a > 0.$$

2,5

Bon courage

Centre Universitaire de Mila

Analyse I Semestre I

Corrigé de l'examen

Exercice 01 :

1) Montrer que : $\forall n \geq 1$; $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$

preuve par récurrence :

pour $n = 1 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}\right)$ vrai. 0,5

On suppose que $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$, et montre que $\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

On a : $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{16} \leq U_n^2 \leq \frac{9}{16}$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{3}{16} \leq U_n^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{9}{16} + \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}.$$ 0,5

Alors : $\forall n \geq 1$; $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$

2) étudier la monotonie de $(U_n)_{n \geq 1}$:

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 + \frac{3}{16} - U_n$. 0,5

étude du signe $U_n^2 - U_n + \frac{3}{16}$

$\Delta = 1 - 4 \times \frac{3}{16} = \frac{1}{4} > 0$, donc : $U_{n_1} = \frac{3}{4}$, $U_{n_2} = \frac{1}{4}$ 0,5

U_n	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$U_n^2 - U_n + \frac{3}{16}$		+	0	−	0	+	

0,5

On a : $\forall n \geq 1$; $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow U_n^2 - U_n + \frac{3}{16} \leq 0 \Rightarrow$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ donc $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. 0,5

3) On a $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante 0,5 et minorée par $\frac{1}{4}$, 0,5

alors $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers l.

Calcule l :

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to \infty} U_n = l \Rightarrow l = l^2 + \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$$ 0,5

$$\Rightarrow l_1 = \frac{1}{4} \text{ ou } l_2 = \frac{3}{4}$$

et on a : (U_n) est décroissante $\Rightarrow$

$\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq U_n \leq U_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$, 0,5 alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4} \leq U_n < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \lim_{n \to \infty} U_n \leq \frac{1}{2}$

On a : $l_1 = \frac{1}{4} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et $l_2 = \frac{3}{4} \notin [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Alors

$$l = l_1 = \frac{1}{4}. \quad 0{,}5$$

Exercice 2 :

1) Calcule les limites :

* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$, $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$ $\Rightarrow$ 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $b - x < x E\left(\frac{b}{x}\right) \leq b$

et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $b - x > x E\left(\frac{b}{x}\right) \geq b$ 0,5

On est déduit : $\lim_{x \to 0} x E\left(\frac{b}{x}\right) = b$ puis $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$ 0,5

Alors $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$ 0,5

* $\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-\sin x}{1} = -\sin a$ 1

2) $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & \text{si } 0 < x \leq e \\ ax + b & \text{si } x > e \end{cases}$

Détermine a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

On a : $\ln^3 x$ continue et dérivable sur $]0, e[$, et $ax + b$ est continue et dérivable sur $]e, +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$.

– La dérivabilité de f en $x_0 = e$ 0,5

On a : $\lim_{x \overset{>}{\to} e} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} e} f(x) = f(e)$, alors

$\lim_{x \overset{>}{\to} e} ax + b = \lim_{x \overset{<}{\to} e} \ln^3 x = 1 \Rightarrow ae + b = 1$

$\Rightarrow b = 1 - ae$ 0,5

et on a :

* $\lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{ax + b - 1}{x - e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{ax + 1 - ae - 1}{x - e}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} \dfrac{a(x-e)}{x-e} = a$ 0,5

$* \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \dfrac{\ln^3 x - 1}{x-e} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \dfrac{\frac{3}{x}\ln^2 x}{1} = \dfrac{3}{e}$ 0,5

f dérivable en $x_0 = e \iff \lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}$

$\Rightarrow a = \dfrac{3}{e}$ 0,5

et on a : $b = 1 - ae \Rightarrow b = 1 - e \cdot \dfrac{3}{e} = -2$. 0,5

Alors f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $a = \dfrac{3}{e}$ et $b = -2$.

$*$ Calcule $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x}\ln^2 x & \text{si } x \in]0, e] \\ \dfrac{3}{e} & \text{si } x \geq e. \end{cases}$$ 1

<u>Exercice 03 :</u>

1) Suppose que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

– Montrer que α et β sont irrationnels :

On suppose que $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p}{q} ; \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \\ \beta = \dfrac{p'}{q'} ; \ p' \in \mathbb{Z}, q' \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 4\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \\ 6 - 4\sqrt{2} = \dfrac{p'}{q'} \end{cases} \Rightarrow$$ 0,5

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \dfrac{p - 6q}{4q} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} = \dfrac{6q' - p'}{4q'} \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \text{Contradiction } (\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$ 0,5

($p - 6q \in \mathbb{Z}$, $4q \in \mathbb{Z}^*$, $6q' - p' \in \mathbb{Z}$, $4q' \in \mathbb{Z}^*$)

Alors α et β sont irrationnels.

$*$ Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$

$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})} = \sqrt{36-32} = \sqrt{4} = 2$ 1

– Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \in \mathbb{Q}$:

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 2 \times 2 = 16$. 0,5

Alors $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 16$ et $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$ 0,5

2) $A = \{ \cos 2n\frac{\pi}{7},\ n \in \mathbb{Z} \}$.

On a : 7 est une période de la fonction $g : n \to \cos 2n\frac{\pi}{7}$, et g est paire. Alors : 0,5

$$A = \left\{ 1, \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}, \cos\frac{8\pi}{7}, \cos\frac{10\pi}{7}, \cos\frac{12\pi}{7} \right\}$$

d'où $\inf A = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7}$ 0,5

et $\sup A = \cos 0 = \cos 14\frac{\pi}{7} = 1$ 0,5

3) Montrer que : $a \leq \sqrt{a^2+x^2} \leq a + \frac{x^2}{a}$, $\forall a > 0$

Soit $f(t) = \sqrt{a^2+t^2}$; $\forall a > 0$ une fonction sur $[0, x]$

On a : f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ et $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}$ 0,5 d'après théorème des accroissements finis sur $[0, x]$; $\exists c \in]0, x[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 0,5

$\Rightarrow f(x) - f(0) = x f'(c) \Rightarrow f(x) - f(0) = x \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

On a : $f(0) = \sqrt{a^2} = a$ et $c \in]0, x[\Rightarrow c < x \Rightarrow cx \leq x^2$

et $c^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 + a^2 \geq a^2 \Rightarrow \sqrt{c^2+a^2} \geq a$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{1}{a}$ 0,5

$\Rightarrow 0 \leq \frac{cx}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{cx}{a} \leq \frac{x^2}{a}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{cx}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{x^2}{a}$ 0,5

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - f(0) \leq \frac{x^2}{a}$

$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq \frac{x^2}{a} + f(0)$ 0,5

$\Rightarrow a \leq f(x) \leq \frac{x^2}{a} + a$

$\Rightarrow a \leq \sqrt{a^2+x^2} \leq \frac{x^2}{a} + a$; $\forall a > 0$