Corrigé type de l'examen final 2020-2021

Exercice 1 : Classificateur de Bayes (11 points)

Etant donné l'ensemble d'apprentissage dans le tableau ci-dessous :

ID	Age	Revenu	Étudiant	Évaluation du crédit	Classe : acheter ordinateur
1	<=30	Élevé	Non	acceptable	Non
2	<=30	Élevé	Non	excellent	Non
3	31..40	Élevé	Non	acceptable	Oui
4	>40	Moyen	Non	acceptable	Oui
5	>40	Faible	Oui	acceptable	Oui
6	>40	Faible	Oui	excellent	Non
7	31..40	Faible	Oui	excellent	Oui
8	<=30	Moyen	Non	acceptable	Non
9	<=30	Faible	Oui	acceptable	Oui
10	>40	Faible	Oui	acceptable	Oui
11	<=30	Faible	Oui	excellent	Oui
12	31..40	Faible	Non	excellent	Oui
13	31..40	Élevé	Oui	acceptable	Oui
14	>40	Moyen	Non	excellent	Non

1) On propose d'utiliser un classificateur de Bayes Naïve. Donner la formule de la probabilité à posteriori dans ce cas.
2) En utilisant le classificateur de Bayes Naïve, faites une prédiction de la classe à laquelle appartiennent les cas ci-dessous :
   - $x_1 =$ **(âge<=30, le revenu=moyen, étudiant=oui, évaluation crédit=acceptable)**
   - $x_2 =$ **(âge=31..40, le revenu=élevé, étudiant=oui, évaluation crédit=excellent)**
   - $x_3 =$ **(âge>40, le revenu= élevé, étudiant=non, évaluation crédit= excellent)**

Solution :

1) Formule de la probabilité à posteriori:

$$p(y = C_k|\mathbf{x} = x, \mathbf{D}) = \frac{p(\mathbf{x} = x|y = C_k, \mathbf{D})p(y = C_k|\mathbf{D})}{\sum_{j=1}^{K} p(\mathbf{x} = x|y = C_j, \mathbf{D})p(y = C_j|\mathbf{D})}$$

2) Prédiction de la classe des nouvelles données :

Nous avons besoin de calculer $P(oui|E)$ et $P(non|E)$ et les comparer.

$$P(oui|E) = \frac{P(E_1|oui)P(E_2|oui)P(E_3|oui)P(E_4|oui)P(oui)}{P(E)} \qquad P(non|E) = \frac{P(E_1|non)P(E_2|non)P(E_3|non)P(E_4|non)P(non)}{P(E)}$$

avec $P(E) = P(E|oui) \times P(oui) + P(E|non) \times P(non)$

selon le tableau ci-dessus, on a $P(oui) = \frac{9}{14}$ et $P(non) = \frac{5}{14}$

- $x_1 =$ **(âge<=30, le revenu=moyen, étudiant=oui, évaluation crédit=acceptable)**

  Soient les variables E_1, E_2, E_3 et E_4 :
  - E_1 : âge <= 30,
  - E_2 : Revenu = moyen,
  - E_3 : Étudiant = oui,
  - E_4 : Évaluation du crédit = acceptable

$$P(E_1|oui) = 2/9 \qquad P(E_1|non) = 3/5$$
$$P(E_2|oui) = 1/9 \qquad P(E_2|non) = 2/5$$
$$P(E_3|oui) = 6/9 \qquad P(E_3|non) = 1/5$$
$$P(E_4|oui) = 6/9 \qquad P(E_4|non) = 2/5$$
$$P(oui|E) = \frac{2/9 \times 1/9 \times 6/9 \times 6/9 \times 9/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0071}}{\boldsymbol{P(E)}}$$
$$P(non|E) = \frac{1/5 \times 2/5 \times 1/5 \times 2/5 \times 5/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0069}}{\boldsymbol{P(E)}}$$

On a $P(E) = P(E|oui) \times P(oui) + P(E|non) \times P(non) = 0.0139$

D'où : $\boldsymbol{P(oui|E) = 0.5071}$ et $\boldsymbol{P(non|E) = 0.4929}$

Par conséquent, le classificateur Bayes Naïve prédit (« **acheter ordinateur » = OUI)** pour la donnée $\boldsymbol{x_1}$.

- $\boldsymbol{x_2} =$ **(âge=31..40, le revenu=élevé, étudiant=oui, évaluation crédit=excellent)**
  Soient les variables E_1, E_2, E_3 et E_4 :
  - E_1 : Age = 31..40,
  - E_2 : Revenu = élevé,
  - E_3 : Étudiant = oui,
  - E_4 : Évaluation du crédit = excellent

  Nous avons besoin de calculer $\boldsymbol{P(oui|E)}$ et $\boldsymbol{P(non|E)}$ et les comparer.

$$P(E_1|oui) = 4/9 \qquad P(E_1|non) = 1/9$$
$$P(E_2|oui) = 2/9 \qquad P(E_2|non) = 3/9$$
$$P(E_3|oui) = 6/9 \qquad P(E_3|non) = 2/9$$
$$P(E_4|oui) = 3/9 \qquad P(E_4|non) = 4/9$$
$$P(oui|E) = \frac{4/9 \times 2/9 \times 6/9 \times 3/9 \times 9/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0141}}{\boldsymbol{P(E)}}$$
$$P(non|E) = \frac{1/9 \times 3/9 \times 2/9 \times 4/9 \times 5/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0013}}{\boldsymbol{P(E)}}$$

On a $P(E) = P(E|oui) \times P(oui) + P(E|non) \times P(non) = 0.0154$

D'où : $\boldsymbol{P(oui|E) = 0.9156}$ et $\boldsymbol{P(non|E) = 0.0844}$

Par conséquent, le classificateur Bayes Naïve prédit (« **acheter ordinateur » = OUI)** pour la donnée $\boldsymbol{x_2}$.

- $\boldsymbol{x_3} =$ **(âge>40, le revenu= élevé, étudiant=non, évaluation crédit= excellent)**
  Soient les variables E_1, E_2, E_3 et E_4 :
  - E_1 : Age > 40,
  - E_2 : Revenu = élevé,
  - E_3 : Étudiant = non,
  - E_4 : Évaluation du crédit = excellent

  Nous avons besoin de calculer $\boldsymbol{P(oui|E)}$ et $\boldsymbol{P(non|E)}$ et les comparer.

$$P(E_1|oui) = 3/9 \qquad P(E_1|non) = 2/5$$
$$P(E_2|oui) = 2/9 \qquad P(E_2|non) = 2/5$$
$$P(E_3|oui) = 3/9 \qquad P(E_3|non) = 4/5$$
$$P(E_4|oui) = 3/9 \qquad P(E_4|non) = 3/5$$
$$P(oui|E) = \frac{3/9 \times 2/9 \times 3/9 \times 3/9 \times 9/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0053}}{\boldsymbol{P(E)}}$$
$$P(non|E) = \frac{2/5 \times 2/5 \times 4/5 \times 3/5 \times 5/14}{P(E)} = \frac{\mathbf{0.0274}}{\boldsymbol{P(E)}}$$

On a $P(E) = P(E|oui) \times P(oui) + P(E|non) \times P(non) = 0.0327$

D'où : $\boldsymbol{P(oui|E) = 0.1621}$ et $\boldsymbol{P(non|E) = 0.8379}$

Par conséquent, le classificateur Bayes Naïve prédit (« **acheter ordinateur » = NON)** pour la donnée $\boldsymbol{x_3}$.

<u>Exercice 2 :</u> Machine à vecteurs de supports (09 points)

Considérer le classificateur SVM et soit un ensemble avec deux points en 1D :

$(\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{-1})$ et $(\boldsymbol{x_2} = \sqrt{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{1})$ tel que y_1 et y_2 représentent les classes.

Considérer la transformation de chaque point vers l'espace 3D en appliquant la fonction $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{1}, \sqrt{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x^2}]^{\boldsymbol{T}}$.

a) Calculer les points $\phi(x_1)$ et $\phi(x_2)$.

b) Donner un vecteur parallèle au vecteur optimal $\boldsymbol{w}$.

c) Quelle est la valeur de la marge obtenue par ce $\boldsymbol{w}$?

d) Trouver le vecteur $\boldsymbol{w}$ en utilisant le fait que la marge est égale à $1/||w||$.

e) Trouver w_0 en utilisant votre valeur de $\boldsymbol{w}$.

f) Ecrivez la forme de la fonction discriminante $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w^T}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w_0}$.

<u>Solution :</u>

a) Les point transférés sont : $[1,0,0]^T$ et $[1,2,2]^T$.

b) La meilleure frontière de décision est celle avec norme $[0,1,1]^T$ et qui passe par le point $[1,1,1]^T$. Par conséquent, $\boldsymbol{w}$ peut être choisi comme $[0,1,1]^T$.

c) Le marginal est la distance entre $[1,1,1]^T$ et $[1,2,2]^T$, donc $\sqrt{2}$.

d) $\boldsymbol{w} = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$.

e) Nous avons :

$$\frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.0 + w_0 = -1$$

$$\frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.2 + w_0 = 1$$

Donc $w_0 = -1$.

f) La fonction discriminante est :

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$