Exo : Methode de gradient :

On considère la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = 8 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 x_2 + 5 x_2^2$$

• En appliquant la methode du gradient à pas optimal, et en partant du point initial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, trouver le minimum de "f"

Sol :

On calcule le gradient de f :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 16 x_1 + 4 x_2 \\ 4 x_1 + 10 x_2 \end{pmatrix}$$

- le calcul du point $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \rho^{(0)} \cdot f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \rho^{(0)} \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 200 \rho^{(0)} \\ 10 - 140 \rho^{(0)} \end{pmatrix}$$

- recherche de la valeur optimale de $\rho^{(0)}$:

⇒ pour cela on calcul $f(x^{(1)})$ puis $\rho^{(0)}$ permettant de minimiser $f(x^{(1)})$.

$$f(x^{(1)}) = 8 (10 - 200 \rho^{(0)})^2 + 4 (10 - 200 \rho^{(0)})(10 - 140 \rho^{(0)}) + 5 (10 - 140 \rho^{(0)})^2 - 59600 + 1060000 \rho^{0})$$

$$= h(\rho^{(0)})$$

- On cherche $\rho^{(0)}$ minimisant $h(\rho^{(0)})$, soit :

$$h'(\rho^{(0)}) = 0 \Rightarrow \rho^{(0)} = 0{,}056$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -120 \\ 2{,}16 \end{pmatrix}$$

On continue à chercher les points $x^{(k)}$ de la même façon jusqu'à ce que le critère d'arret soit satisfait :

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$