METHODES DIRECTES

DE RESOLUTION

DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Lien entre systèmes d'équations linéaires et matrices

L'application de loin la plus fréquente des matrices est la représentation et la résolution de systèmes d'équations linéaires. Soit le système à trois équations et trois inconnues

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

On peut représenter ce système sous la forme d'une équation matricielle avec

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

soit

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

où A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, appelée matrice du système, b est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, appelé second membre du système, et x est un vecteur de $\mathbb{K}^m$, appelé inconnue du système.

Exemple

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 & = & 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 & = & 20 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 & = & 30 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Matrice du système $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix}$ Inconnues du système

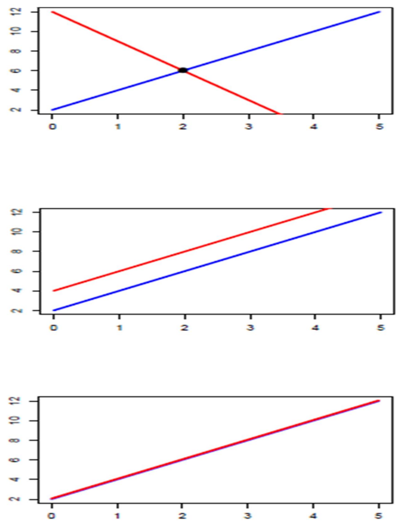
$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ Second membre du système

Résolution : **X= ?**

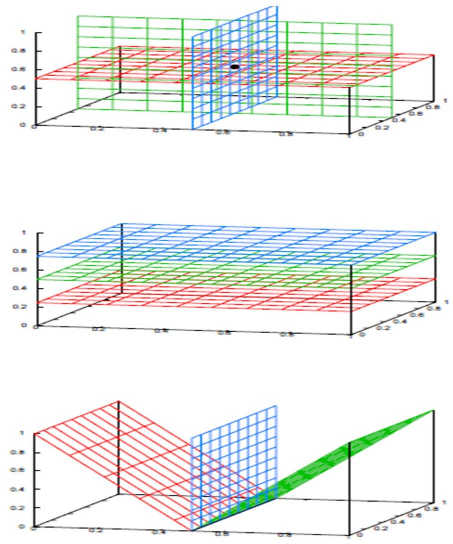
$X = \text{inv(A)} *\ \text{b}$

$$X = \begin{bmatrix} -3.3333 \\ 6.6667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solutions de systèmes d'équations linéaires



(droites superposées)



Résolution de système triangulaire inférieur

Soit le système suivant à résoudre :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\boldsymbol{x_1} & + & \mathbf{0} & + & \mathbf{0} & + & \cdots & \mathbf{0} & & b_1 \\
a_{21}\boldsymbol{x_1} & + & a_{22}\boldsymbol{x_2} & + & \cdots & + & \cdots & \mathbf{0} & & b_2 \\
a_{31}\boldsymbol{x_1} & + & a_{32}\boldsymbol{x_2} & + & a_{33}\boldsymbol{x_3} & + & \cdots & \mathbf{0} & = & b_3 \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{n2}\boldsymbol{x_2} & + & \cdots & + & \cdots & a_{nn}\boldsymbol{x_n} & & b_n
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{cccccccc}
-3x_1 & & & & & & = & 10 \\
2x_1 & + & 4x_2 & & & & = & -4 \\
x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & = & 8 \\
-4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 = & -3
\end{array}
$$

Méthode de descente

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\boldsymbol{x_1} = b_1/a_{11} \\
\boldsymbol{x_2} = (b_2 - a_{21}\boldsymbol{x_1})/\ a_{22} \\
\boldsymbol{x_3} = (b_3 - a_{31}\boldsymbol{x_1} - a_{32}\boldsymbol{x_2})/a_{33} \\
\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{x_n} = (b_n - a_{n1}\boldsymbol{x_1} - a_{n2}\boldsymbol{x_2} - \cdots - a_{nn-1}\boldsymbol{x_{n-1}})/a_{nn}
\end{array}
}
$$

Les équations de résolution (ligne par ligne) ont la forme suivante, quel que soit le nombre d’inconnus :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j\right),\ i = 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Méthode de descente

La représentation matricielle d'un système à 4 inconnus :

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}$$

via matrice triangulaire inférieure

Les équations de résolution de ce système à 4 inconnus :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2))$$

$$x_4 = \frac{1}{a_{44}} (b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3))$$

$$x_1 = \frac{-10}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{4}\left(-4 + \frac{20}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(8 - (\frac{-10}{3} - 3\ \frac{2}{3})\right) = \frac{20}{3}$$

$$x_4 = \frac{1}{1}\left(-3 - (\frac{40}{3} + \frac{10}{3} + 6x_3\right) = \frac{-179}{3}$$

Méthode de descente (par ligne)

```
function[x]=dec_lig(m,b)
x(1)=b(1)/m(1,1)
for i=2:size(m,1) % on peut commencer à 1 et enlever la 1ère instruction  ci-dessus
   x(i)=b(i)
   for j=1:(i-1)
      x(i)=x(i)-m(i,j)*x(j)
   end
   x(i)=x(i)/m(i,i)
end
end
```

```
>>A=[-3 0 0 0;2 4 0  0;1 -3 2 0;-4 5 6 1] ;  B=[10;-4;8;-3]
>> dec_lig(A,B)
      ans  =    -10/3        2/3        20/3       -179/3
```

Résolution de système triangulaire supérieur

Soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & a_{3n-1}x_{n-1} & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & & b_{n-1} \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_{nn}x_n & & b_n \end{array}$$

Les équations de résolution (ligne par ligne) ont la forme suivante, quel que soit le nombre d'inconnus :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j\right), \; i = n-1, \dots, 1, \end{aligned}$$

Méthode de remonté

La représentation matricielle d'un système à 4 inconnus :

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{array} \cdot \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array}$$

via matrice triangulaire supérieure

Les équations de résolution de ce système :

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\,(b_3 - a_{34}x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\,(b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4))$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\,(b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4))$$

Méthode de remonté

Exemple

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + \ \ x_4 = 10 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ \qquad\qquad 2x_3 + \ 0x_4 = \ 8 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{-3}{3} = -1 \\ x_3 = \frac{1}{2}\,(8 - 0(-1)) = 4 \\ x_2 = \frac{1}{-4}\,(-4 - (2 \times 4 - 3(-1))) = \frac{15}{4} \\ x_1 = \frac{1}{3}\,(10 - (5x_2 - 6x_3 + x_4)) = \frac{65}{12} \end{cases}$$

Méthode de remonté par ligne

```
function[x]=rem_lig(m,b)
x(length(b))=b(end)/m(end,end)   %on ne peut mettre x(end) car x n'existe pas encore
for i=(size(m,1)-1):-1:1   %ou commencer à size(m,1) et enlever la 1ere ligne du code
    x(i)=b(i)
    for j=size(m,2): -1:i+1
        x(i)=x(i)-m(i,j)*x(j)
    end
    x(i)=x(i)/m(i,i)
end
end
```

```
>>A=[3 5 -6 1;0 -4 2 -3;0 0 2 0;0 0 0 3], B=[10;-4;8;-3]
>>rem_lig(A,B)
        ans=    65/12       15/4        4         -1
```