Résolution de système d'équations linéaires via Méthodes directes

1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \ddots + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

2) Matrices du système :
   - ≠ Triangulaire inférieure
   - ≠ Triangulaire supérieure

3) En représentation matricielle : Ax=b

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

4) Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite directe si la solution du système peut être obtenue en un nombre fini d'opérations.

Méthodes directes
Calculer la matrice inverse de A

La résolution du système via le calcul de l'inverse $X = A^{-1}b$, nécessite :

$T_{inverse} = n\,!\,(n^2 + n + 1) + 3n^2 - 1$ opérations élémentaires

,

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre d'opérations élémentaires
n=3	$T_{inverse} = 104$
n=4	$T_{inverse} = 551$
n=5	$T_{inverse} = 3790$
n=10	$T_{inverse} \sim 4.\,10^8$

Méthodes directes : Méthode de Cramer

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ \boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}. & \dots & a_{2\ \boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_2}. & \dots. & a_{2n} \\ . & . & \dots\dots\dots. & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ \boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad \det \mathrm{A} = \text{-}36$$

$$x_1 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 20 & 4 & 8 \\ 30 & 6 & 9 \end{vmatrix} \qquad x_2 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 2 & 20 & 8 \\ 3 & 30 & 9 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \\ 3 & 6 & 30 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = -3.3333 \qquad x_2 = 6.6667 \qquad x_3 = 0$$

Méthodes directes : Méthode de Cramer

La résolution du système nécessite au total :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{Cramer}} = (\mathrm{n}+1)^2.\,\mathrm{n}! - 1 \text{ opérations élémentaires}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre d'opérations élémentaires
n=3	$\mathrm{T}_{\mathrm{Cramer}} = 95$
n=4	$\mathrm{T}_{\mathrm{Cramer}} = 599$
n=5	$\mathrm{T}_{\mathrm{Cramer}} = 4319$
n=10	$\mathrm{T}_{\mathrm{Cramer}} \sim 4.\,10^8$

La méthode devient très lente en temps d'exécution (de calculs) dès que n dépasse 4.

➔ n'est donc pas plus avantageuse que le calcul de l'inverse.

Méthode d'élimination de Gauss

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + \ddots + & \vdots & = & \vdots \\
a_{n-1}x_1 & + & a_{n-1\,2}x_2 & + \dots + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n\,2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

En représentation matricielle

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1n} \\
a_{n1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n-1\,n} & a_{nn}
\end{matrix}
\times
\boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}}
=
\boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{matrix}}
$$

<u>**Objectif :**</u> $\boldsymbol{Ax = b} \rightarrow$ ***R*x=c**

***R* matrice triangulaire supérieure**

$$A^{(0)}x = b^{(0)}$$

$$\rightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$$

$$\rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \mathbf{A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}}$$

$$
\begin{matrix}
r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1n} \\
0 & r_{22} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2n} \\
0 & 0 & \ddots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & r_{nn}
\end{matrix}
\times
\boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}}
=
\boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{matrix}}
$$

Méthode d'élimination de Gauss

Exemple Résoudre le système suivant :

$$\begin{matrix} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 \end{matrix} = \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \qquad A^{(0)}x = b^{(0)}$$

La représentation matricielle augmentée [A b]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

<u>Etape 1 : Travailler sur 1ère colonne</u>

<u>(j=1)</u> sur $\quad A^{(0)}x = b^{(0)}$

<u>Objectif</u> Eliminer les coefficients $a_{i1}^{(0)}$ de A, $i = 2{:}n$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$

<u>Comment ?</u>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \end{cases} = \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 = L_2 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_4 = L_4 - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1}} L_1 \end{matrix}$$

En représentation matricielle : $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / \ / \ / \ / \ / \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 11) \times \mathbf{2}/\mathbf{1} \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 11) \times \mathbf{3}/\mathbf{1} \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 11) \times \mathbf{4}/\mathbf{1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 22 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 33 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 44 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{matrix}$$

Principe

- vérifier le pivot $\boxed{a_{11}^{(0)} \neq 0}$ $\qquad a_{11}^{(0)} = 1 \neq 0$
- Pour chaque ligne L_i , $i = 2 : n$,

  Retrancher la ligne L_1 multipliée par $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ comme suit :

  Pour i=2 : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1$ → résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ a_{31} & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots \end{matrix}$

  Pou r i= 3 : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1$ → résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots \end{matrix}$

  Pou r i= n : $L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1$ → résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots \end{matrix}$

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{matrix}$$

Etape 2 : travailler sur 2ème colonne :

J=2 sur $A^{(1)}x = b^{(1)}$

Objectif : Eliminer les coefficients $a_{i2}^{(1)}$ $i = 3 : n$

Comment ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \quad\boxed{\mathbf{-x_2}} - 2x_3 - 7x_4 \\ \quad -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 \\ \quad -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 \end{cases} = \begin{matrix} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 = L_3 - \frac{(-2)}{(-1)} L_2 \\ L_4 = L_4 - \frac{(-7)}{(-1)} L_2 \end{matrix}$$

En représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & \boxed{\mathbf{-1}} & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / & \\ / & / & / & / & / & \\ (0 & -1 & -2 & -7 & -10) & \times\ \mathbf{-2}/\boxed{\mathbf{-1}} \\ (0 & -1 & -2 & -7 & -10) & \times\ \mathbf{-7}/\boxed{\mathbf{-1}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ (0 & -2 & -4 & -14 & -20) \\ (0 & -7 & -14 & -49 & -70) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 36 & 40 \end{bmatrix}$$

Principe

- Vérifier le pivot $a_{22}^{(1)} \neq 0$
- Pour chaque ligne $L_{i,}$ i=3 :4

  Retrancher la ligne L_2 multipliée par $\frac{a_{i2}}{a_{22}}$

Pour i=3 : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{42} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots \end{array}$$

Pour i=4 : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots \end{array}$$

→ $A^{(2)}x = b^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 36 & 40 \end{bmatrix}$$

Etape (n-1) : Travailler sur la (n-1) ème colonne :

Etape (3) : Travailler sur la (3 dem) colonne :

j =3 = n-1 sur $A^{(2)}x = b^{(2)}$

Objectif : Eliminer les coefficients $a_{i,n-1}^{(n-2)}$ $i = n = 4$

Comment ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 7x_4 \\ \qquad \boxed{-4x_3} + 4x_4 \\ \qquad 4x_3 + 36x_4 \end{cases} = \begin{matrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 = L_4 - \frac{(4)}{(-4)} L_3 \end{matrix}$$

En représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & +4 & 0 \\ 0 & 0 & +4 & +36 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ 0 & 0 & -4 & +4 & 0 \quad \times \ \mathbf{4}/\boxed{-4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & +4 & 0 \\ 0 & 0 & +4 & +36 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ 0 & 0 & +4 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Principe

- Vérifier le pivot $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$
- Retrancher de chaque ligne $L_{i,}$ i=j+1:n, la ligne L_{n-1} multipliée par $\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}}$

$$\text{Pour } i = n, \quad L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{i,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \; L_{n-1}$$

Résultat :

$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1n} & c_1 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1n} & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{nn} & c_{nn} \end{matrix}$$

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Etape finale

1. Vérifier le déterminant du nouveau système :

$$\det A = \prod_{j=1}^{j=n} a_{jj}^{(n-1)};$$

2. Résoudre le nouveau système par la méthode de remontée

x4= 1,

x3= 1,

x2= 1 ,

x1= 2

Méthode d'élimination de Gauss (Récapitulatif)

On passé par deux phases :

1- Triangularisation

2- une remontée (solution d'un système triangulaire)

1- **Triangularisation**

- On commence avec A une matrice d'ordre n (les mêmes opérations seront effectuées sur le vecteur b.
- Il y'a n systèmes : système initial (n° 0) → système final (n° n-1) triangulaire supérieur.
- A l'étape j, on annule les coefficients sous la diagonale de la colonne j, du système précédent ,$A^{(j-1)}x = b^{(j-1)}$
- comment à chaque ligne i>j, on soustrait la ligne j multipliée par $\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$

1. $\forall k,\ j < k \leq n$ et $j < i \leq n$ on a $a_{ij}^{(j)} = 0$
2. $a_{ik}^{(j)} = a_{ik}^{(j-1)} - \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} a_{jk}^{(j-1)}$ et $b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} b_j^{(j-1)}$

Pseudo code

Parcours des colonnes j =1 : n-1

Vérifier pivot $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$

Parcours des lignes i=j+1 : n

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}} L_j$$

Code élimination de Gauss:

```
function [x,det] = gauss(A,b)    % et calcul de solution et déterminant
n = length(b);
if (size(b,2) == 1 & isvector(b) & size(A)==n)
% vérifier que b est un vecteur de taille nx1 et A matrice de taille nxn
%********************************* début phase d'élimination
for j = 1:n-1        %parcours des colonnes
   if A(j,j)~= 0  % vérifier  pivot
   for i= j+1:n      %parcours des lignes
         coef= A(i,j)/A(j,j);  %constante
         A(i,j:n) = A(i,j:n) – coef * A(j,j:n); % Li =  Li  - Lj* coef
         b(i)= b(i) - coef*b(j);   % cohérence du système (matrice augmentée)
      end
   end
end
end
 det = prod(diag(A));  %vérification obligatoire
 %****************** phase de résolution du syst triang sup (par vectorisation)
for k = n:-1:1
   b(k) = (b(k) - A(k,k+1:n)*b(k+1:n))/A(k,k);
end,
x = b;
```

Remarque 1

On ne change pas la solution d'un système linéaire lorsque :

- On permute deux lignes
- On permute deux colonnes
- On multiplie une ligne par un réel non nul
- On ajoute une ligne à une autre

Remarque 2

Problème : méthode de Gauss limitée lorsque le pivot $a_{k+1,k+1}^{(k)} = 0$

Résolu par : $L_{k+1}^{(k)} \leftrightarrow L_i^{(k)}$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ dans } [A^{(0)}b^{(0)}] \quad a_{11} = 0 \text{ donc } L_2^{(0)} \leftrightarrow L_1^{(0)}$$

Résultat :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} [A^{(0)}b^{(0)}] \rightarrow L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{1}{1} L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$[A^{(1)}b^{(1)}]$

Remarque 3

La méthode d'élimination de Gauss permet de résoudre un système linéaire en effectuant un nombre d'opération élémentaires estimés par :

$$T_{Gauss} = (4n^3 + 9n^2 - 7n)/6 \ ,$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre d'opérations élémentaires
n=3	T_{Gauss} =28
n=4	T_{Gauss} =62
n=5	$T_{Gauss} = 115$
n=10	$T_{Gauss} = 805$

Ce qui montre l'énorme amélioration que cette méthode apporte par rapport aux autres méthodes.

Remarque 4

En utilisant la méthode de Gauss le calcul du déterminant de la matrice A est comme suit :

$\det A = (-1)^p \prod_{k=1}^{k=n} a_{kk}^{(k)}$; où p est le nombre de permutations