Introduction

Si on prend le fameux syllogisme :

Tout homme est mortel
Socrate est un homme
Alors Socrate est mortel

Avec la logique propositionnelle, on ne peut pas exprimer ce syllogisme avec précision.

Le langage des prédicats a les éléments et les outils qui nous permettent de représenter ce genre d'énoncés.

Langage des prédicats

1. L'alphabet :

- Les connecteurs logiques : $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Les quantificateurs : $\forall$, $\exists$
- Les variables : x , y , …
- Les constantes : a , b , …
- Les symboles de prédicats : P , Q , …
- Les symboles de fonctions : f , g , …

2. Les fonctions

C'est une généralisation des fonctions numériques sur n'importe quel domaine D (personnes, villes, …).

Exemples :

- D = R : $f(x) = x^2$
- D = l'ensemble des humains : g(x) = père(x)
- D = N : h(x,y) = PGCD(x,y)

Le résultat de la fonction est un élément du même domaine

3. Les prédicats

C'est une propriété d'un élément du domaine ou une relation entre les éléments du domaine.

Exemples :

- $P(x)$: x est un nombre premier
- $Q(x,y)$: $x > y$

La valeur du prédicat est booléenne V ou F.

4. Les quantificateurs

- Le quantificateur universel $\forall$ (quelque soit)
- Le quantificateur existentiel $\exists$ (il existe au moins)

Exemple :

Si on a : $P(x)$: x est présent , $A(x)$: x est absent
$\forall x\, P(x)$: Tout les étudiants sont présents
$\exists x\, A(x)$: Il existe des étudiants absents

5. Les termes

- Toute constante est un terme
- Toute variable est un terme
- Si $t_1 , \dots t_n$ sont des termes et f est une fonction alors : $f(t_1 , \dots t_n)$ est un terme.

6. Les formules

- Si $t_1 , \dots , t_n$ sont des termes et P est un prédicat alors : $P(t_1 , \dots , t_n)$ est une formule.
- Si x est une variable et α, β deux formules alors : $\rceil\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$,$\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$, $\forall x\, \alpha$, $\exists x\, \alpha$ sont des formules.

Exemples de formules

$\forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)\rightarrow P(x)$, $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \rightarrow Q(x,y,z))$

Priorité des connecteurs + quantificateurs :

$$\rceil , \wedge , \vee , (\exists , \forall) , \rightarrow , \leftrightarrow$$

Système complet

Même définition dans le chapitre 1, sauf qu'on ajoute les quantificateurs à l'ensemble des connecteurs

Exemple : S= {$\rceil$, $\rightarrow$, $\forall$}

On a déjà montré que {$\rceil$, $\rightarrow$} est un système complet il reste à trouver la relation entre $\exists$ et $\forall$. on a les propriétés suivantes:

$$\rceil \exists x\ \alpha = \forall x \rceil \alpha \quad \text{et} \quad \rceil \forall x\ \alpha = \exists x \rceil \alpha$$

Le champ d'un quantificateur

Le champ d'un quantificateur dans une formule est la sous formule concernée par ce quantificateur

Exemple : $\forall x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y) \rightarrow P(x)$

- Le champ de $\exists$ est $Q(y)$
- Le champ de $\forall$ est $P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$

Les variables libres et les variables liées

- Une occurrence de x dans une formule α est liée si elle apparait dans le champ d'un quantificateur, sinon elle est libre
- Une variable est liée si elle a au moins une occurrence liée
- Une variable est libre si elle a au moins une occurrence libre

Exemple :

- $P(x) \rightarrow Q(y,z)$ toutes les variables sont libres
- $\forall x\ P(x) \wedge Q(y)$ x est liée et y est libre

La formule close

C'est la formule dont toutes les variables sont liées et non libres

Exemple : $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y) \rightarrow Q(x,y,z))$

L'interprétation

Pour donner une valeur de vérité à une formule, il faut donner une signification à tous les symboles de la formule (prédicats, fonctions, constantes) ainsi que le domaine des variables.

Exemple 1 : $\alpha = \forall x\ \exists y\ P(x,y)$, D= N

- Si P signifie < alors α est vraie
- Si P signifie > alors α est fausse

L'évaluation

L'évaluation d'une formule consiste à donner une valeur pour chaque variable libre de la formule.

L'attribution d'une valeur de vérité à une formule, nécessite une interprétation et une évaluation de la formule.

Exemple : $\beta = P(x,f(x))$

Soit l'interprétation I tel que $\mathrm{I}(P)$: « = » et $\mathrm{I}(f)$: carré de …

- Si x = 2 alors β est fausse
- Si x =1 alors β est vraie

Satisfiabilité

Une formule α est satisfiable s'il existe une interprétation I et une évaluation v, pour lesquelles α est vraie. On dit que l'évaluation v satisfait α pour l'interprétation I. et on écrit $\mathrm{I} \models \alpha_v$.

Exemple : $\alpha = P(f(x,y),y)$, tel que :

D= N , $\mathrm{I}(P)$ = ">" , $\mathrm{I}(f)$ = "-" , v(x) =4 , v(y) = 1

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(\alpha)_v &= \mathrm{I}(P(f(x,y),y)) \\
&= \mathrm{I}(P)\ (\mathrm{I}(f(x,y),v(y))) \\
&= \mathrm{I}(P)\ (\mathrm{I}(f)\ (v(x),v(y)),v(y)) \\
&= >\ (-(4,1),1) = >\ (3,1)
\end{aligned}
$$

Un ensemble de formules Γ est satisfiable s'il existe une interprétation I et une évaluation v, pour lesquelles les formules de Γ sont toutes vraies.

Modèle d'une formule

On dit que l'interprétation I est un modèle de la formule α, si toute évaluation satisfait α pour l'interprétation I. On note $I \models \alpha$

Exemple 1 : $I(P)$ = ">" , $I(f)$ = "le double de …" , D=N*
I est un modèle de P(f(x),x)

Exemple 2 : α=P(x,y) , $I(P)$ = "… diviseur de…" , D={1 , 2}

	v_1	v_2	v_3	v_4
x	1	1	2	2
y	1	2	1	2
α	**V**	**V**	**F**	**V**

On dit que α est satisfiable mais I n'est pas modèle de α

Exemple 3 : D={2,6} , $I(P)$ = "… diviseur de… " , $I(Q)$ ="… multiple de …"
$\alpha=\forall x\ P(x,y)$, $\beta=\forall x\ \exists y\ Q(x,y)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
x	2	2	6	6
y	2	6	2	6
P(x,y)	**V**	**V**	**F**	**V**
Q(x,y)	**V**	**F**	**V**	**V**

$I \not\models \alpha \quad I \models \beta$.

On dit que l'interprétation I est un modèle de l'ensemble Γ, si toute évaluation satisfait Γ pour l'interprétation I. On note $I \models \Gamma$

Validité d'une formule

Une formule α est valide si elle est vraie pour toute interprétation I, et toute évaluation v . On note $\models \alpha$.

Exemple : $\beta = \neg P(x) \vee P(x)$

Pour démontrer qu'une formule n'est pas valide, il suffit de trouver une interprétation et/ou une évaluation pour lesquelles la formule est fausse.

Conséquence logique

On dit que β est conséquence logique de Γ (on note $\Gamma \models \beta$), ssi pour toute interprétation I et toute évaluation v, on a :

Si $I \models \Gamma_v$ alors $I \models \beta_v$

Exemple : $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta)\ ,\ \forall x\, \alpha \models \forall x\, \beta$

Formes normales

1- Forme normale prénexe

On dit que α est sous la forme prénexe si :

- α est de la forme **:** $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \beta$ telque : $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
- Le champ de Q_nx_n est β
- β ne contient pas des quantificateurs.

Pour transformer les formules en forme normale prénexe, on se base sur les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\, \alpha \rightarrow \beta \equiv \exists x\, (\alpha \rightarrow \beta) \\ \exists x\, \alpha \rightarrow \beta \equiv \forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \end{array}\right\} \quad \text{Sous condition : x n'apparait pas libre dans } \beta$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \forall x\, \beta \equiv \forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \\ \alpha \rightarrow \exists x\, \beta \equiv \exists x\, (\alpha \rightarrow \beta) \end{array}\right\} \quad \text{Sous condition : x n'apparait pas libre dans } \alpha$$

Exemple : $\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, P(y) \quad \ldots (1)$

x n'apparait pas libre dans $\exists y\, P(y)$

$(1) \equiv \quad \forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, P(y))$

y n'apparait pas libre dans $P(x)$

$(1) \equiv \quad \forall x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow P(y))$

Remarque : Si les conditions posées pour les propriétés ne sont pas satisfaites, on procède à des modifications selon les règles suivantes :

- $\forall x\ \beta \equiv \forall y\ \beta_{(y/x)}$
- $\exists x\ \beta \equiv \exists y\ \beta_{(y/x)}$

On obtient $\beta_{(y/x)}$ par remplacement de x par y

Exemple : Transformer en forme normale prénexe :

$\exists x\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x)$

♦ x apprait libre dans « $\exists y\ Q(y,x)$ », on change la variable

$\equiv\ \exists u\ P(u,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x)$

♦ u n'apprait pas libre dans « $\exists y\ Q(y,x)$ »

$\equiv\ \forall u\ (P(u,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$

♦ y apprait libre dans « $P(u,y)$ », on change la variable

$\equiv\ \forall u\ (P(u,y) \rightarrow \exists v\ Q(v,x))$

♦ u n'apprait pas libre dans « $P(u,y)$ »

$\equiv\ \forall u\ \exists v\ (P(u,y) \rightarrow Q(v,x))$

2- Forme normale de Skolem

Elle consiste à éliminer tous les quantificateurs existentiels en utilisant de nouveaux symboles de fonction ou des constantes tout en conservant la satisfiabilité de la formule.

Etant donné : $\alpha = \forall x\ \exists y\ P(x,y)$ cette formule veut dire que pour chaque x il existe un y qui vérifie P(x,y), c-a-d, on peut définir une fonction f(x) qui remplacera y dans la formule.

La forme de skolem de α est donc : $\alpha_s = \forall x\ P(x,f(x))$

Exemple 1 : $\beta = \forall x_1\ \forall x_2\ \exists y\ P(x_1,x_2,y)$

$\beta_s = \forall x_1\ \forall x_2\ P(x_1,x_2,f(x_1,x_2))$

Pour une formule de la forme $\exists x\ \beta$, on élimine le quantificateur et on remplace x par une nouvelle constante.

Exemple 2 : $\alpha = \exists x\ P(x) \Rightarrow \alpha_s = P(a)$

Remarques :

- la skolémisation d'une formule suppose qu'elle est sous la forme prénexe.
- La skolémisation d'une formule ne donne pas une formule équivalente.

Exemple 3 : $\alpha = \exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists v\ P(x,y,z,v)$

$\alpha_s = \forall y\ \forall z\ p(a,y,z,f(y,z))$