C.U. AbdelhafidBoussouf - Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département MI
1ère année Mathématiques
Matière : Structure machine1

Année universitaire : 2022/2023

Solution TD n° 03

Exercice 01

1.

- **ET** à partir de **OU** et **NON** :

  NON (A **OU** B) = (**NON** A) **ET** (**NON** B)

  ⇒ **NON** ((**NON** A) **OU** (**NON** B)) = (**NON** (**NON** A)) **ET** (**NON** (**NON** B)) = A **ET** B

- **OU** à partir de **ET** et **NON** :

  NON (A **ET** B) = (**NON** A) **OU** (**NON** B)

  ⇒ **NON** ((**NON** A) **ET** (**NON** B)) = (**NON** (**NON** A)) **OU** (**NON** (**NON** B)) = A **OU** B

2.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A.B$	$\overline{A}.\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A.B}$	$\overline{A+B}$
0	0	1	1	0	**1**	0	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	0	**0**	1	**1**	**1**	**0**
1	0	0	1	0	**0**	1	**1**	**1**	**0**
1	1	0	0	1	**0**	1	**0**	**0**	**0**

3. On utilise les lois de De Morgan ; l'opérateur **ET** est prioritaire :

   a) $\overline{A + B.\overline{C}} = \overline{A}.(\overline{B.\overline{C}}) = \overline{A}.(\overline{B} + \overline{\overline{C}}) = \overline{A}.(\overline{B} + C) = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.C$

4.

- $A + \overline{A}.B = (A + \overline{A}).(A + B)$ (distributivité)

  $= 1.(A + B) = A + B$ (élément neutre)

- $A.(\overline{A} + B) = A.\overline{A} + A.B$ (distributivité)

  $= 0 + A.B = A.B$ (élément neutre)

5.

a) $\overline{A}.B + A.B = (\overline{A} + A).B$

$= 1.B$ (inverse)

$= B$

b) $(A + B).(A + \overline{B}) = A + (B.\overline{B})$

$= A + 0$ (inverse)

$= A$

c) $\overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A + B + C + D} = \overline{(\overline{\overline{A}\,.\,\overline{B}})\,.\,(A + B + C + D)}$ (lois de De-Demorgan)

$= \overline{(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}).(A + B + C + D)}$

$= \overline{(A + B).(A + B + C + D)}$

$= \overline{(A + B).((A + B) + (C + D))}$

On a : $A\,.\,(A + B) = (A + 0).(A + B)$

$A\,.\,(A + B) = A + 0.B$

$A\,.\,(A + B) = A + 0$ (élément absorbant)

$A\,.\,(A + B) = A$

En appliquant cette règle, on obtient : $(A + B).((A + B) + (C + D)) = (A + B)$

Donc :

$\overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A + B + C + D} = \overline{(A + B)}$

d) $A + B\,.\,\overline{C} + \overline{A}\,.\,\left(\overline{B\,.\,\overline{C}}\right).(A\,.\,D + B) = (A + B\,.\,\overline{C}) + \left(\overline{A + B\,.\,\overline{C}}\right).(A\,.\,D + B)$

D'après la question 4 : $A + \overline{A}\,.\,B = A + B$

En appliquant cette règle, on obtient :

$(A + B\,.\,\overline{C}) + \left(\overline{A + B\,.\,\overline{C}}\right).(A\,.\,D + B) = (A + B\,.\,\overline{C}) + (A\,.\,D + B)$

Donc :

$A + B\,.\,\overline{C} + \overline{A}\,.\,\left(\overline{B\,.\,\overline{C}}\right).(A\,.\,D + B) = (A + B\,.\,\overline{C}) + (A\,.\,D + B)$

$= (A + A\,.\,D) + (B + B\,.\,\overline{C})$ (commutativité et associativité)

On a : $A + (A\,.\,B) = (A\,.\,1) + (A\,.\,B)$

$A + (A\,.\,B) = A\,.\,(1 + B)$

$A + (A\,.\,B) = A\,.\,1$ (élément absorbant)

$A + (A\,.\,B) = A$

En appliquant cette règle, on obtient :

$(A + A\,.\,D) = A$

$(B + B\,.\,\overline{C}) = B$

Donc :

$A + B\,.\,\overline{C} + \overline{A}\,.\,\left(\overline{B\,.\,\overline{C}}\right).(A\,.\,D + B) = A + B$

e) $(A \oplus B)\,.\,B + A\,.\,B = (\overline{A}\,.\,B + A\,.\,\overline{B})\,.\,B + A\,.\,B$

$= \overline{A}\,.\,B\,.\,B + A\,.\,\overline{B}\,.\,B + A\,.\,B$

$= \overline{A}\,.\,B + A\,.\,0 + A\,.\,B$ (Idempotence et inverse)

$= \overline{A}\,.\,B + A\,.\,B$

D'après la question 5.a : $\overline{A}\,.\,B + A\,.\,B = B$

Donc :

$(A \oplus B)\,.\,B + A\,.\,B = B$

Exercice 2

1. $F(A, B) = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$

A	B	F (A, B)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2. $F(A,B) = \overline{A.B} = A \uparrow B = A$ **NAND** B

   $\overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B} = A$ **NAND** B

Exercice 3

1. $F(A,B,C,D) = \left((\overline{A}.C)\,\mathbf{NOR}\,(A.\overline{C})\right).(\overline{B}\,\mathbf{XOR}\,D)$

2.

$$F(A,B,C,D) = \left((\overline{A}.C)\,\mathbf{NOR}\,(A.\overline{C})\right).(\overline{B}\,\mathbf{XOR}\,D)$$

$$= (\overline{(\overline{A}.C) + (A.\overline{C})}).(\overline{\overline{B}}.D + \overline{B}.\overline{D})$$

$$= (\overline{\overline{A}.C}).\overline{(A.\overline{C})}.(B.D + \overline{B}.\overline{D})$$

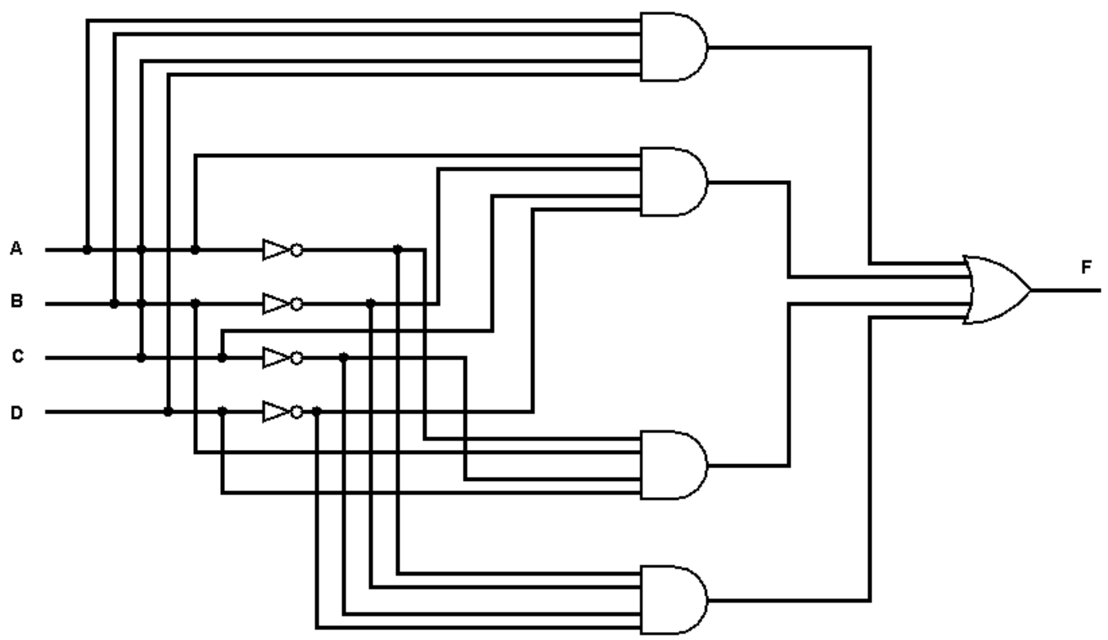
$$= (A + \overline{C}).(\overline{A} + C).(B.D + \overline{B}.\overline{D})$$

$$= (A.C + A.\overline{A} + \overline{A}.\overline{C} + C.\overline{C}).(B.D + \overline{B}.\overline{D})$$

$$= (A.C + \overline{A}.\overline{C}).(B.D + \overline{B}.\overline{D})$$

$$= A.B.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$$

3. Logigramme :



Exercice 4

1.

A	B	C	F (A,B,C)	Min termes	Max termes
0	0	0	0		$A + B + C$
0	0	1	1	$\overline{A}.\overline{B}.C$	
0	1	0	1	$\overline{A}.B.\overline{C}$	
0	1	1	0		$A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	1	$A.\overline{B}.\overline{C}$	
1	0	1	1	$A.\overline{B}.C$	
1	1	0	1	$A.B.\overline{C}$	
1	1	1	0		$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

- Sous la première forme canonique (somme des min termes) :

  $F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$

- Sous la deuxième forme canonique (produits des max termes) :

  $F(A,B,C) = (A + B + C).(A + \overline{B} + \overline{C}).(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

2.

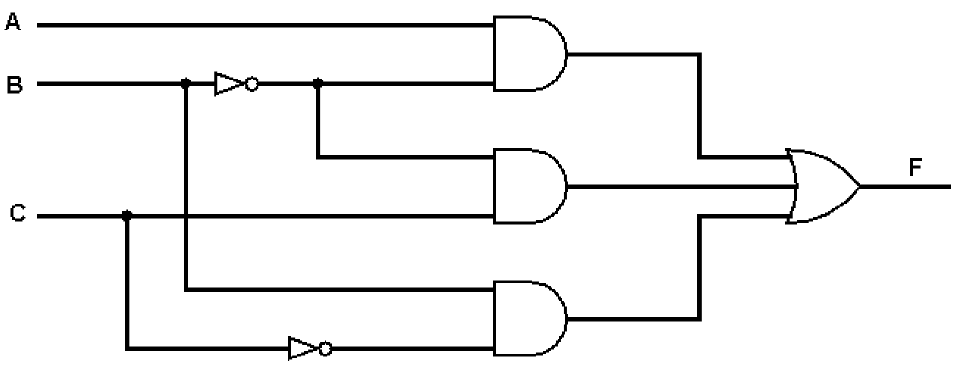
- La table de Karnaugh et fonction logique simplifiée :

A \ BC	00	01	11	10
0	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**1**

Et donc l'expression logique simplifiée par la table de Karnaugh est :

$F(A,B,C) = A.\overline{B} + \overline{B}.C + B.\overline{C}$

3. Logigramme :



Exercice 5

a) $F1\,(A, B, C) = A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

- Table de Karnaugh :

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	1	1	0	1
$\overline{A}$	0	0	0	0

- La fonction simplifiée :

$F1\,(A, B, C) = A.B + A.C$

b) $F2\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B} + A.B.C$

$F2\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.(C + \overline{C}) + A.B.C$

$F2\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.C$

- Table de Karnaugh :

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	1	1	1	0
$\overline{A}$	0	0	1	0

- La fonction simplifiée :

$F2(A, B, C) = A.C + \overline{B}.\overline{C}$

c) $F3\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$

$F3\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.(C + \overline{C}) + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C}.(A + \overline{A}) + A.\overline{B}.C$

$F3\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$

$F3\,(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$

- Table de Karnaugh :

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	0	1	1	0
$\overline{A}$	0	1	1	1

- La fonction simplifiée :

  $F3(A, B, C) = \overline{B} + \overline{A}.\overline{C}$

d) $F4\,(A, B, C, D) = B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{D} + A.B.C.\overline{D}$

$F4\,(A, B, C, D) = B.\overline{C}.\overline{D}.(A + \overline{A}) + \overline{A}.B.\overline{D}.(B + \overline{B}) + A.B.C.\overline{D}$

$F4\,(A, B, C, D) = A.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + A.B.C.\overline{D}$

$F4\,(A, B, C, D) = A.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.B.C.\overline{D}$

- Table de Karnaugh :

AB \ CD	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB	0	0	1	1
$\overline{A}B$	0	0	1	1
$\overline{A}\overline{B}$	0	0	0	0
$A\overline{B}$	0	0	0	0

- La fonction simplifiée :

  $F4(A, B, C, D) = B.\overline{D}$

e) $F5\,(A, B, C, D) = \overline{A} + A.B + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.C.D$

$= \overline{A}.(B + \overline{B}).(C + \overline{C}).(D + \overline{D}) + A.B.(C + \overline{C}).(D + \overline{D}) + A.\overline{B}.C.(D + \overline{D})$
$+ A.\overline{B}.C.D$

$= \overline{A}.B.C.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} +$
$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.B.C.D + A.B.C.\overline{D} + A.B.\overline{C}.D + A.B.\overline{C}.\overline{D}$
$+ A.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.D$

$$= \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$$
$$+ \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.B.C.D + A.B.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.\bar{C}.\bar{D}$$
$$+ A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.\bar{B}.C.D$$

- Table de Karnaugh :

AB \ CD	CD	$\bar{C}D$	$\bar{C}\bar{D}$	$C\bar{D}$
AB	1	1	1	1
$\bar{A}B$	1	1	1	1
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

- La fonction simplifiée :

$F5(A, B, C) = B + \bar{A} + C$

f) $F6\ (A, B, C, D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.B.D + \bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

$F6\ (A, B, C, D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}.(C + \bar{C}) + \bar{A}.\bar{C}.\bar{D}.(B + \bar{B}) + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.B.D.(C + \bar{C})$
$+ \bar{B}.\bar{C}.\bar{D}.(A + \bar{A}) + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

$F6\ (A, B, C, D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}.C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.B.C.D$
$+ A.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

$F6\ (A, B, C, D) = \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.B.C.D$
$+ A.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

- Table de Karnaugh :

AB \ CD	CD	$\bar{C}D$	$\bar{C}\bar{D}$	$C\bar{D}$
AB	1	1	0	0
$\bar{A}B$	0	0	1	1
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
$A\bar{B}$	0	0	1	1

- La fonction simplifiée :

$F6\ (A, B, C, D) = \bar{A}.\bar{D} + A.B.D + \bar{B}.\bar{D}$