Résumé : Analyse 1 :

1) Majorants, Minorants :

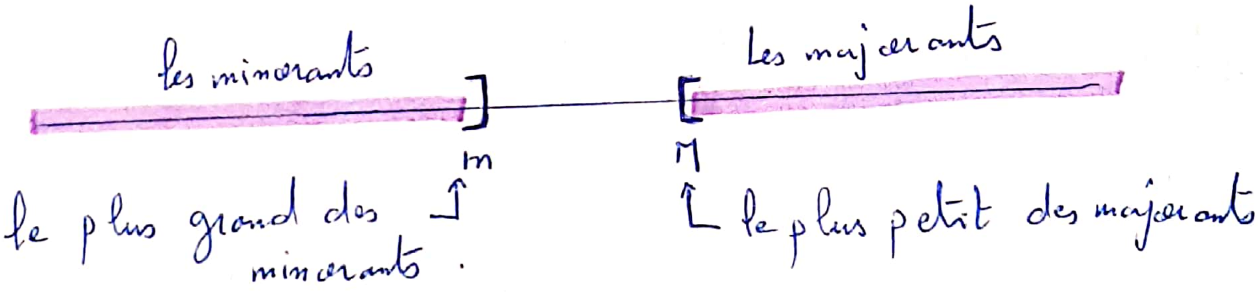
Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on dit que :

- A majorée par M si : $\forall x \in A$: on a $x \leq M$.
- A minorée par m si : $\forall x \in A$: on a $x \geq m$.
- A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée i.e.

$$\forall x \in A : \quad m \leq x \leq M.$$

2) Minimum, Maximum :

- $M \in \mathbb{R}$, $M = \max A$ si : $M \in A$ <u>et</u> M est un majorant de A.
- $m \in \mathbb{R}$, $m = \min A$ si : $m \in A$ <u>et</u> m est un minorant de A.



- $m = \inf(A)$ (la borne inférieure).
- $M = \sup(A)$ (la borne supérieure).

3) caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure :

1) Soit $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$: si A est un ensemble majoré et $M \in \mathbb{R}$ alors :

$$M = \sup(A) \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : M - \varepsilon < x_0 \leq M. \end{cases}$$

2) si A est un ensemble minoré et $m \in \mathbb{R}$, alors :

$$m = \inf(A) \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq m. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : m \leq x_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Exemple : 1) Soit $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Déterminer s'ils existent : $\sup(C)$, $\inf(C)$, $\max(C)$, $\min(C)$.

2) Soit $D = \left\{ \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Déterminer s'ils existent : $\sup(D)$, $\inf(D)$, $\max(D)$, $\min(D)$.

Les nombres complexes :

* $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

- a est la partie réelle de z, notée $Re(z)$.
- b " " " imaginaire " " $Im(z)$.
- Le nombre $\bar{z} = a - ib$ est appelé le conjugué de z.

$$\begin{cases} \cdot\ \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \\ \cdot\ \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \end{cases} \quad \cdot\ \bar{\bar{z}} = z \quad \cdot\ z + \bar{z} = 2x \quad \cdot\ z - \bar{z} = 2yi.$$

- Le nombre $|z|$ est appelé le module de z. (positif).

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$\begin{cases} \cdot\ |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0. \\ \cdot\ |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \\ \cdot\ |z + z'| \leq |z| + |z'| \end{cases}$$

- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}, \quad z' \neq 0.$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}, \quad z \neq 0.$

• Argument d'un nombre complexe :

On appelle argument de z $(z \neq 0)$, le nombre réel θ défini d'un multiple entier de 2π. tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

on note $\theta = \arg(z)$. i.e. $\arg(z) = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|}. \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases}$

$$\begin{cases} \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z'). \\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z'). \end{cases}$$

• Forme algébrique et forme trigonométrique :

- $z = a + ib$ (forme algébrique).
- $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (Forme trigonométrique).

  $= |z|\, e^{i\theta}$.

(cette représentation est très utile pour la multiplication et la division des nombres complexes).

- $z_1 \times z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} \times |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1| \times |z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

- On a la relation suivante (formule de Moivre) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \iff (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Application :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k.$$

tel que : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(0)!} = 1$, $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$, $0! = 1$

donc :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = C_n^0 (\cos\theta)^n (i\sin\theta)^0 + C_n^1 (\cos\theta)^{n-1} (i\sin\theta) + C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} (i\sin\theta)^2$$
$$+ \dots + C_n^n (\cos\theta)^0 . (i\sin\theta)^n .$$

alors on a :

$$\cos n\theta = \cos\theta^n - C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} \sin^2\theta + C_n^4 (\cos\theta)^{n-4} (\sin\theta)^4 + \dots$$
$$\sin n\theta = C_n^1 (\cos\theta)^{n-1} (\sin\theta) - C_n^3 (\cos\theta)^{n-3} (\sin\theta)^3 + \dots$$

Racines n-ièmes :

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ (r = le module de z). un nombre complexe et $n \geq 1$. On cherche tous les nombres complexe $w = \rho(\cos\delta + i\sin\delta) = \rho e^{i\delta}$ tel que $w^n = z$, racines n-ièmes de z.

$$w^n = z \Rightarrow \rho^n e^{in\delta} = re^{i\theta} \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\delta = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \delta = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

d'où expression n racines n-ièmes de Z:

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad 0 \le k \le n-1.$$

Cas particulier : $Z = 1$ ($\theta = 0$), les racines n-ième de 1 sont:

$$Z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right). \quad 0 \le k \le n-1$$

Racines carrées : pour calculer les racines carrées d'un nombre complexe $Z = a+ib$, nous cherchons les complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que: $w^2 = Z$. Écrivons $w = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence.

$$w^2 = Z \iff (\alpha + i\beta)^2 = a + ib. \qquad \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\iff \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib.$$

Nous rajoutons la condition : $|w|^2 = |Z|$.

$$\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

par somme et différence des deux première lignes :

$$\alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad \beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad 2\alpha\beta = b.$$

donc : $\alpha = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $\beta = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $\alpha\beta$ est du même signe que b.

cela donne deux couples (α, β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $w = \alpha + i\beta$ de Z.

Les fonctions d'une variable réelle :

1) Voisinage d'un point :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$]a-\varepsilon , a+\varepsilon[\subset V.$$

2) Fonctions majorées, minorées, bornées :

* Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que :
  * f est majorée par $M \in \mathbb{R}$ si : $\forall x \in I$; $f(x) \leq M$.
  * f est minorée par $m \in \mathbb{R}$ si : $\forall x \in I$: $f(x) \geq m$.
  * f est bornée si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$: $m \leq f(x) \leq M$.

* Soient f et g deux fonctions définie sur un même intervalle I. On dit que :
  * f majore g si : $\forall x \in I$: $f(x) \geq g(x)$.
  * f minore g si : $\forall x \in I$: $f(x) \leq g(x)$.

3) Composition de fonctions :

Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow K$ deux fonctions.

La fonction composée de f et g est :

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)).$$

4/ Monotonie :

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que :

* f est croissante sur I si : $\forall x_1$ et $x_2 \in I$ on a :

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \leq f(x_2).$$

* f est décroissante sur I si : $\forall x_1, x_2 \in I$ on a,

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \geq f(x_2).$$

* f est monotone, si elle y est croissante ou décroissante.

5/ Parité :

soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

On dit que :

* f est paire si : $\forall x \in I$: $f(-x) = f(x)$.
* f est impaire si, $\forall x \in I$: $f(-x) = -f(x)$.
* f est dite T-périodique si, $\forall x \in I$:

$$f(x+T) = f(x).$$

6/ Limite d'une fonction :

soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $x_0 \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Scanné avec CamScanner

7/ continuité en un point :

* On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in I$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

i.e : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* **prolongement par continuité :**

Soit $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \right)$

* On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 . \end{cases}$$

* **Théorème des valeurs intermédiaires :**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire : (la version la plus utilisée du théorème des V.I).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ si $f(a) . f(b) < 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

8/ Dérivée en un point :

* Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$. (existe et finie)

* f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

* f est dérivable en $x_0 \iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe et finie.

* Dérivées successives :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.

On note : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

* Formule de Leibniz :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

* Extremum local :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

* On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$

* On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp: un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que :

$$\forall x \in I \cap J : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp: } f(x) \geq f(x_0))$$

* Théorème de Rolle :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

* f continue sur $[a,b]$
* f dérivable sur $]a,b[$.
* $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

* Théorème des accroissements finis :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. alors il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

* Règle de l'Hopital :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.

On suppose que : $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $\forall x \in I \setminus \{x_0\} : g'(x) \neq 0$.

alors : $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

1) Réciproque de la fonction sinus : (arc sinus) :

On prend la fonction sinus définie par :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longrightarrow \sin x.$$

(montone)

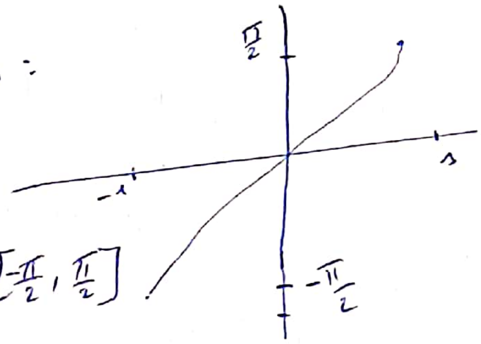
Dans ce cas, la fonction sinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc sinus que l'on note arcsin et que l'on définit par :

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto \arcsin x.$$

* la fonction arcsinus est strictement croissante et impaire, et on a : $\forall x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

et : $\arcsin(\sin x) = x$, seulement pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



. la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est : $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

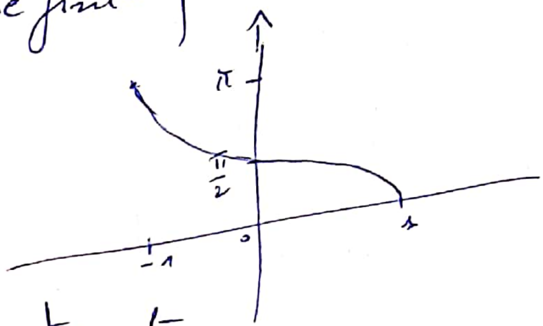
2) Réciproque de la fonction cosinus (arc cosinus) :

On choisir la fonction cosinus définie par :

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \cos x.$$

Dans ce cas, la fonction cosinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc cosinus que l'on note arccos et que l'on définie par :

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$
$$x \longmapsto \arccos(x)$$



* La fonction arc cosinus est strictement décroissante. et elle n'est ni paire ni impaire.

$\cos(\arccos(x)) = x$ sur $[-1, 1]$. et

$\arccos(\cos(x)) = x$ seulement sur $[0, \pi]$.

$(\cos(-x) = \pi - \arccos x)$.

* la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est : $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

* pour $x \in [-1, 1]$ on a : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

3/ Réciproque de la fonction tangente (arctangente);

On choisir la fonction tangente définie par:

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos(x)}.$$

Dans ce cas, la fonction tangente est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arctangente, que l'on note arctan et que l'on définit par:

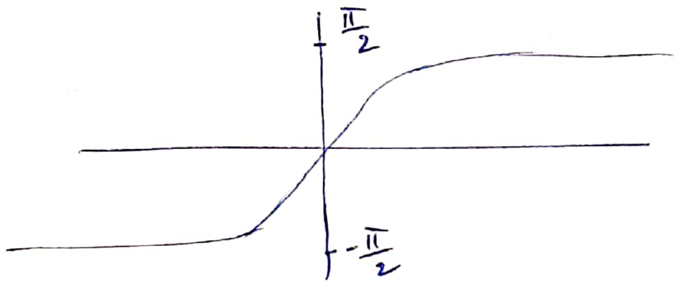
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \longmapsto \arctan(x)$$

* La fonction arctangente est strictement croissante et impaire.

on a, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

. La fonction arctangente est dérivable et sa dérivée est:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$



* pour $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\arctan x) = x$

et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\arctan(\tan x) = x$.

* pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

* pour $x \in \mathbb{R}_-^*$: $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.