Corrigé Type ; Série 4

Exercice 01

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

1) Polynôme caractéristique : $P_{A_a}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & a+1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & a+1 \\ -1-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix}$

$P_{A_a}(\lambda) = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & -2-\lambda & -a-1 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[\underbrace{\lambda^2 + (2-a)\lambda + 1-a}_{\lambda_1 = -1\ ;\ \lambda_2 = a-1}\right]$

$P_{A_a}(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda - a + 1)$; $Sp(A) = \{-1, a-1\}$.

2) On calcule $\ker(A+I)$: $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)z = 0 \\ x = y \\ (a+1)z = 0 \end{cases}$

Si $a = -1$: $\ker(A+I) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; Alors A_{-1} est diagonalisable

Si $a \neq -1$: $\ker(A+I) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Alors A_a n'est pas diagonalisable

3) • Diagonaliser A_{-1} : $E_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ (A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

le système est $\begin{cases} x = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -y$.

Alors : $E_{-2} = \langle (0, 1, -1) \rangle$.

Donc : $A_{-1} = PDP^{-1}$ tel que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

• Le système diff : On a : $X(t) = \alpha_1 e^{-t} V_1 + \alpha_2 e^{-t} V_2 + \alpha_3 e^{-2t} V_3$.

Donc. $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} \\ \alpha_1 e^{-t} + \alpha_3 e^{-2t} \\ \alpha_2 e^{-t} - \alpha_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$.

4) Si $a = 1$ Alors : $P_{A_1}(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)^2$; $Sp(A) = \{-1, 0\}$

$* E_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2z \\ x = 2y \end{matrix}$

$E_0 = \langle (2, 1, 1) \rangle$

$* E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_{-1} = \langle (1, 1, 0) \rangle$

$* (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $A_1 = PJP^{-1}$ tel que. $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice (02) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

) Jordanisation :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^4.$$

Le polynôme $P_A(\lambda)$ est scindé à valeur réel $\lambda = 1$ de multiplicité 4.

* On calcule le sous-espace propre de $\lambda = 1$:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit : $\begin{cases} -x+y+z+t=0 \\ -x+y \quad +2t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+z+t \\ z = t. \end{cases}$

$$E_1 = \left\{ (y+2t, y, t, t) \,;\, y,t \in \mathbb{R} \right\} = \langle \overbrace{(1,1,0,0)}^{v_1}, \overbrace{(2,0,1,1)}^{v_2} \rangle$$

* Complétons la base de E_1 par :

a) $(A-I)\,w_1 = v_1 \iff \begin{cases} -x+y+z+t = 1 \\ -x+y \quad +2t = 1 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} -x = 1-y-z-t \\ z = t \end{cases}$$

$$E_1^* = \left\{ (-1+y+2t, y, t, t) \,,\, y,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle (1,1,0,0), (2,0,1,1), \underbrace{(-1,0,0,0)}_{w_1} \rangle$$

b) $(A - I)\, \omega_2 = \omega_1 \iff \begin{cases} -x + y + z + t = -1 \\ -x + y \quad + 2t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = y + z + t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$

$E_n^{**} = \{ (y + 2t, y, t - 1, t),\ y, t \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 0) \rangle$

L'espace propre est complété et la matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A = P J P^{-1}$