Exercice (05)

Soit le système : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \\ z(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$

2- forme matriciel du système S :

$$X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1} X(t).$$

D'après l'exercice (01) : $A_1 = P J P^{-1}$ tel que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la solution du système S.

$$X(t) = e^{A_1 t} X(0).$$

Mais :

$$e^{A_1 t} = P e^{Jt} P^{-1}.$$

Alors

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} +e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$e^{A_1 t} = P e^{Jt} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ Donc :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = ($$

$$X(t) = \begin{pmatrix} (-3e^{-t} - te^{-t} + 2)\alpha + (te^{-t} + 2e^{-t} - 2)\beta + (4e^{-t} + te^{-t} - 4)\gamma \\ (-e^{-t} - te^{-t} + 1)\alpha + (te^{-t} - 1)\beta + (2e^{-t} + te^{-t} - 2)\gamma \\ (-e^{-t} + 1)\alpha + (e^{-t} + 1)\beta + (e^{-t} + 2)\gamma \end{pmatrix}$$