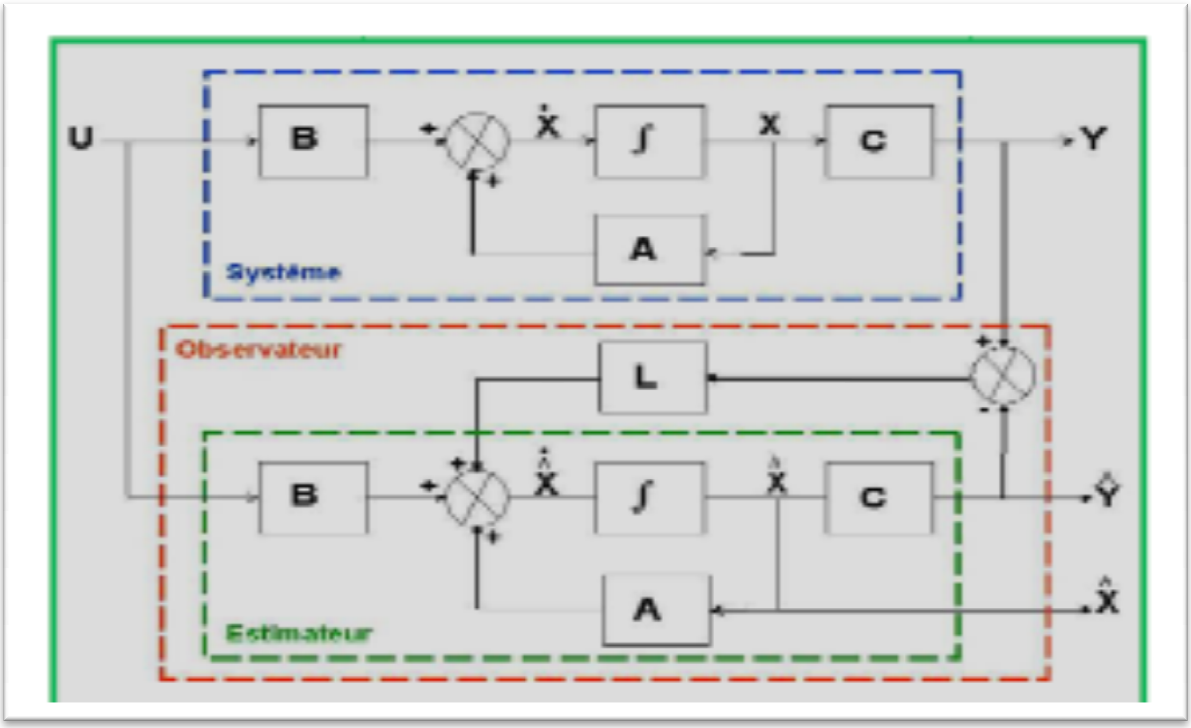
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS DANS L'ESPACE D'ÉTAT

Support de cours

Représentation d'état

Commande par retour d'état

Notes sur les observateurs d'état



Dr KENDOUCI KHEDIDJA

Maitre de conférences au Département d'Electrotechnique

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf

-ORAN- USTO-MB-

AVANT-PROPOS

Ce document regroupe un ensemble de notes de cours sur la commande par représentation d'état. Il accompagne le cours d'automatique linéaire dispensé aux étudiants de Génie Electrique, du deuxième cycle.

Le contenu de ce document n'est absolument pas exhaustif et doit être complété des notes personnelles prises lors des séances de cours, des travaux dirigés et des travaux pratiques.

KENDOUCI

A DADI RACHIDA !

Toi ma chère sœur !!Toi qui sais apprécier les petites joies. Toi en qui j'ai confiance. Toi à qui j'ai fait des confidences. Toi qui partages mes rires. Toi à qui je peux tout dire. A l'infini je te remercie

Dieu te guérisse ainsi tous les malades

TABLES DES MATIERES

	CHAPITRE I	
	REPRESENTATION D'ETAT DES SYSTEMES	**2**
I	Introduction	**2**
II	Représentation d'état	
III	Espace d'état et fonction de transfert	**6**
	1-Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert	**6**
	2- Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état	**7**
IV	Différentes représentations d'état (modèles)	**10**
	1- Forme canonique commandable	**10**
	2- Forme canonique observable	**12**
	3- Forme canonique diagonale (modale)	**13**
	4- Forme canonique de Jordan	**14**
V	Résolution des équations d'état	**21**
VI	Transformation entre les modèles d'état	**23**
VII	Diagonalisation des systèmes (découplage)	**28**
VIII	Stabilité dans l'espace d'état	**35**
	CHAPITRE II	
	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT	**37**
I	Introduction	**37**
II	Définition de la commandabilite	**37**
III	Conception du régulateur par retour d'état	**40**
IV	La méthodologie de placement des pôles	**42**
V	Conception du régulateur par retour d'état et intégrateur	**48**
	CHAPITRE III	
	NOTE SUR LES OBSERVATEURS D'ETAT	**54**
I	Introduction	**54**
II	Définition de l'observabilité	**54**
III	Définition de l'observateur d'état	**56**
IV	Synthèse d'observateur	**57**
	1-Principe de fonctionnement de l'observateur	**57**
	2- L'observateur de Luenberger linéaire	**59**
	3- L'observateur de Luenberger étendu	**60**
	RECUEIL DE TD	**70**
	RAPPEL SUR LE CALCUL MATRICIEL	**75**

Ce n'est pas que je suis si intelligent, c'est que je reste plus longtemps avec les problèmes. Albert Einstein

KENDOUCI

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

كل إناء يضيق بما جعل فيه

إلا وعاء العلم فإنه يتسع

I. INTRODUCTION

L'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques linéaires invariants (SLI) nécessitent la connaissance d'un modèle mathématique traduisant les relations reliant les grandeurs d'entrée principales et secondaires aux grandeurs de sortie.
En générale chaque SLI peut être représenté par une représentation suivante :

- Représentation graphique qui peut être diagramme fonctionnel ou de fluence
- Représentation reliant l'entrée à la sortie comme les fonctions de transfert qui demeurent des représentations externes ou par des modèles d'état dans ce cas on parle de représentations internes.

La représentation externe reste valable et efficace quelque soient les systèmes jusqu'à ce que ces derniers atteignent une complexité telle l'unique relation entrée - sortie pour les commander correctement ne peut en satisfaire. Ces modèles deviennent difficiles à mettre en œuvre lorsqu'ils possèdent plusieurs entrées et plusieurs sorties. L'analyse par variables d'´etat est une approche moderne d'étude des systèmes née dans les années 60.
Parmi les domaines d'application de cette théorie, l'automatique prend une place privilégiée : les représentations d'état sont à l'origine de méthodes puissantes d'analyse et de commande des systèmes, et qui possèdent en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

II. REPRESENTATION D'ETAT

L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées.
Quelques définitions à cet effet :

- **L'état** : est une structure mathématique constituée d'un ensemble de n variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)\ldots$ $x_n(t)$ telles que les valeurs initiales $x_i(t_0)$ de cet ensemble et les entrés $u_i(t)$ suffisent pour déduire d'une manière unique la réponse du système pour $t \geq t_0$

- **Les variables d'état :** un sous-ensemble de toutes les variables possibles du système $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)\ldots x_n(t)$

- **Le vecteur d'´etat :** est l'ensemble minimal de variables d'état décrivant le système

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad ou \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

- **Les équations d'état :** un groupe de n équations différentielles de premier ordre.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) + g(u) \tag{1.2}$$

- **L'espace d'état** : représentation valide du système formée par les équations d'état et les équations de sortie.
  Les fonctions **f** et **g** ne dépendent pas explicitement du temps.
  Cette formulation constitue une représentation d'état linéaire invariante dans le temps d'un système dont on parle souvent de système LTI (Linear Time-Invariant). Ce type de modèle continu qui fait l'objet de ce cours.

Exemple1.1:
Considérons le système (RLC) de la figure-1 :

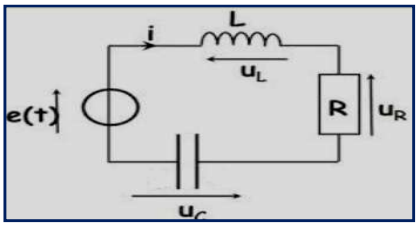


Figure 1.1 : Circuit RLC

Ce système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = R\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

En choisissant $u_c(t)$ et $i(t)$ comme variable d'état avec les conditions initiales (à $t=0$), $u_c(0)=0$ et $i(0) = 0$, et comme entrée la

tension d'alimentation ***e(t)*** et pour la sortie la tension aux bornes du condensateur ***u(t).*** On pose :

$$x_1(t) = i(t)\ , \quad x_2(t) = u_c(t)$$
$$u(t) = e(t)\ , \quad y(t) = u_c(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}\,x_1(t) - \frac{1}{L}\,x_2(t) + \frac{1}{L}\,u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\,x_1(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

La représentation d'état correspondante à ce système est comme suit :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

D'une manière générale, à tout système linéaire, causal et continu peuvent être associées les équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= A\,X(t) + B\,u(t) \quad \text{Equation d'état}\\ Y(t) &= C\,X(t) + D\,u(t) \quad \text{Equation de sortie}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Et peut être représenté par la figure 1.2

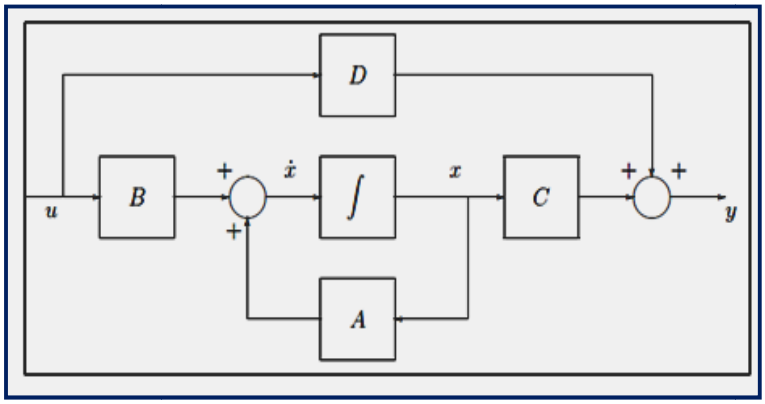


Figure 1.2 : Schéma bloc de la représentation d'état

Dans le cas général, le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties.
Soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties.

A : matrice d'état (ou dynamique) du système de dimension [n x n].
B : matrice de commande (d'entrée) de dimension [n x m].
C : matrice de mesure (de sortie) du système de dimension [p x n].
D : matrice de transmission directe de dimension [m x p].
X : vecteur d'état du système.
u : vecteur d'entrée du système.
y : vecteur de sortie du système.

Notes :

- *Il est important de noter, que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend, notamment, du choix des variables d'état selon l'étude du concept.*

- *Il est possible de passer d'une représentation d'état à une autre équivalente par une transformation linéaire.*

- *Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent* $D = 0$.

III. ESPACE D'ETAT ET FONCTION DE TRANSFERT

A. Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

Soit un système d'espace d'état

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x + D\,u$$

La conversion de ce système vers la fonction de transfert peut être obtenue en lui appliquant la transformée de Laplace aux deux côtés. (En supposant les conditions initiales sont nulles) :

$$s\,X(s) = A\,X(s) + B\,U(s)$$
$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \qquad (1.4)$$

ou sous la forme

$$s\,X(s) - A\,X(s) = B\,U(s)$$
$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

On trouve $X(s)$ telle que :

$$X(s) = (s\,I - A\,)^{-1} B\,U(s)$$

Si on remplace $X(s)$ dans l'équation de sortie $Y(s)$ on trouve :

$$Y(s) = [C(s\,I - A\,)^{-1} B + D]\,U(s)$$

La fonction de transfert $G(s)$ du système étant :

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(s\,I - A\,)^{-1} B + D]} \qquad (1.5)$$

Exemple1.2 :

Soit un système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}}{(s+2)\,(s-3)}$$

$$[C(s\,I - A\,)^{-1} B + D] = [1 \quad 1\,] \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}}{(s+2)\,(s-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$\frac{[s+2 \qquad s-2]}{(s+2)\;(s-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s^2 - s - 6} = \boldsymbol{G(s)}$$

En utilisant la fonction préétablie de Matlab (**ss2tf**), on obtient :

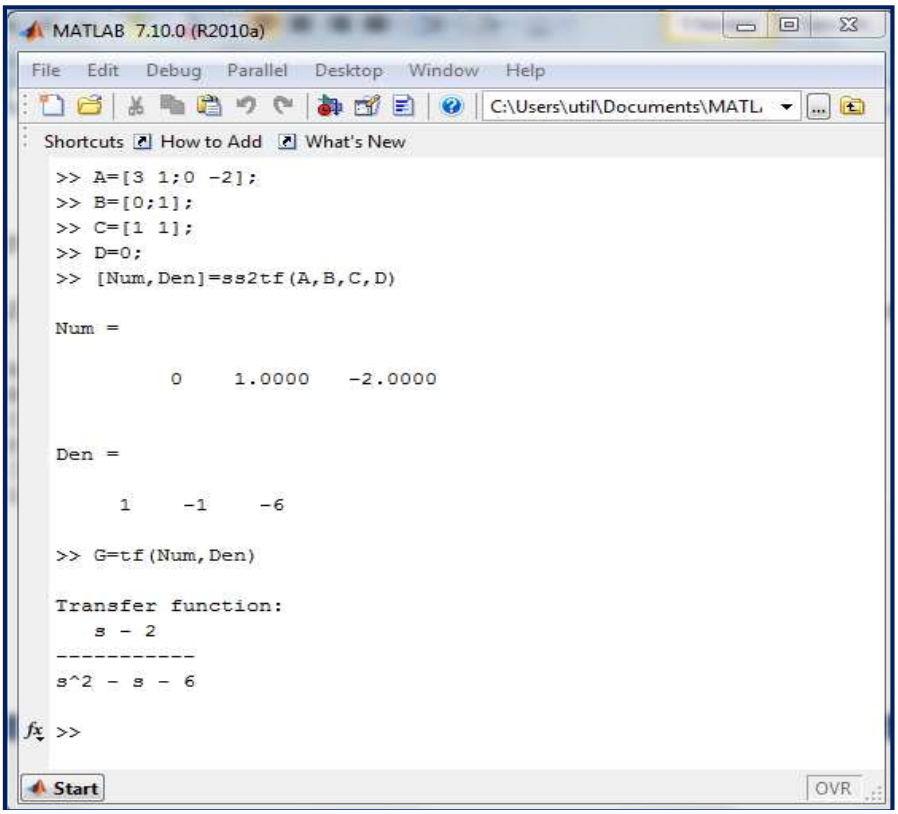


Figure 1.3 : passage de la représentation d'état vers la fonction de transfert sous Matlab

B. Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

En se basant sur la méthode des variables de phase, on peut convertir une fonction de transfert à une représentation d'état.

Soit le système représenté par la fonction de transfert $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_0^m b_i s_i}{s_n + \sum_0^{n-1} a_i s_i} \quad avec \quad m \leq n \qquad (1.6)$$

En décomposant cette fonction de transfert $G(s)$ en deux fonctions de telle sorte qu'on sépare la sortie $Y(s)$ de l'entrée $U(s)$ comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)} \frac{R(s)}{U(s)} = G_1(s).G_2(s)$$

Avec $\quad G_2(s) = \frac{1}{s_n + \sum_0^{n-1} a_i s_i} \quad et \quad G_1(s) = \sum_0^m b_i s_i$

En écrivant $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sous la forme différentielle :

$$\begin{aligned} &\frac{d^n r}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^n r}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dr}{dt} + a_0 = u \\ &b_m\frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r = y \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= \frac{dr}{dt} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dr}{dt} \\ \dot{x}_2 &= \frac{d^2 r}{dt^2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{d^n r}{dt^n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 \ldots - a_{n-1} x_n + u \\ y &= b_0 x_1 + b_1 x_2 \ldots + b_m x_m \end{aligned}$$

La forme matricielle de la représentation d'état est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (1.8)$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \ \ldots \ b_m \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemple 1.3 :

Soit un système possédant la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6}$$

On peut trouver toutes les représentations d'état possibles pour la même fonction de transfert avec les mêmes étapes que l'exemple précédent.

En utilisant la fonction préétablie de Matlab (**tf2ss**), on obtient la représentation d'état. Matlab par défaut ne donne qu'une seule représentation.

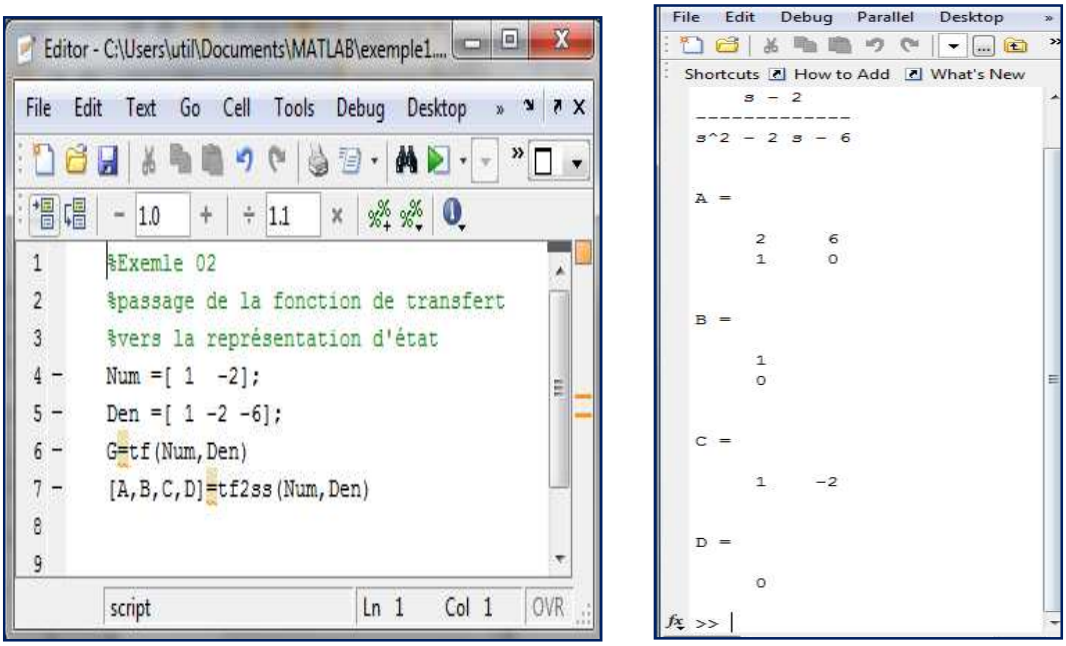


Figure 1.4 : Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état sous Matlab

IV. DIFFERENTES REPRESENTATIONS D'ETAT (MODELES)

Plusieurs techniques peuvent être appliquées pour donner une représentation d'état d'un système à partir de sa fonction de transfert. On présente ici les représentations d'état sous formes canoniques.

Soit le système défini comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_0^n b_i s^{n-i}}{s_n + \sum_0^{n-1} a_i\, s^n} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s \quad + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s \quad + a_n}$$

A. Forme canonique commandable

La représentation suivante est appelée forme canonique commandable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_{-2} & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.9)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

On note que dans le cas général b_0 =0 , l'équation de sortie se simplifie et devient sous la forme suivante :

$$y = [b_n \ \vdots \ b_{n-1} \ \vdots \ \dots \ \vdots \ b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si la forme canonique de commandabilité d'un système existe, elle peut s'obtenir à partir de sa fonction de transfert.

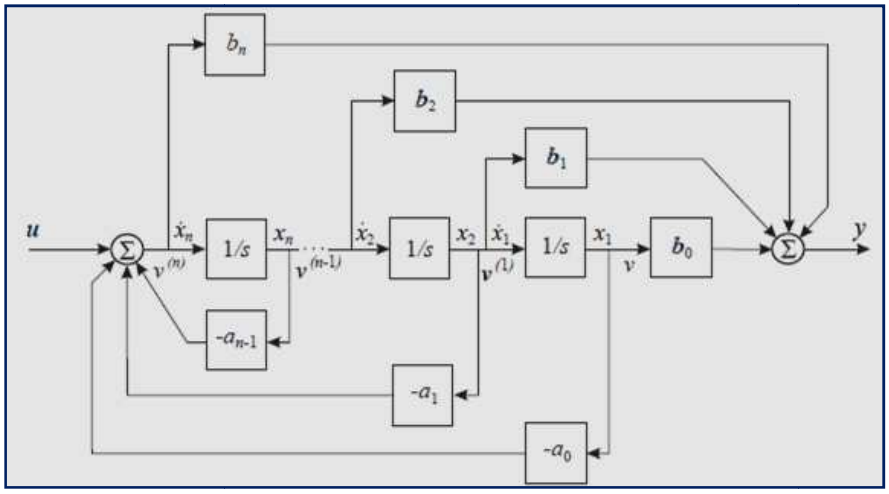


Figure 1.5 Schéma de simulation de la forme commandable

Soit un système d'ordre 3 donné par la fonction de transfert $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$G(s)$ peut se mettre sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} \frac{H(s)}{U(s)}$$

Avec

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s \quad + a_3}$$

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \; b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3$$

De ces deux fonctions de transfert on tire les deux équations différentielles où la variable *h* est un intermédiaire de calcul :

$$\frac{d^3h}{dt^3} = \; -a_1 \frac{d^2h}{dt^2} - a_2 \frac{dh}{dt} - a_3 h + u$$

$$y = \; b_1 \frac{d^2h}{dt^2} + b_2 \frac{dh}{dt} + b_3 h$$

En choisissant comme composantes du vecteur d'´etat :

$$x_1 = h$$

$$x_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \quad = (\dot{x}_1)$$

$$x_3 = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \quad = (\dot{x}_2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \; -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + u \quad = (\dot{x}_3)$$

$$y \quad = \quad b_1 x_3 + b_2 x_2 + b_3 x_1$$

Les dernières équations se résument sous la forme matricielle pour donner une représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y \quad = \quad [b_3 \qquad b_2 \qquad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Chaque variable d'état *xi*, *i=2,…,n−1* est la dérivée de la variable précédente. On parle de **variables de phase**

En agissant sur u, on fait évoluer x_n, par effet de cascade on agit sur les autres états qui peuvent être commandés et modifiés.

B. Forme canonique observable

La représentation suivante est appelée forme canonique observable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & -a_n \\ & & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (1.10)$$

On note que dans le cas générale b_0 =0 , la représentation se simplifie et devient sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & -a_n \\ & & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

On remarque la matrice A (n x n) de la forme commandable (A_c) est la transposé de la matrice A (n x n) de la forme observable (A_o).

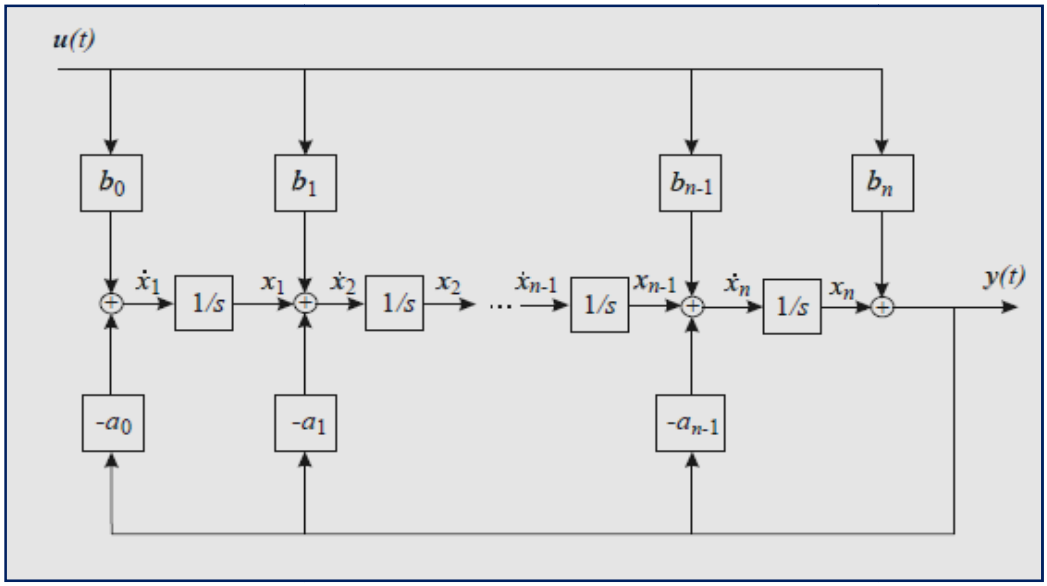


Figure 1.6 Schéma de simulation de la forme observable

Connaissant $y=x_n$, on peut déduire les autres états par dérivation et différence.

C. Forme canonique diagonale (modale)

- Cette forme est appliquée au système où le dénominateur est décomposable pour obtenir des fonctions de transfert en fraction simple comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s \quad + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s \quad + a_n}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

D'où la forme diagonale est déduite à partir des pôles de chaque fraction du 1er ordre

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (1.11)$$

Chaque état x_i est indépendant des autres - $k_i = c_i$ *(au schéma)*-

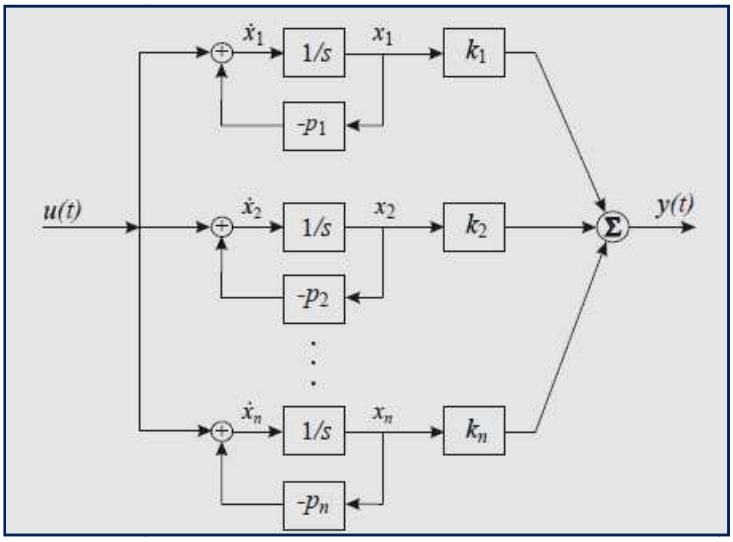


Figure 1.7 Schéma de simulation de la forme modale

D. Forme canonique de Jordan

Dans le cas où les pôles du dénominateur sont de types multiples, la forme canonique modale sera de la forme de Jordan. Si on considère que seul le pole p_1 est multiple et les autres pôles sont simples la fonction de transfert du système est comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s \quad + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5) \dots (s+p_n)}$$
$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

La représentation d'état sous la forme canonique de Jordan est donnée par :

Bloc de Jordan

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & -p_4 & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -p_i & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -p_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + b_0 u \qquad (1.12)$$

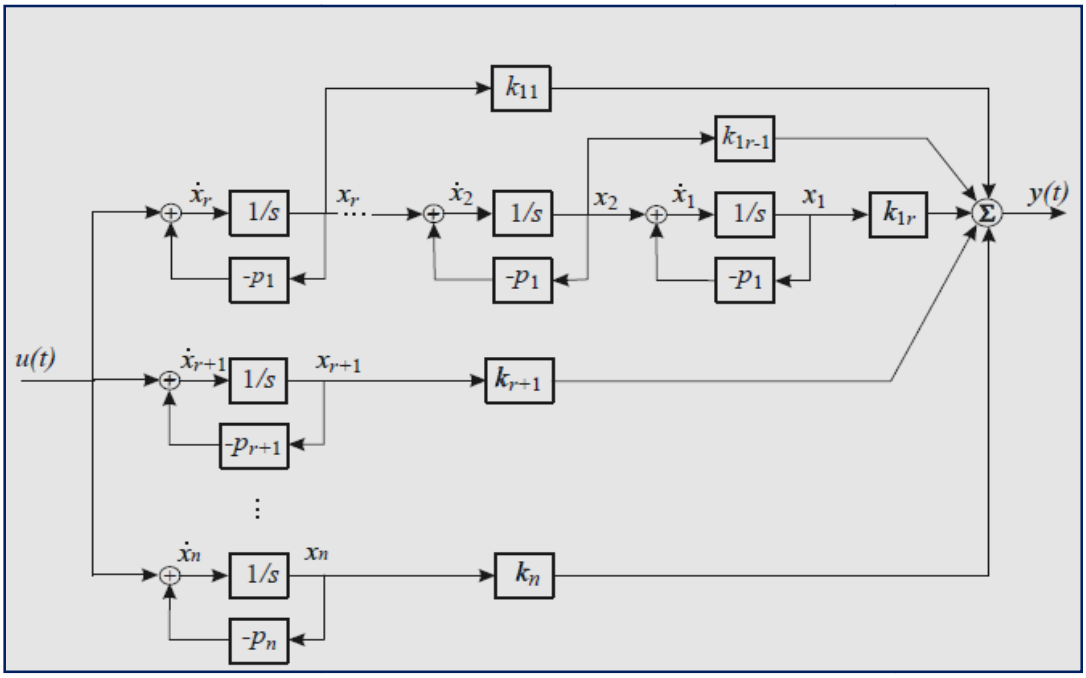


Figure 1.8 Schéma de simulation de la forme Jordan

Exemple 1.4

On considère le système donné par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

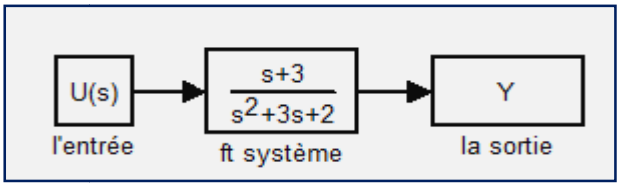


Figure 1.9 Le schéma fonctionnel (Matlab/Simulink)

On peut obtenir les trois formes de représentation canonique

1- *Forme canonique commandable*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

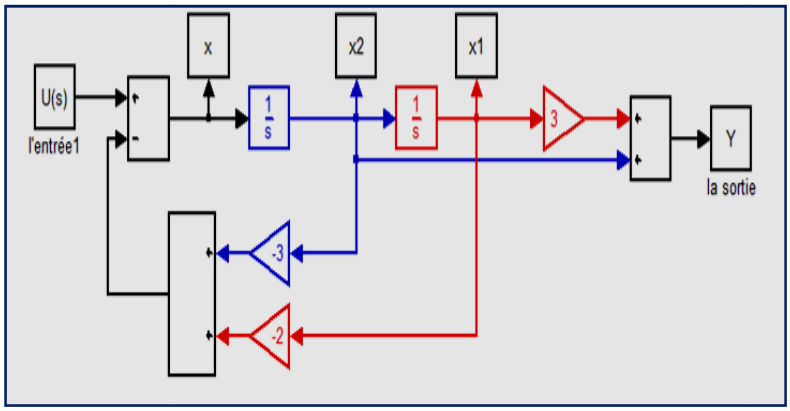


Figure 1.10.a Le schéma fonctionnel de la forme commandable (Matlab/Simulink)

Sous Matlab/Simulink une autre forme de schématiser un système par sa représentation d'état donnée par la figure 1.10.b où le bloc state-space est à la bibliothèque de Simulink /continous, en modifiant les matrices A,B,C,D selon la forme canonique choisie.

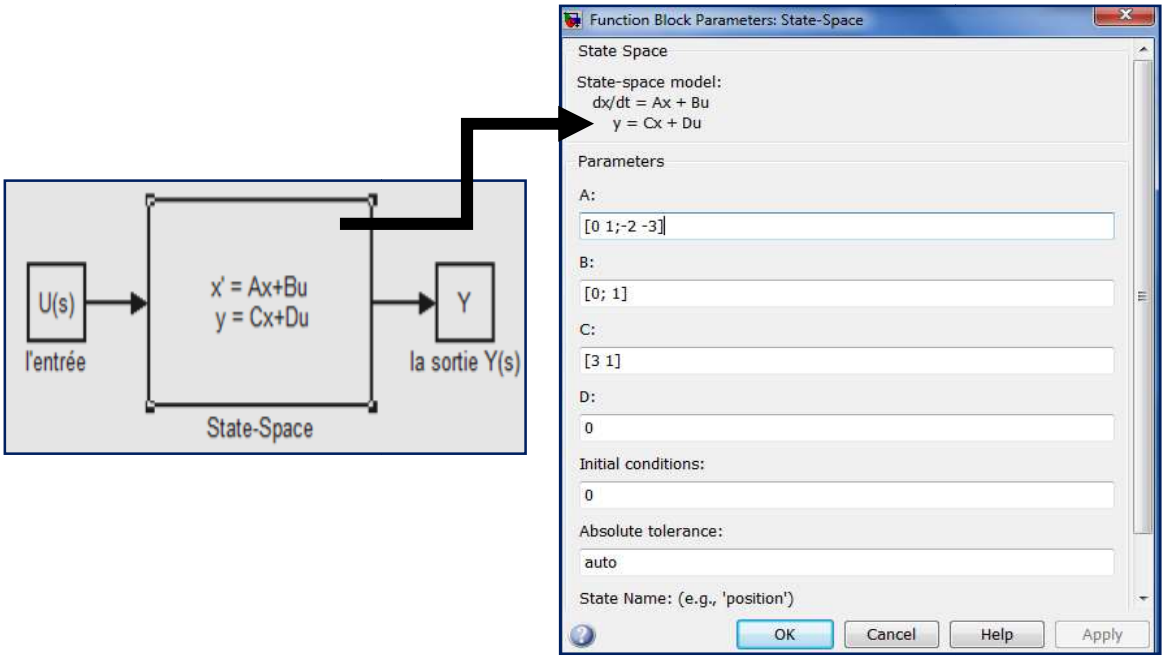


Figure 1.10.b Le schéma de la forme commandable

2- *Forme canonique observable*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

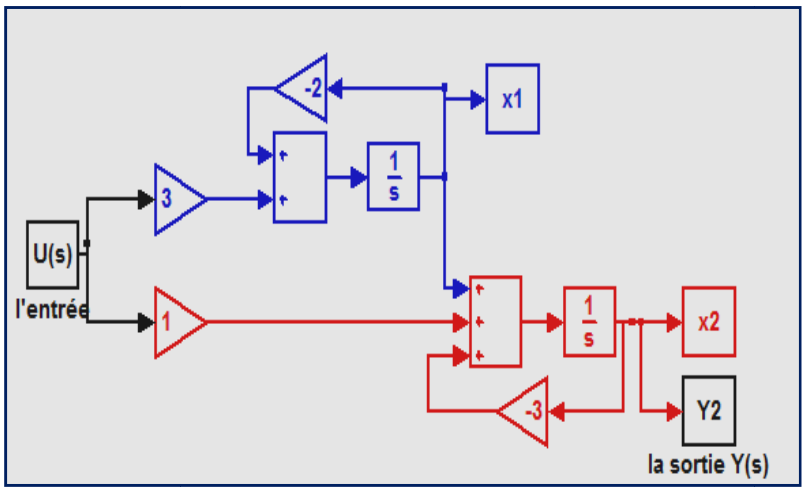


Figure 1.11 Le schéma fonctionnel de la forme observable (Matlab/Simulink)

3- *Forme canonique modale*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

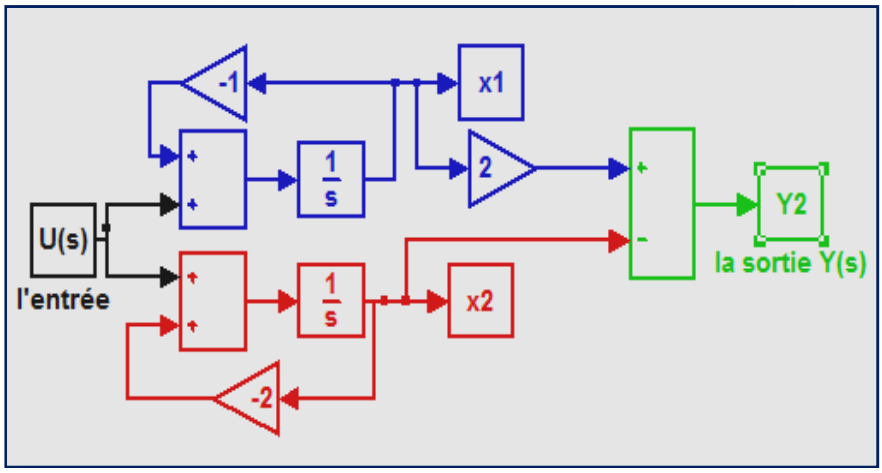


Figure 1.12 Le schéma fonctionnel de la forme modale (Matlab/Simulink)

Sous Matlab on passe des trois formes précédentes vers la fonction de transfert par l'instruction (***ss2tf***) et on retrouve qu'elles représentent la même fonction de transfert.

En conclusion le système présenté par une fonction transfert (unique) peut avoir plusieurs représentations d'état.

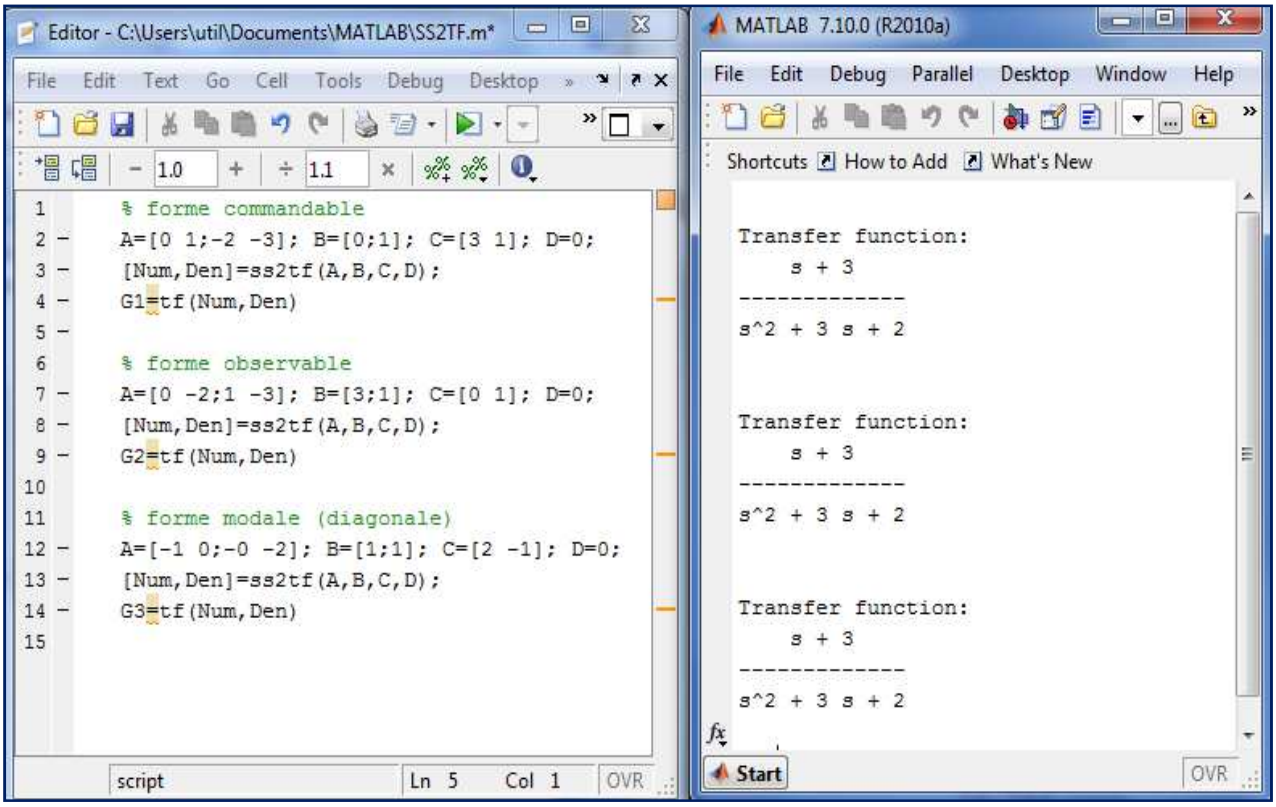


Figure 1.13 : Passage des 3 représentations d'état vers la fonction de transfert sous Matlab

On refait les mêmes étapes sous Simulink, ceci en utilisant de la bibliothèque le bloc State-spaces (sous la rubrique countinous) on montre ici le remplissage du bloc forme commandable et c'est les mêmes procédures pour les autres formes, en respectant les matrice A,B,C,D de chaque forme.

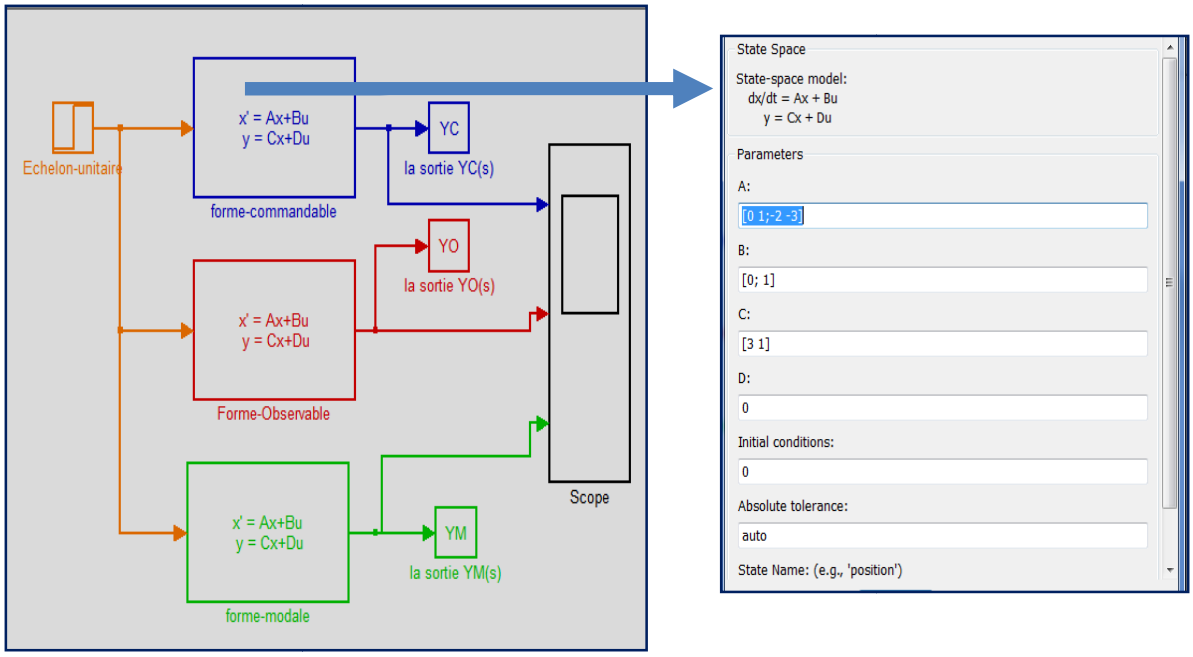


Figure 1.14 : Les trois représentations d'état de $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ sous Simulink

La figure 1.15 montre les résultats de simulations obtenues pour les trois sorties (YO, YC, YM) en leurs appliquant la même entrée u (t) échelon unité.

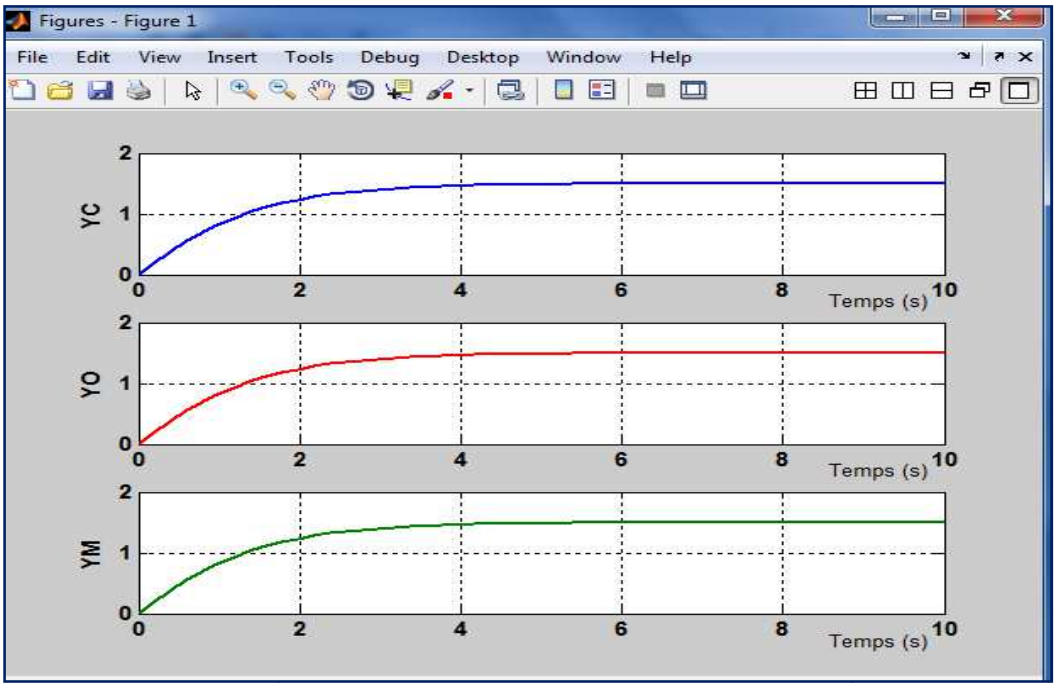


Figure 1.15 : Résultats de simulation des trois représentations d'état du même système $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

V. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

La résolution des équations d'état consiste à déterminer les expressions temporelles des n variables d'état connaissant l'entrée $u(t)$ qui leurs est appliquées.

Soit un système donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = a\,x\,(t) + \,b\,u(t)$$

La solution a pour expression

$$x(t) = \,e^{at}\,x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\,b\,u(\tau)d\tau \qquad (1.13)$$

La généralisation de cette solution à un système différentiel présenté par les équations d'état :

$$\dot{x}(t) = [A]x\,(t) + \,[B]\,u(t)$$

sera comme suit :

$$X(t) = \,e^{[A]t}\,X(0) + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}\,[B]\,u(\tau)d\tau \qquad (1.14)$$

Où on note $\boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{t}) = \,\boldsymbol{e^{[A]t}}$ appelée **matrice de transition** du système.

$$X(t) = \,\boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{t})\,X(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}\,(t-\tau)\,[B]\,u(\tau)d\tau \qquad (1.15)$$

V.1 Calcul de la matrice de transition $\boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{t})$

Le calcul de la matrice de transition dans la résolution des équations d'état est l'opération la plus délicate, où plusieurs méthodes existent, ici on cite la plus classique basée sur la transformation de Laplace

- **Calcul basé sur la transformée de Laplace**

Soit système d'équations différentielles de la représentation d'état

$$\dot{x}(t) = [A]x\,(t) + \,[B]\,u(t)$$

En lui appliquant la transformée de Laplace on obtient :

$$s\,X(s) - \,x(0) = [A]X(s) + \,[B]\,U(s) \;\Rightarrow (s\,I - [A])X(s) = \,x(0) + \,[B]\,U(s)$$

Où I matrice carrée d'identité de dimension n

$$X(s) = \,(s\,I - [A])^{-1}x(0) + \,(s\,I - [A])^{-1}[B]\,U(s)$$

Il est clair que la transformée de Laplace de

$$\mathcal{L}(e^{[A]t}) = \,(s\,I - [A])^{-1}$$

Avec $(s\,I-[A])^{-1}==\frac{\mathrm{I}}{s}+\frac{[A]}{s^2}+\frac{[A]^2}{s^3}+\cdots\frac{[A]^n}{s^{n+1}}+\cdots,$

Où $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\mathcal{L}^{-1}(s\,I-[A])^{-1}=\ I+[A]t+\frac{[A]^2}{2!}t^2+\frac{[A]^3}{3!}t^3+\cdots\frac{[A]^n}{n!}t^n+\cdots,$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\mathcal{L}^{-1}(s\,I-[A])^{-1}=\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Adj(s\,I-[A])}{\det(s\,I-[A])}\right) \qquad (1.16)$$

Exemple 1.5

Soit le système suivant soumit à u(t) échelon unité:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \text{avec} \quad x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Calculer de la matrice de transition $\Phi\,(t)$ puis $x\,(t)$.

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 1\\ -8 & s+6\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\frac{1}{(\,s^2+6\,s+8)}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\mathcal{L}^{-1}(s\,I-[A])^{-1}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{(\,s^2+6\,s+8)} & \frac{1}{(\,s^2+6\,s+8)}\\ \frac{-8}{(\,s^2+6\,s+8)} & \frac{s}{(\,s^2+6\,s+8)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+4}\right] & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5}{s+2}-\frac{0.5}{s+4}\right]\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2}+\frac{4}{s+4}\right] & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+4}\right]\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}\\ -4e^{-2t}+4\,e^{-4t} & -e^{-2t}+2e^{-4t}\end{bmatrix}$$

- **Cas de matrice A diagonale**

Si la matrice carrée A d'ordre n est diagonale on a :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{[A]\boldsymbol{t}} \tag{1.17}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{e}^{[A]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

- **Cas de matrice A diagonalisable**

Si la matrice carrée A d'ordre n admet n valeurs propres distinctes $\lambda_i : i = 1 \ldots n$on dit qu'elle est diagonalisable et il existe une matrice de transformation $\boldsymbol{T}$ telle que :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{T}\, \boldsymbol{e}^{A_m} \boldsymbol{T}^{-1}$$

T : matrice des vecteurs propres de A

Propriété de la matrice Φ (t)

On note quelques propriétés de cette matrice

$\Phi(0) = I$

$\Phi(t)^{-1} = \Phi(-t)$

$\Phi(t_2 + t_1) = \Phi(t_2)\,\Phi(t_1)$

$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) \qquad avec \qquad t_0 \leq t_1 \leq t_2$

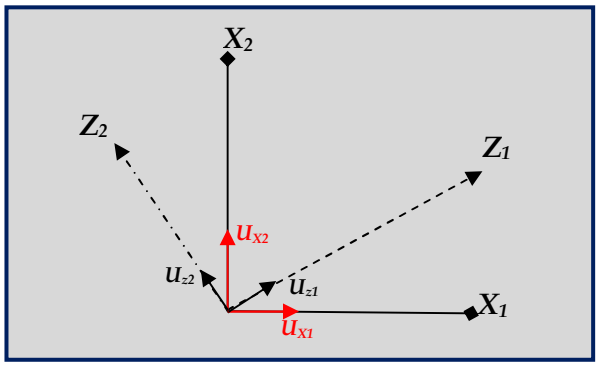
$\Phi(t)^k = \Phi(kt) \qquad \forall\, k \in N$

VI. TRANSFORMATION ENTRE LES MODELES D'ETAT

Elles permettent de passer d'une représentation d'état à une autre sans utiliser ni fonction de transfert ni graphe de fluence. Ceci nous aide à trouver des matrices creuses où la grande partie de ses composantes est nulle. En général, il existe différentes méthodes pour déterminer la matrice de transformation.

- **Rappels sur les changements de base par transformation linéaire**

Considérant l'espace à deux dimensions avec deux bases (X_{12}) et (Z_{12})



$$\begin{cases} x = x_1\, U_{x1} + x_2\, U_{x2} \\ z = z_1\, U_{z1} + z_2\, U_{z2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

La relation entre la composante de X et celle de Z définit la transformation du vecteur X en Z et vice-versa.

Dans l'espace définit par la base (X_1X_2) la vectrice unité de la base (Z_1Z_2) est donnée par :

$$\begin{cases} U_{z1} = V_{11}\, U_{x1} + V_{12}\, U_{x2} \\ U_{z2} = V_{21}\, U_{x1} + V_{22}\, U_{x2} \end{cases}$$

En remplaçant dans z on trouve que

$$z = z_1\,(V_{11}\, U_{x1} + V_{12}\, U_{x2}) + z_2\,(V_{21}\, U_{x1} + V_{22}\, U_{x2})$$

Sachant que x=z on aura :

$$x = (z_1V_{11} + z_2V_{21})\, U_{x1} + (z_1V_{21} + z_2V_{12})\, U_{x2} = \begin{bmatrix} z_1V_{11} & z_2V_{12} \\ z_1V_{21} & z_2V_{22} \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad V.z \quad \Rightarrow \quad z = V^{-1}\, x$$

Exemple 1.6:

Transformer le vecteur $x = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ exprimé dans la base unitaire où les vecteur unitaires sont donnés par

$$U_{x1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad U_{x2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad U_{x3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

vers la base suivante $U_{z1} = \begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad U_{z2} = \begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad U_{z3} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix} = Z = z_1.U_{z1} + z_2.U_{z2} + z_3.U_{z3}$$

On met

$$X = z_1.\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} + z_2.\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} + z_3.\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix} = V\,.Z$$

$$Z = V^{-1}X = \begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.83\\0\\1\end{bmatrix}$$

Donc $X = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ dans la base $X_{123} \leftrightarrow Z = \begin{bmatrix}2.83\\0\\1\end{bmatrix}$ dans la base Z_{123}

- **Transformations des équations d'état**

Soit $\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$

Si on transforme cette représentation via la matrice de transformation $\boldsymbol{P}$ tel que ce système $\boldsymbol{X = P\,Z}$ on obtient une nouvelle représentation tel que :

$$\begin{cases} P\,\dot{z} = A\,P\,z + B\,u \\ y = C\,P\,z + D\,u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = P^{-1}A\,P\,z + P^{-1}\,B\,u \\ y = C\,P\,z + D\,u \end{cases} \qquad (1.18)$$

On déduit que :
La nouvelle matrice d'état du système est $\boldsymbol{P^{-1}A\,P}$
La nouvelle matrice de commande $\boldsymbol{P^{-1}\,B}$
La nouvelle matrice de mesure du système $\boldsymbol{C\,P}$
La matrice de transmission directe reste la même $\boldsymbol{D}$

On peut montrer que les fonctions de transfert associées aux deux systèmes sont identiques. Soit $G1(s)$ liée à X et $G2(s)$ liée à Z et on montre que $G1(s) = G2(s)$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases} \Rightarrow G1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(s\,I - A\,)^{-1}B + D]$$

$$\begin{cases} \dot{z} = P^{-1}A\,P\,z + P^{-1}\,B\,u \\ y = C\,P\,z + D\,u \end{cases} \Rightarrow G2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$= [C\,P(s\,I - P^{-1}A\,P\,)^{-1}P^{-1}\,B + D]$$

On a $(MN)^{-1} = M^{-1}\,N^{-1}$

On pose $\begin{cases} M = s\,I - P^{-1}A\,P \\ N = P \end{cases}$

$$G2(s) = [C\,P(s\,I - P^{-1}A\,P\,)^{-1}P^{-1}\,B + D]$$
$$= C[P(s\,I - P^{-1}A\,P\,)P^{-1}]^{-1}\,B + D]$$

Puisque $(s\,I - P^{-1}A\,P\,)\,P^{-1} = (s\,I\,P^{-1} - P^{-1}A\,)$

Donc $G2(s) = [C(s\,I - A\,)^{-1}B + D]$

D'où $G2(s) = G1(s)$

On peut aussi montrer que les valeurs propres sont les mêmes pour les deux systèmes. On détermine les valeurs propres par la solution des équations caractéristiques pour chaque forme

$$\begin{cases} det(s\,I - P^{-1}A\,P) = 0 \\ det(sI - A) = 0 \end{cases} \quad \text{on pose} \quad I = P^{-1}\,P$$

$$det(s\,P^{-1}\,P - P^{-1}A\,P) = det\,[P^{-1}\,(sI - A)P] = 0$$

On sait que $det(ABC\ldots) = det(A)\,det(B)\,det(C)$

$$det(P)\,det(P^{-1}) = I$$

Donc

$$det\,[P^{-1}\,(sI - A)P] = det(P^{-1})\,det(sI - A)\,det(P) = det\,(sI - A) = 0$$

Exemple 1.7

Soit le système

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$
$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformer le système avec les nouvelles variables d'état tel qu'entre X et Z existe les relations suivantes :

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1 \\ z_2 = 3x_1 + 2x_2 \\ z_3 = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{cases}$$ on cherche la matrice de transformation P

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} X = P^{-1}X \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0 \\ -1.25 & 0.7 & 0.4 \\ -2.5 & 0.4 & -6.2 \end{bmatrix}; = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}; CP$$
$$= [0.5 \quad 0 \quad 0]$$

La nouvelle représentation d'état en Z est donnée finalement par

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0 \\ -1.25 & 0.7 & 0.4 \\ -2.5 & 0.4 & -6.2 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} U$$
$$Y = [0.5 \quad 0 \quad 0]$$

VI. DIAGONALISATION DES SYSTEMES (DECOUPLAGE)

Il est souvent préférable de retrouver une représentation d'état ayant des matrices creuses où la plus part des composant sont nulles. Ceci peut être obtenu par la transformation du modèle d'état initial ou souvent la diagonalisation est toujours souhaitable.

A. Cas des valeurs propres réelles

Considérant la transformation suivante : $\dot{x} = [T]\, z$

$\dot{x}$: vecteur d'état initial

z: nouveau vecteur d'état

$[T]$ matrice de passage ou de transformation

Le modèle d'état initial

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x + D\,u$$

Le modèle d'état final

$$\dot{z} = A_n + B_n\,u$$
$$y = C_n + D_n\,u$$

Les nouvelles matrices formant le système sont données comme suit :

$$\boldsymbol{A_n} = T^{-1}A\,T$$
$$\boldsymbol{B_n} = T^{-1}B$$
$$\boldsymbol{C_n} = C\,T$$
$$\boldsymbol{D_n} = D$$

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la matrice de transformation T, la plus simple celle à base de vecteur propres v_i de la matrice A associé aux valeurs propres $\lambda_i$de A $(i = 1 \ldots n)$ tel que

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \ldots \quad \boldsymbol{v_n}]$$

Si toutes les valeurs propres sont distinctes la matrice A_n est donnée par :

$$A_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Exemple1.8:

Soit un système dont la matrice A est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de A puis les vecteurs propres associés. Retrouver la matrice diagonale D

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -(5-\lambda)(4+\lambda) + 18$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

d'où les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$

Pour déterminer les vecteurs propres V on pose $AV = \lambda V$

la première valeur propre $\lambda_1 = -1$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)V_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6v_{11} - 3v_{12} \\ 6v_{11} - 3v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 6v_{11} - 3v_{12} = 0$$

$$\Rightarrow v_{11} = \frac{1}{2} v_{12}$$

On fait un choix de $v_{11} = 1 \quad v_{12} = 2$

Le 1er vecteur propre $\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Les mêmes étapes avec $\lambda_2 = 2$

Le 2ème vecteur propre $\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

La matrice P formée des vecteur propres trouvés est utilisée pour diagonaliser la matrice A. On note D la matrice diagonale de A

$D = P^{-1} A P$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{on a} \quad det(P) = -1$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.9:

Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Trouver le système $\boldsymbol{Z}$ équivalent diagonal ?

- On cherche les valeurs propres λ_i de A puis les vecteurs propres de A puis on passe à la diagonalisation

La solution de $\det(\lambda_i I - A) = 0$ donne les λ_i

$$(\lambda_i I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ 1 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda_i I - A) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

Les racines sont $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_{-4} = -4$

- On cherche les vecteurs propres par la résolution de la fonction suivante :

$$Av_i = \lambda_1 v_i \qquad (1)$$

$$Av_i = \lambda_2 v_i \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k1 \\ k1 \end{bmatrix} \text{ on prend } k1 = 1$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = -v_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k2 \\ -k2 \end{bmatrix} \text{ on prend } k2 = 1$$

La matrice T de transformation utilisée pour passage au modèle diagonale est choisi en combinant les vecteur propres trouvés en solution de (1) et (2) tel que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

On applique les formules

$$\boldsymbol{A_n} = T^{-1}A\,T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_n} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C_n} = C\,T = [5 \quad -1]$$

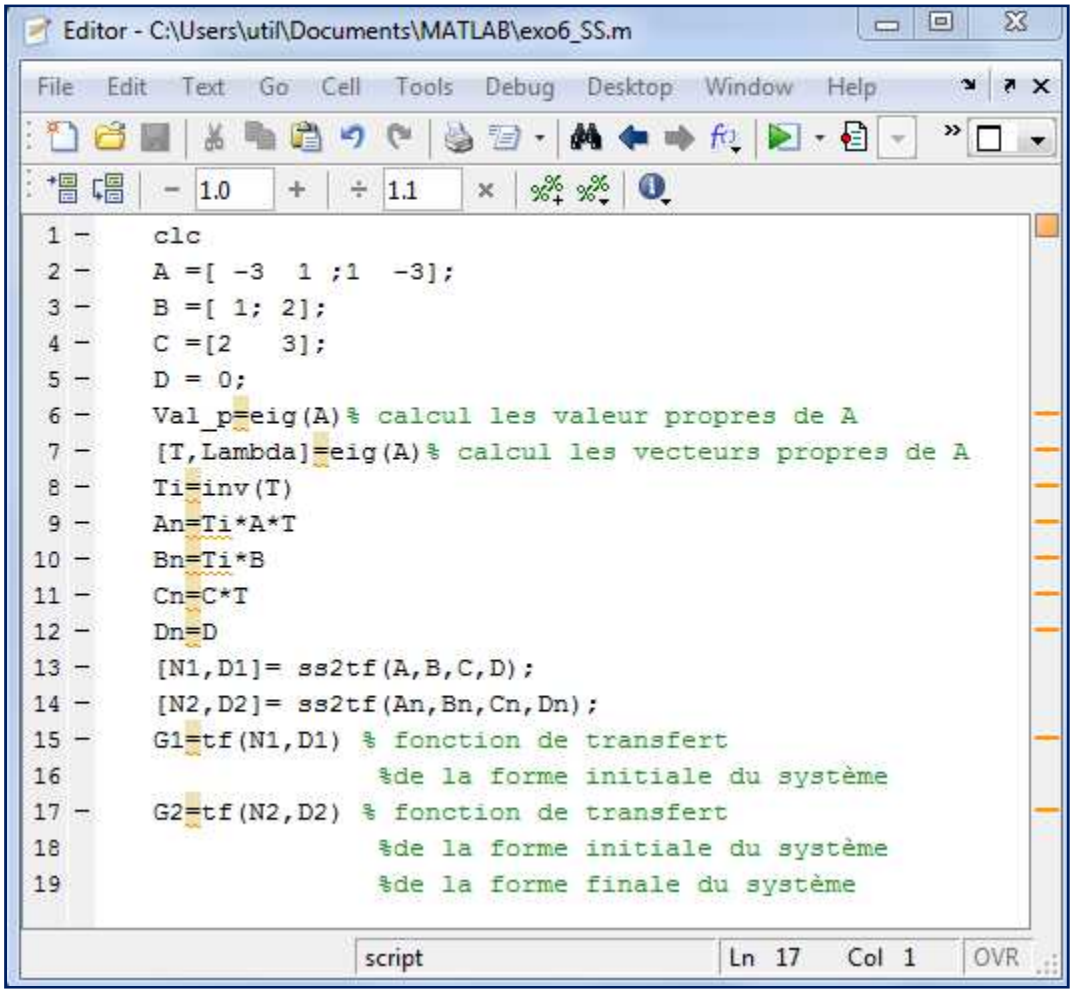
$$\boldsymbol{D_n} = D = 0$$

Ceci donne la forme finale du système

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \quad -1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Matlab propose une fonction préétablit (*eig*) qui calcul les valeurs propres de A et qui servira à la résolution de l'équation $Ax = x\lambda_1$ pour chercher les vecteurs propres correspondants.




```
Val_p =  ( -4      -2)
T =  [ 0.7071   0.7071 ; -0.7071  0.7071]
Lambda =[-4    0 ; 0   -2]
Ti = [0.7071   -0.7071 ;  0.7071   0.7071]
                          An =[ -4.      0  ;  0     -2].
Bn =[ -0.7071  ;   2.1213]
Cn = [-0.7071   3.5355]
Dn =     0
Transfer function1:        8 s + 31
                          -------------
                          s^2 + 6 s + 8

Transfer function2:        8 s + 31
                          -------------
                          s^2 + 6 s + 8
```

Figure 1.16 : Passage d'une représentations d'état vers autre représentation sous Matlab

B. Cas des valeurs propres complexes :

S'il existe des valeurs propres complexes

$$\lambda_i = \sigma + j\omega \qquad \text{et } \lambda_{i+1} = \sigma - j\omega$$

Parmi les valeurs propres de A, il existe deux solutions possibles.

- Diagonalisation classique

Matrice diagonale, à éléments diagonaux λ_i et λ_{i+1} complexes.

Pour système du deuxième ordre.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

On montre aisément que les vecteurs propres associés sont eux aussi complexes conjugués.

$$v_i = \alpha + j\beta \quad \text{et } v_{i+1} = \alpha - j\beta$$

- Transformation modifiée : $\boldsymbol{Tm}$

$$T_m = [\alpha, \beta]$$

$$A\, v_i = A\,\alpha + jA\,\beta$$

$$A\,\alpha = \sigma\alpha - \omega\beta$$

$$A\,\beta = \sigma\alpha + \omega\beta$$

$$A\ [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Exemple 1.10

Pour système d'ordre 7, ayant deux paires de valeurs propres complexes conjuguées

λ_1 $\overline{\lambda_1}$ λ_2 $\overline{\lambda_2}$ la transformation modifiée est :

$$T_m = [\Re(v_1) \quad \Im m(v_1) \quad \Re(v_2) \quad \Im m(v_2) \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7]$$

La nouvelle représentation est

$$\boldsymbol{A_m = T_m^{-1}\, A\, T_m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_1} & \boldsymbol{\omega_1} & & & & & \\ \boldsymbol{-\omega_1} & \boldsymbol{\sigma_1} & & & & & \\ & & \boldsymbol{\sigma_2} & \boldsymbol{\omega_2} & & & \\ & & \boldsymbol{-\omega_2} & \boldsymbol{\sigma_2} & & & \\ & & & & \boldsymbol{\lambda_5} & & \\ & & & & & \boldsymbol{\lambda_6} & \\ & & & & & & \boldsymbol{\lambda_7} \end{bmatrix}$$

$$A_m = T_m^{-1} A T_m \qquad C_m = C T_m$$
$$B_m = T_m^{-1-1} B \qquad D_m = D$$

VII. STABILITE DANS L'ESPACE D'ETAT

Dans la littérature il existe plusieurs définitions de la stabilité, on retient ces dernières :

- Un système est stable si et seulement si écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. Une faible perturbation des conditions initiales du système engendre une faible perturbation de sa trajectoire
- Un système est stable si en réponse à une entrée bornée, la sortie du système est bornée

Ces concepts de stabilité d'un point d'équilibre sont illustrés sur la figure 1.17 :

Position A : équilibre instable.
Position B : équilibre stable.
Position C : équilibre asymptotiquement stable.

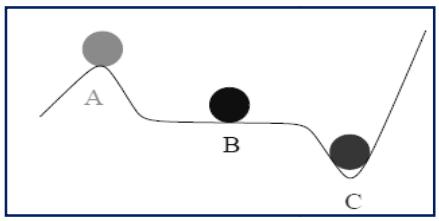


Figure 1.17 : Les trois états d'´equilibre possibles d'une bille

On peut démontrer que la stabilité d'un système est obtenue à partir de: $\det(s\,I - [A]) = 0$, on résout l'équation obtenue par la méthode de Routh-Hurwitz.

Exemple 1.11

Etudier la stabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

On calcule le $\det(s\,I - [A])$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ -6 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\,I - [A]) = s^2 - s - 12 = 0$$

Le det$(s\ I - [A])$ est une équation du deuxième degré on calcul directement les pôles on trouve :

$$s_1 = -3 \quad et \quad s_2 = 4$$

On remarque que le deuxième pole $s_2 > 0$ donc le system instable.

En utilisant les fonctions préétablies de Matlab *(***eig***)*, on obtient le même résultat.
On peut aussi vérifier la stabilité si on soumit le système à une entrée échelon unité notée en Matlab par la fonction préétablie (**step**).

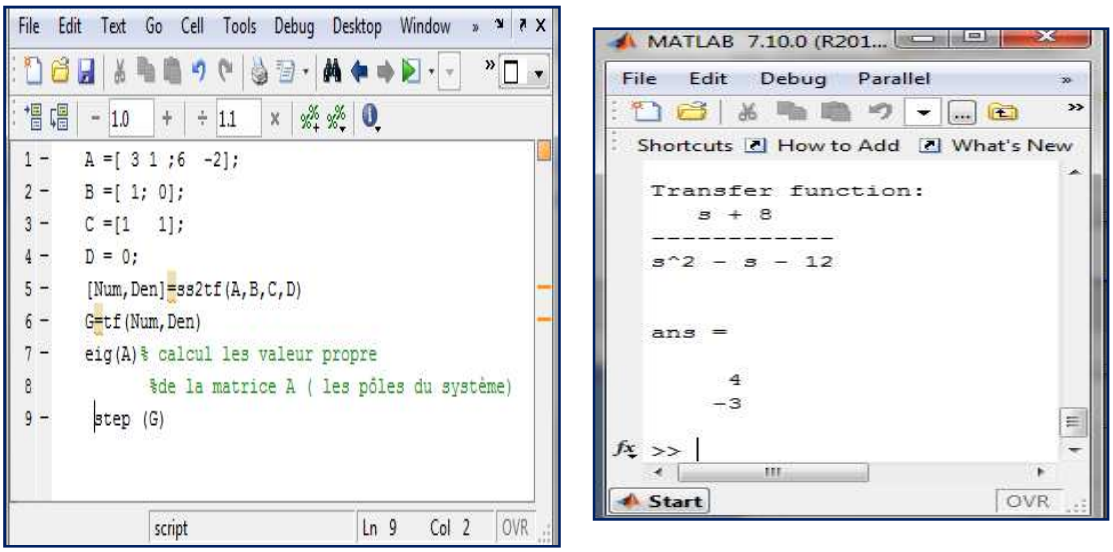


Figure 1.18 : Etude de stabilité d'une représentation d'état sous Matlab

On remarque que le deuxième pole $s_2 = 4 > 0$ donc le system instable.

CHAPITRE II

COMMANDE PAR RETOUR D'ETATS

أول العلم الصمت والثاني حسن الاستماع

والثالث حفظه والرابع العمل به

والخامس نشره

I. INTRODUCTION

La commande par retour d'état est un moyen de modifier le comportement en boucle fermée d'un système dynamique donné par une représentation d'état. Cette approche suppose l'état connu. Une finalité de la commande par retour d'état peut être considérée pour minimiser (ou maximiser) un indice de performance. Ceci peut être aussi utilisé pour obtenir un système en boucle fermée dont les pôles (les valeurs propres de la matrice d'état), soient placés de manière appropriée. Ces derniers déterminent le comportement d'un système monovariable ; dans le cas où le système est multivariable, il est indispensable de considérer uniquement les valeurs propres, mais il est nécessaire de faire les augmentations d'état nécessaires.

II. DEFINITION DE LA COMMANDABILITE

Soit un système d'état linéaire dont l'état initial a une valeur $x_0 = x(t_0)$, si on suppose D = 0, on dit qu'il est commandable si pour toute instance x_i du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_i en un temps fini.

En représentation d'état, il s'agira de déterminer le signal de commande $u(t)$ entre deux instants donnés, t_0 et t_1, pour amener le système de l'état $x(t_0)$ vers un état $x(t_1)$ souhaité. Donc l'étude de la commandabilité ne dépend que des matrices A et B. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A,B) qui est commandable.

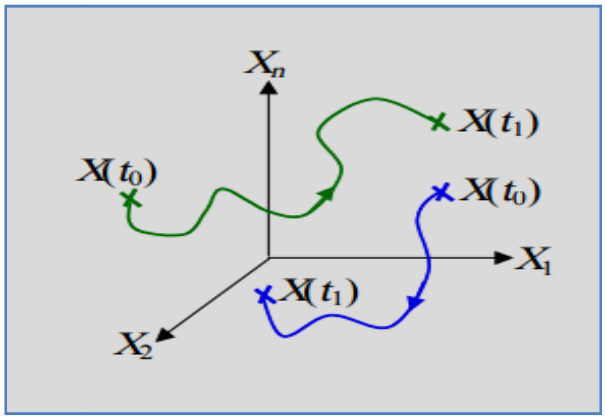


Figure 2.1 : Trajectoire de l'état $x(t_0)$ vers un état $x(t_1)$

- **Critère de Kalman**

La paire (A, B) est commandable si et seulement si :

$$rang(M_c) = n \quad tel\ que \quad M_c = [B \quad A.B \quad \dots \quad A^{n-1}.B] \qquad (2.1)$$

La matrice M_c est dite matrice de commandabilité.
La paire (A, B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, c.à.d son déterminant n'est pas nul.

Exemple2.1

Étudier la commandabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

On trouve la matrice de commandabilité M_c et on calcule son rang

$$M_c = [B \quad A^{2-1}.B]$$

$$rang(A) = 2 \quad donc$$

$$M_c = [B \quad A.B]$$

$$M_c = \left[\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$rang\,(M_c) = rang(A) = 2$$

On conclue que le système est commandable
Sous Matlab le calcul du rang se fait par la fonction préétablie (***rank***), le calcul de la matrice M_c par (***ctrb***) et le calcul du déterminant par la fonction (***det***).

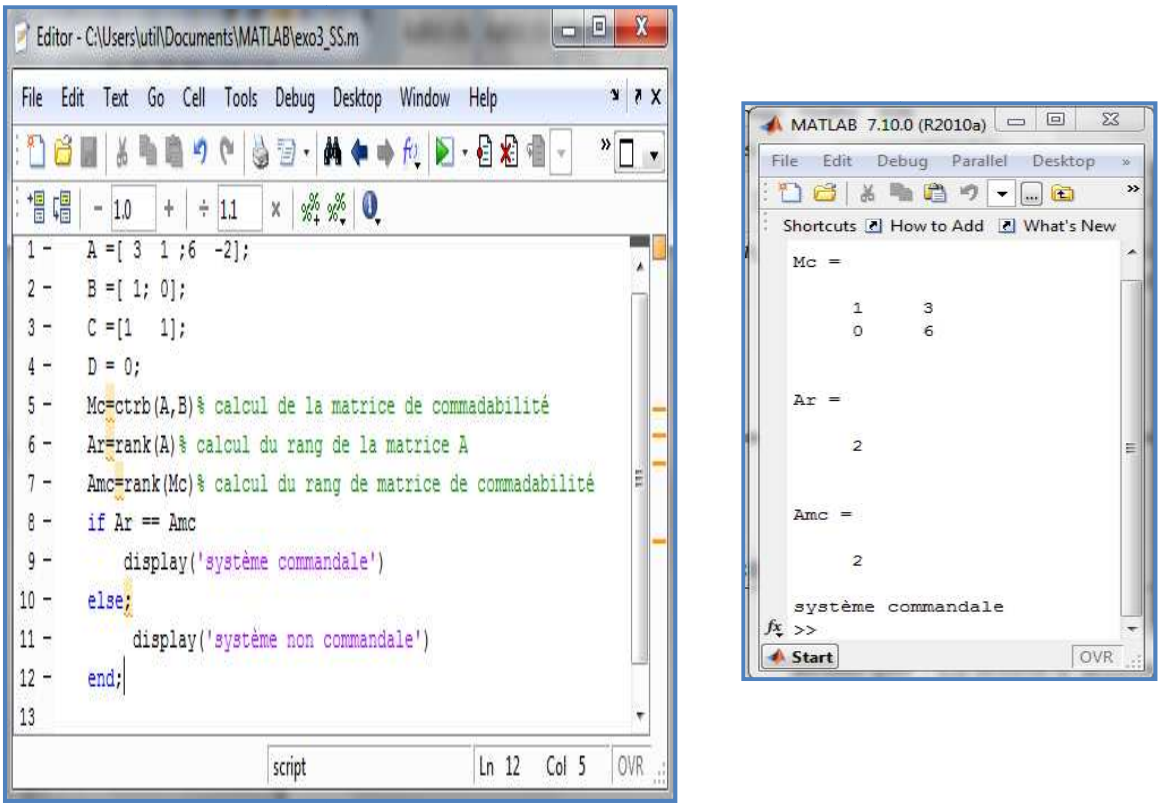


Figure 2.2 Étude de la commandabilité sous Matlab

Exemple 2.2

Étudier la commandabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \alpha & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

On trouve la matrice de commandabilité M_c et on calcule son rang

$$M_c = [B \quad A^{2-1}.B]$$

$rang(A) = 2 \quad donc$

$$M_c = [B \quad A.B]$$

$$M_c = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & \alpha - 4\end{bmatrix}$$

$$det\,(M_c) = \alpha - 3$$

On conclue que le système est commandable ssi $\alpha \neq 3$

III. CONCEPTION DU REGULATEUR PAR RETOUR D'ETAT

La conception du régulateur dans l'espace d'état permet de spécifier les pôles d'un système, pour obtenir la réponse temporelle voulue. Cependant, elle ne permet pas de spécifier les zéros d'un système ; c'est un désavantage, puisque les zéros peuvent modifier la réponse transitoire.

Pour un système ayant une fonction de transfert dont l'équation caractéristique est de la forme :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s \quad + a_0 = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent les pôles du système qui décrivent la dynamique de ce dernier. Pour modifier la réponse, il faut trouver $\boldsymbol{n}$ paramètres ajustables ceci revient à changer la position des pôles par changement des coefficients $\boldsymbol{a_i}$

En introduisant les paramètres $\boldsymbol{K_i}$ dans l'équation caractéristique, elle devient de la forme :

$$s^n + (K_n + a_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (K_2 + a_1 s) \quad + (K_1 + a_0) = 0 \qquad (2.2)$$

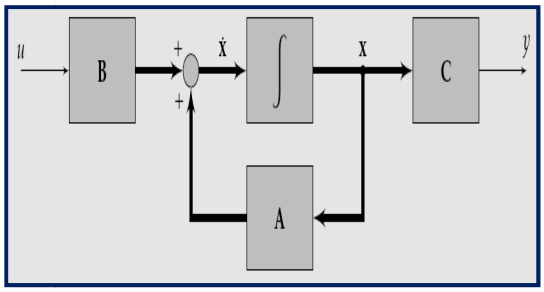
Cette équation détermine les nouveaux pôles du système en boucle fermée dont les positions peuvent être ajustées en choisissant convenablement les $\boldsymbol{K_i}$

Soit le système

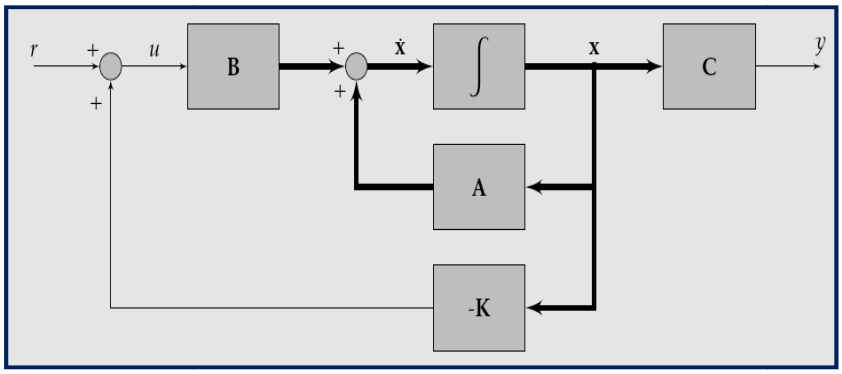
$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x + D\,u$$

La loi de commande par retour d'état est définie par

$$u = -K\,x + r = [-K_1 \quad -K_2 \quad -K_3 \ldots. \quad -K_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + r \qquad (2.3)$$



(A)



(B)

Figure 2.3 : Représentation d'un système en espace d'état
(A) San retour d'état **(B)** avec retour d'état

Les équations d'état du système en boucle fermée s'écrivent

$$\dot{x} = A\,x + B\,u = A\,x + B(-K\,x + r) = (A - B\,K)x + B\,r$$
$$y = C\,x + D\,u \qquad (2.4)$$

Nota :

- *Les représentations d'état sous forme des variables de phases et canonique de commande avec des matrices d'état sous la forme compagne inferieure ou supérieure sont mieux adaptées pour illustrer le concept.*

- *Pour la synthèse du réglage par retour d'état pour un système non représenté sous ces deux formes, il est recommandé d'effectuer la transformation, effectuer la synthèse des* $\mathbf{K_i}$ *puis revenir vers la représentation de départ.*

IV. LA METHODOLOGIE DE PLACEMENT DES POLES

Pour appliquer la méthode de design par placement de pôles, on utilise les étapes suivantes :

1. Représenter le système sous la forme de variable de phase.
2. Former les retours des variables d'état vers l'entrée à travers les K_i.
3. Former l'équation caractéristique du système en boucle fermée obtenue en 2.
4. Former l'équation caractéristique désirée à partir des pôles désirés.
5. Egaliser les coefficients par identification des deux équations caractéristiques les K_i.

Soit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_0 \quad c_1 \ \dots\dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Former le système en boucle fermée avec $\boldsymbol{u = -Kx}$

On a :

$$(A - B\,K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & \cdots & -a_{n-2} - k_{n-2} & -a_{n-1} - k_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$s^n + (a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_1)s + (a_0 + k_0) = 0 \quad (2.6)$$

Sachant que l'équation désirée est donnée par :

$$s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0 = 0 \quad (2.7)$$

En identifiant les deux équations caractéristiques (2.6) et (2.7)on obtient les coefficients ***Ki*** du régulateur soient :

$$d_i = a_i + k_i \qquad i = 0,1,2,3 \ldots, n$$

Exemple 2.4

Soit le système du 2éme ordre non amorti

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la loi de commande qui permet de placer les pôles du système en $-2\,\omega_0^2$ (doubler la fréquence naturelle) et augmenter ζ de 0 à 1

L'équation désirée

$$s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = 0$$

L'équation du système avec régulateur

$$det(sI - (A - BK))$$

$$= det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2\,] \right) \right\}$$

$$s^2 + k_2 s + \omega_0^2 + k_1 = 0$$

En égalisant

$$\begin{cases} k_2 = 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + k_1 = 4\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 4\omega_0 \\ k_1 = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

La loi de commande est donnée par

$$u = -K\,x = -[3\omega_0^2 \quad 4\omega_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 .5

Soit le système du 2éme ordre non amorti

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [\,0 \quad 1\,]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Déterminer la loi de commande qui permet de placer les pôles du système avec un temps de réponse à 5% T_r= 2sec et un facteur de dépassement $\xi = 0.707$

L'équation désirée $s^2 + 4s + 8 = 0$

L'équation du système avec régulateur

$$det(sI - (A - BK))$$

$$= det\left\{\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2\,]\right)\right\}$$

$$s^2 + (k_2 + 3)s + 2 - k_1 = 0$$

En égalisant

$$\begin{cases} k_2 + 3 = 4 \\ 2 - k_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = -6 \end{cases}$$

La loi de commande est donnée par $u = -K\,x = [-6 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

Sous Matlab le calcul des coefficients k_i se fait par la fonction préétablit (***place***) ou ***(acker)***

C:\Users\util\Documents\MATLAB\statespace.m

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
% réglage par retour d'état d'un système 2nd ordre
clear all
clc
a=[0 1;-2 -3];b=[0;1];c=[1 0];d=0
g=ss(a,b,c,d); Mc=ctrb(a,b)
g1=tf(g)
rank(Mc);det(Mc);rank(a)
%%determination des pôles p1 et p2 du le système désiré
xi=0.707  ; Ts=2  ;  wn=4/(xi*Ts); wd=wn*sqrt(1-xi^2)
p1=-(xi*wn)+i*wd
p2=-(xi*wn)-i*wd
P =[p1;p2]  % les pôles calculés
%placement des po^les et determination des gains du régulateur
K =place (a,b,P)
%calcul du nouveau système (aprés introduction de réglage)
A1=(a-b*K)
g2=ss(A1,b,c,d)
step(g1,'r')
hold on
step(g2,'g')
```

```
p1 =    -2.0000 + 2.0006i
p2 =   -2.0000 - 2.0006i

K =      6       1


A1 =    [ 0      1.
          -8.     -4.]
```

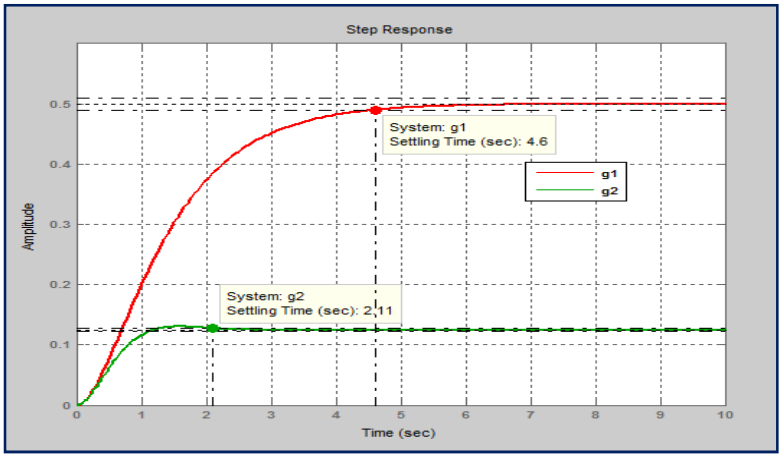


Figure 2.4 Calcul des gains du contrôleur par retour d'état sous Matlab de l'exemple 2.5

Exemple 2.6

Calculer la commande par retour d'état appliquée au système décrit par les matrices A, B, C, D afin d'obtenir un système ayant les pôles suivants : P= -2,-3,-4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

L'équation désirée est

$$(s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$$

On effectue une transformation de modèle en cherchant la matrice de transformation ***T*** formée des vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) comme décrit plus haut

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -23 \\ -11 \end{bmatrix}$$

d'où la matrice $T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -23 & 1 & 0 \\ -11 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

On applique la transformation au modèle d'état initial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{aligned}$$ vers le modèle d'état final $$\begin{aligned} \dot{z} &= A_n + B_n\,u \\ y &= C_n + D_n\,u \end{aligned}$$

Puis on calcul les Kz du nouvelle modèle on trouve K_z = [2 41 9]

On calcul les K du modèle initial par $K = K_z\,T^{-1}$

K= [9 3.57 -9.28]

Editor - C:\Users\util\Documents\MATLAB\ssfeedback.m*

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
1   % réglage par retour d'état d'un système à 3 variables
2
3 -  a=[-1 2 -2;1 -2  4;-5 -1 3];b=[1;0;0];c=[1 0 0];d=0
4 -  g=ss(a,b,c,d); Mc=ctrb(a,b);
5 -  g1=tf(g)
6 -  rank(Mc);det(Mc);rank(a);
7   %%imposition des pôles p1  p2  et p3 au système désiré
8 -  P =[-2;-3;-4]  % les pôles désirés
9   %placement des pôles et determination des gains du régulateur
10 -  K =place (a,b,P)
11  %calcul du nouveau système (aprés introduction de réglage)
12 -  A1=(a-b*K)
13 -  g2=ss(A1,b,c,d)
14 -  figure(1)
15 -  subplot(211)
16 -  step(g1,'r')% sans retour d'état
17 -  subplot(212)
18 -  step(g2,'g')% avec retour d'état
19
```

script Ln 18 Col 33 OVR

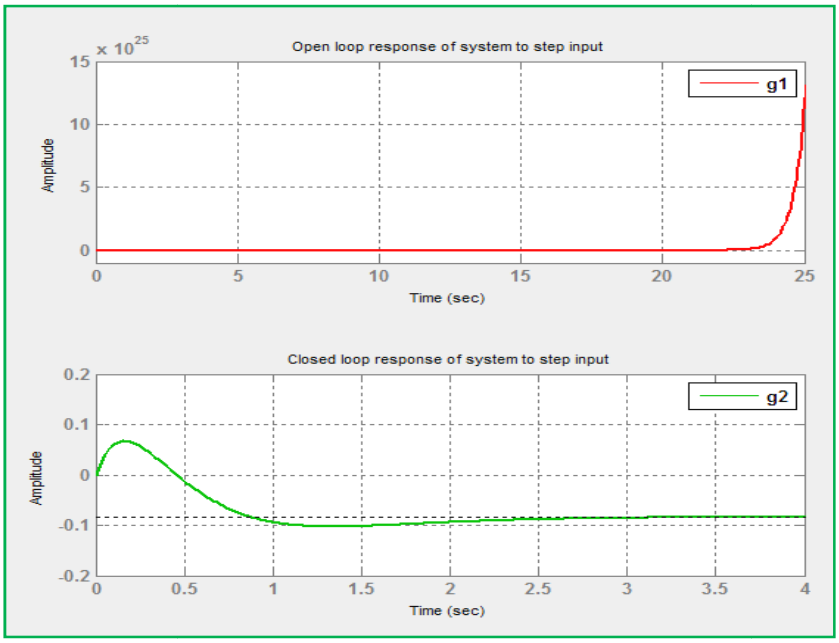


Figure 2.5 Calcul des gains du contrôleur par retour d'état sous Matlab de l'exemple 2.6

V. CONCEPTION DU REGULATEUR PAR RETOUR D'ETAT ET INTEGRATEUR

Afin d'éliminer l'erreur d'un système, on introduit au régulateur par retour d'état un contrôle intégral ceci en ajoutant une variable d'état notée x_i à la sortie de l'intégrateur avec :

$$\dot{x}_i = r - Cx$$

Le système d'état augmenté par l'état x_i devient (on prend D=0) :

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$

$$\dot{x}_i = r - Cx$$

$$y = C\,x$$

Donné sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

On a $$u = -Kx + K_e x_i = -[K \quad K_e] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

En remplace la commande $\boldsymbol{u}$ dans le système d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & B\,K_e \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

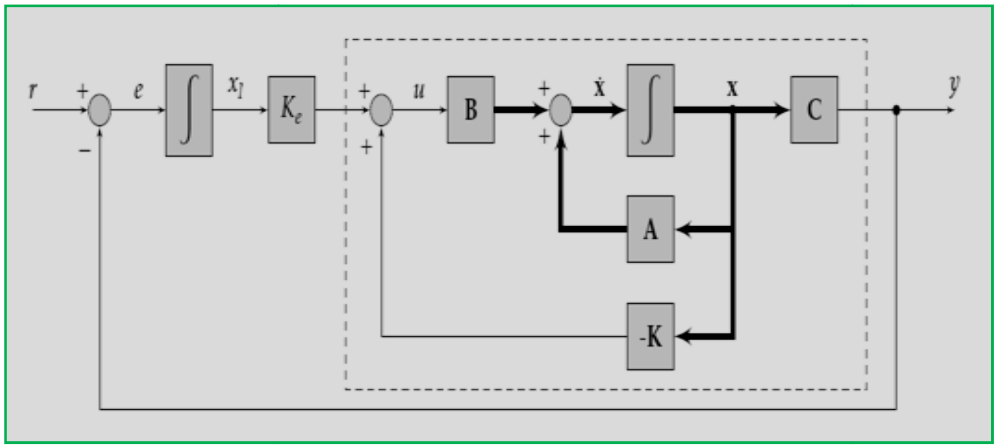


Figure 2.6: Représentation d'un système avec retour d'état et contrôle intégral

Le système a donc été augmenté pour pouvoir utiliser son équation caractéristique afin de calculer K et Ke, selon la réponse transitoire voulue.

Exemple 2.7

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

1. Faire la conception d'un contrôleur sans contrôle intégral pour obtenir un dépassement de 10% et un temps de stabilisation de 0.5s. Evaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.
2. Répéter le design, cette fois avec du contrôle intégral. Evaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.

L'équation désirée :

$$s^2 + 16s + 183.1$$

L'équation du système avec retour d'état :

$$s^2 + (5 + K_2)s + (3 + K_1)$$

Par égalité on obtient :

$$K = [K_1 \quad K_2] = [180.1 \quad 11]$$

Calcul de l'erreur statique

$$e(\infty) = 1 + C(A - BK)^{-1}B = 1 + [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 180.1 & -16 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.995$$

Maintenant le calcul avec l'ajout de l'action intégral et on augmente l'ordre du système avec la variable x_i, ceci donne la nouvelle forme d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_e \\ -[1 \quad 0] & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 - k_1 & -5 - k_2 & k_e \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique du système avec contrôle intégral est :

$$s^3 + (5 + k_2)s^2 + (3 + k_1)s + k_e$$

Il faut ajouter un pôle au système contrôle, puisqu'on utilise du contrôle intégral. On le choisit qui est très loin des pôles du système, comme (s + 100). Le polynôme souhait´e est donc :

$$(s + 100)(s^2 + 16s + 183.1) =$$

$$= s^3 + (116)s^2 + (1783.5)s + 18310$$

Ceci donne

$$k_1 = 1780.1 \quad k_2 = 111 \quad k_e = 18310$$

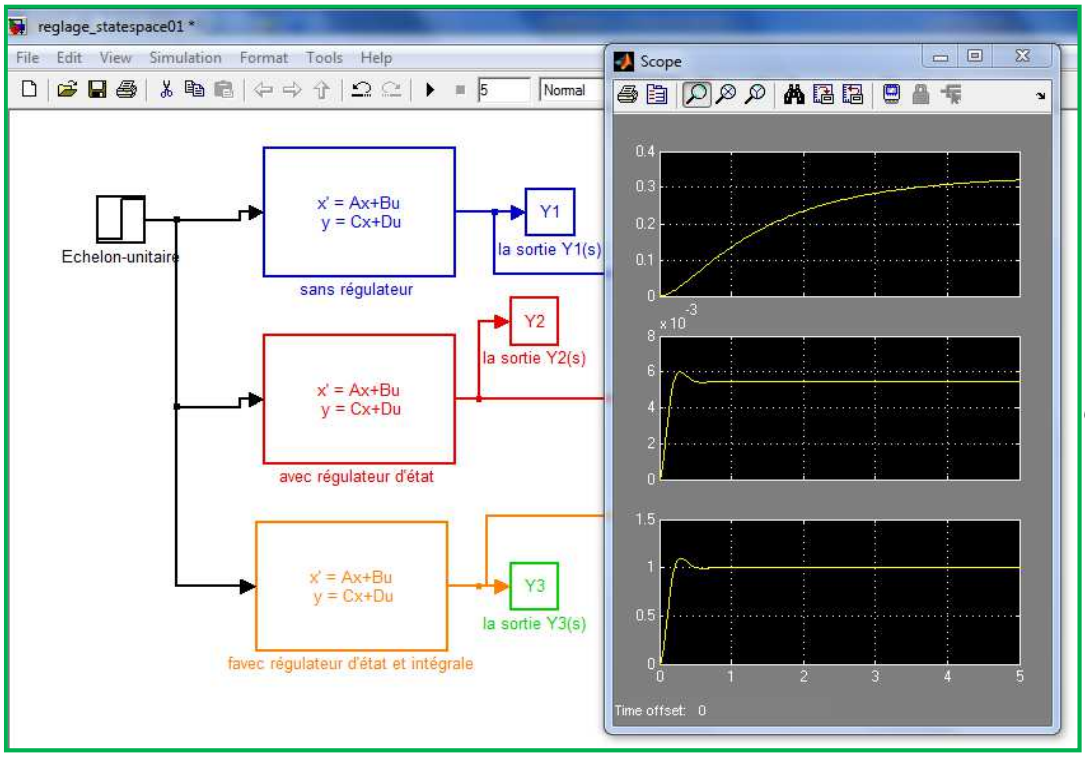
Le système final après réglage est donné par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.5 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$e(\infty) = 1 + C(A - BK)^{-1}B$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.5 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$



$e(\infty) = 0.995$

$e(\infty) = 0$

Simulation de l'exemple sous Matlab/Simulin

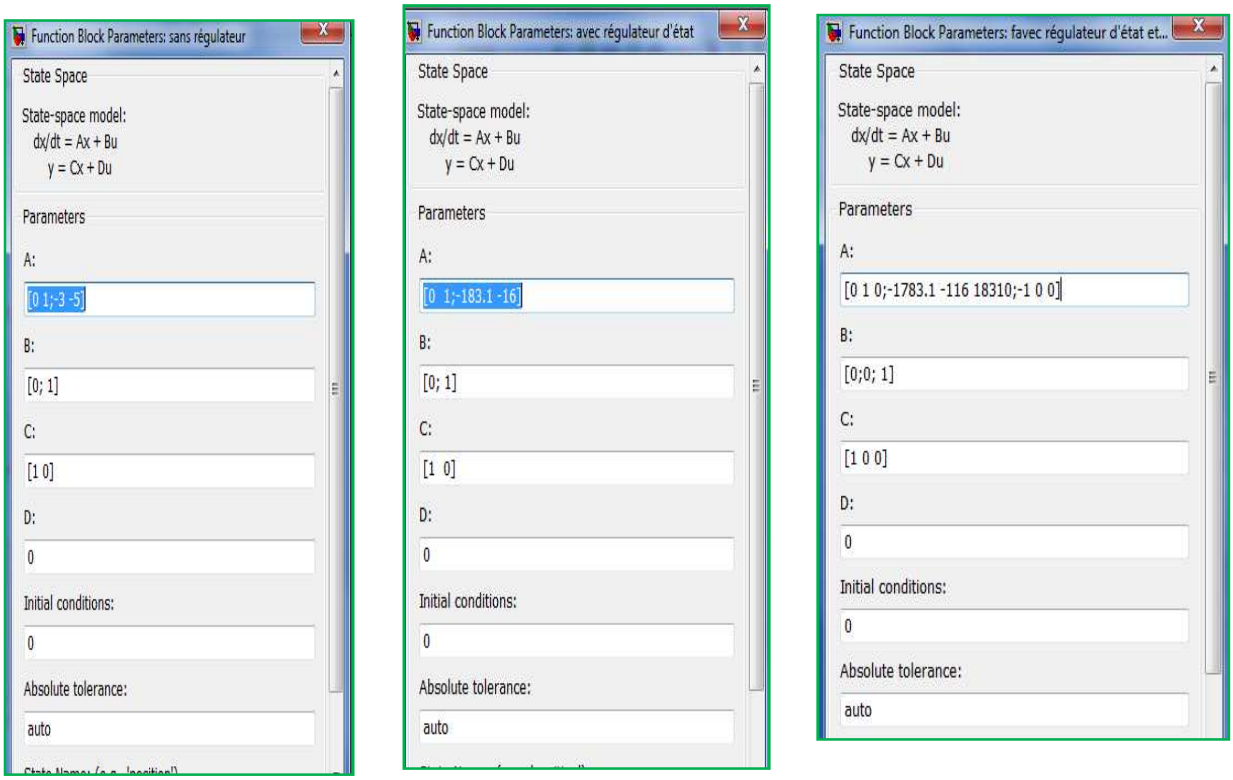


Figure 2.7 Résultats de simulation du contrôleur par retour d'état et intégrateur sous Matlab de l'exemple 2.7

CHAPITRE III

NOTES SUR
LES OBSERVATEURS D'ÉTAT

ومن طلب العلوم بغير كد ...

سيدركها إذا شاب الغراب

I. INTRODUCTION

Certaines variables d'état sont très faciles à mesurer en plaçant un capteur au bon endroit du système, afin de pouvoir avoir accès à l'information recherchée. Dans ce cas, on dit que la variable d'état considérée est mesurable. Dans d'autres cas, où la mesure n'est pas possible directement, la grandeur est dite non mesurable. S'il est possible, à partir de la mesure de la sortie, de déduire la grandeur considérée, alors on dit que celle-ci est observable.

II. DEFINITION DE L'OBSERVABILITE

1. Un système est dit observable si, étant donné l'instant t_0, il existe un instant t_1 tel que la connaissance de $y(t_0,t_1)$ et $u(t_0,t_1)$ permette de déterminer de manière unique l'état $x(t_0) = x_0$ et ceci quelque soit l'entrée du système.
2. Un état x_1 est dit reconstructible à l'instant t_1 si, quelque soit $u(t)$, il existe $t_0 \leq t_1$ tel que la connaissance de $u(t)$ et de $y(t)$ avec $t \in [t_0,t_1]$, permettent de déterminer $x_1 = x(t_1)$. Si tout état est reconstructible à l'instant t_1, le système est dit complètement reconstructible.

Donc l'étude de l'observabilité ne dépend que des matrices A et C. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A,C) est observable.

La paire (A, C) est observable si et seulement si :

$$rang(M_o) = n \quad tel\ que\ M_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

La matrice M_o est dite matrice d'observabilité

Exemple3.1

Étudier l'observabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On trouve la matrice l'observabilité M_o et on calcule son rang

$$rang(A) = 2 \quad et\ M_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$rang\ (M_o) = rang(A) = 2$$

On conclue que le système est observable

Sous Matlab le calcul du rang se fait par la fonction préétablit (***rank***), le calcul de la matrice M_o par (***obsv***) et le calcul du déterminant par la fonction (***det***)

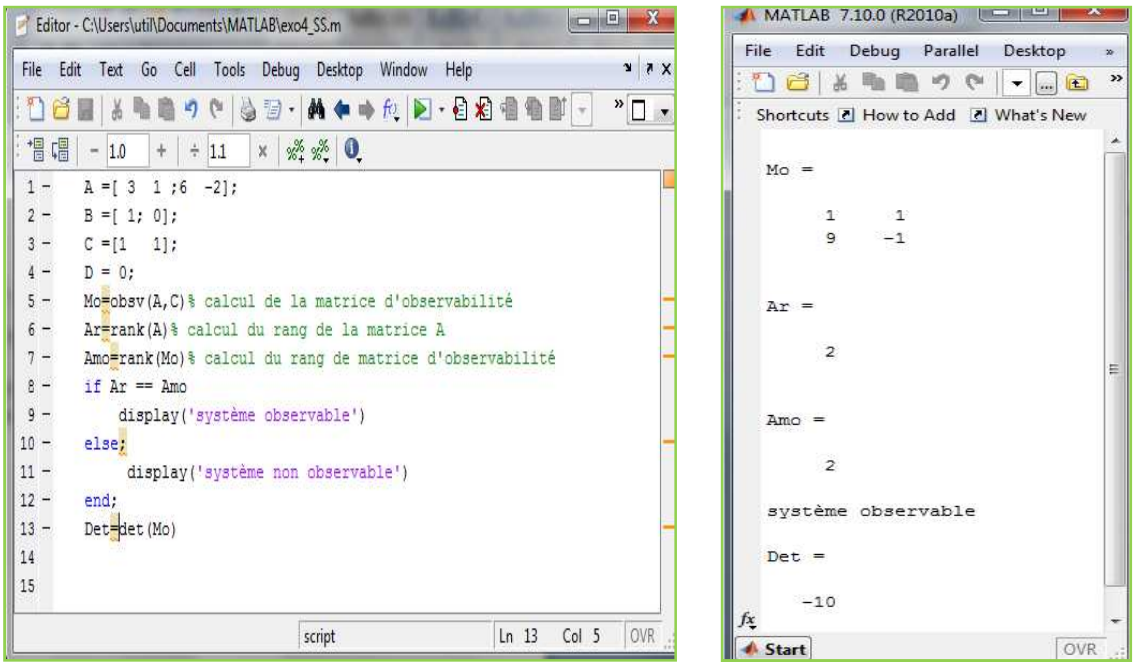


Figure 3.1 : Etude d'observabilité sous Matlab

Exemple3.2

Étudier la commandabilité et l'observabilité et du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y(t) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On calcule M_c $M_c = [B \quad A.B]$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrice singulière donc système non commandable. En effet on a

$$\dot{x}_1 = 0.5\ x_1 \ \rightarrow \ x_1 \text{ n'estpas affecté par u ou par } x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2\ x_2 + u \ \rightarrow \ x_2 \text{ dépend de } u$$

On calcul $M_o = \begin{bmatrix} C \\ C\ A \end{bmatrix}$ ce qui donne $M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Matrice singulière donc système non observable

III. SYNTHESE D'OBSERVATEUR

On appelle observateur du système un opérateur qui génère une approximation $\hat{w}$de la variable $w = T\ x$ sous la forme :

$$\dot{\hat{w}} = F\ \hat{w} + \ Ly + Ju \qquad (3.2)$$

- Si w et x ont même dimension, l'observateur est dit complet (tout l'état est estimé). Dans ce cas $T = I$;

  donc $w = x$ et $\hat{w} = \hat{x}$
- Si $dim(w) \leq dim\ (x)$ alors l'observateur est dit d'ordre réduit.

L'observateur doit satisfaire aux moins les deux conditions suivantes :

- Il doit être stable.
- Il doit assurer la convergence de $\hat{w}\ \ vers\ w$

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{w}(t) - w(t)) = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \qquad \forall\, u\,, \forall\, x(0)$$

Ou $e(t)$est dénommée erreur de reconstruction.

IV.1. Observateur Identité

L'observateur identité est un observateur complet avec le quel on obtient les équations du couple (système, observateur) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= F\ \hat{x} + \ Ly\ + Ju \\ \dot{x} &= A\ x + \ B\ u \\ y &= C\ x \end{aligned} \qquad (3.3)$$

En considèrent la dérivé de l'erreur d'estimation :

$$\dot{e} = \dot{x} - \ \dot{\hat{x}} = (A - LC)x + (B - J)u - F\ \hat{x}$$

$$\hat{x} = x - e$$

$$\dot{e} = (A - LC - F)x + (B - J)u - F\ e \qquad (3.4)$$

Pour une estimation sans biais il faut que :

$$e = 0 \quad \text{et} \quad \dot{e} = 0$$

Pour cela il faut donc satisfaire les équations :

$A - LC - F = 0$ $\quad F = A - LC$
$B - J = 0$ ce qui donne $J = B$
F *stable* $\quad A - LC$ *stable*

L'équation de l'observateur est dans ce cas :

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + L\,y + B\,u \qquad (3.5)$$

IV.2. Principe de fonctionnement de l'observateur

La structure de l'observateur est celle indiquée sur la figure 3.2. Elle fait intervenir tout d'abord un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui est caractérisé par la même dynamique que celle du système.

La structure fonctionnant en boucle fermée obtenue par l'introduction d'une matrice de gains L permet d'imposer la dynamique propre à cet observateur.

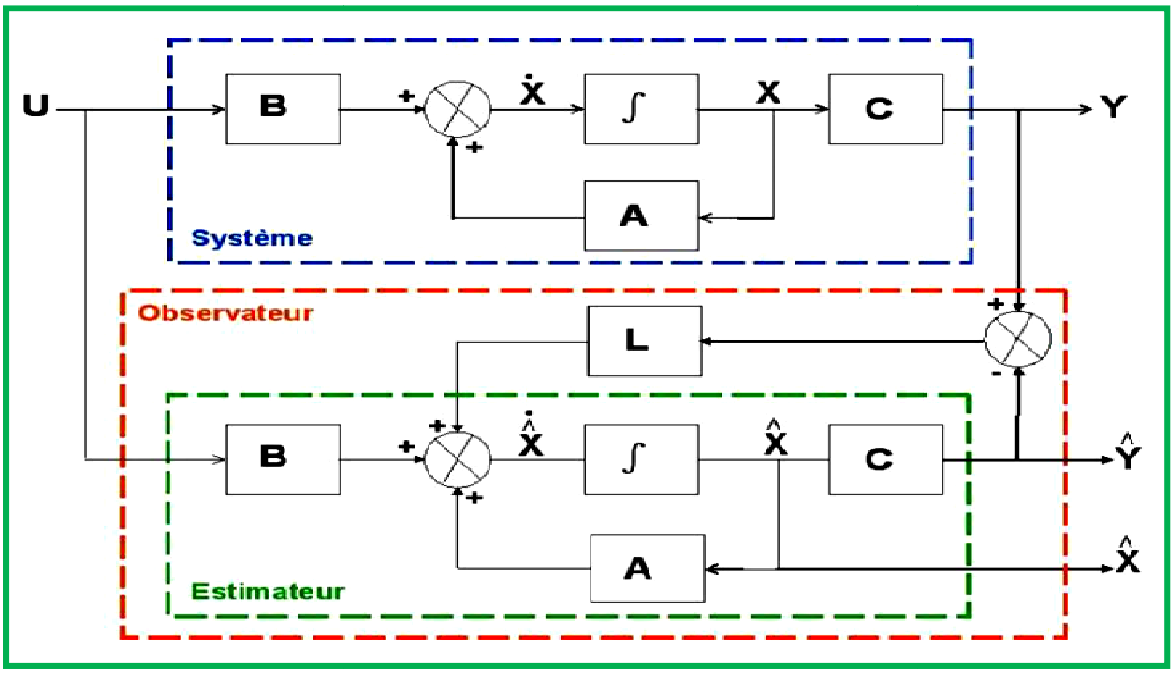


Figure 3.2 : Observateur d'un système d'état

L est appelé le gain de l'observateur. Il y a convergence si e converge vers 0.

- L'équation caractéristique est donnée par

$$\det(\lambda I\,(A - LC)) = 0 \qquad (3.11)$$

- Les valeurs propres λ sont choisies de manière à obtenir les performances désirées en termes de stabilité et réponse transitoire.
- Elles doivent être des racines négatives ou à partie réelle négative.
- Le problème consiste donc à trouver une matrice L tel que les valeurs propres du système bouclé (de l'observateur) soient en des positions préfixées.

Les différentes grandeurs mentionnées sur la figure représentent respectivement :

- Un vecteur d'entrée U du système réel et de l'observateur,
- Un vecteur d'état X constitué des grandeurs à observer et un vecteur de sortie Y dont les composantes sont mesurables.
- Le dernier vecteur est comparé au vecteur équivalent donné par l'observateur pour assurer le fonctionnement en boucle fermée.

Notes :

- *La dynamique de* $\tilde{x} = (x - \hat{x})$ *n'est pas soumise à une entrée*

$$\dot{\tilde{x}} = (A\,\hat{x}) \text{ et } \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

- *Si le système est stable cette différence tend vers zéro (A stable)*
- *La vitesse de convergence de* $\hat{x}$ *vers x est identique à la réponse transitoire du système (même équation caractéristique)*
- *Si on désire accélérer la convergence de* $\hat{x}$ *vers x de telle manière que l'état estimé soit disponible instantanément par le régulateur u = - Kx , il faut introduire un feedback*
-

- **La méthode de détermination de la matrice**

Soit le système d'ordre n (sous forme canonique d'observateur)

$$A - LC = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$= \begin{bmatrix} (-a_{n-1} - l_1) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-a_1 - l_{n-1}) & 0 & \cdots & 1 \\ (-a_0 - l_n) & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'équation caractéristique de $A - LC$

$s^n + (a_{n-1} + l_1)s^{n-1} + + (a_{n-2} + l_2)s^{n-2} + \cdots + (a_1 + l_{n-1})s +$
$(a_0 + l_n)=0$ (3.13)

L'équation caractéristique de A

$$s^n + (a_{n-1})s^{n-1} + (a_{n-2})s^{n-2} + \cdots + (a_1)s + (a_0)=0 \quad (3.14)$$

L'équation désirée

$$s^n + (d_{n-1})s^{n-1} + (d_{n-2})s^{n-2} + \cdots + (d_1)s + (d_0)=0 \quad (3.15)$$

L'égalisation entre l'équation caractéristique de $A - LC$ et celle désirée on retrouve les l_i

$$l_i = d_{n-i} - a_{n-i} \quad avec \quad i = 1,2, \ldots, n \quad (3.16)$$

Exemple 3.3

Soit un pendule simple dont le mouvement est régi par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer l'estimateur pour ce pendule tel que les pôles de l'observateur soient placés en $-10\,\omega_0^2$ (5 fois plus rapides que celui du regulateur par retour d'état de l'exemple 2.4)

L'équation désirée

$$s^2 + 20\omega_0 s + 100\omega_0^2 = 0$$

L'équation du système avec régulateur

$$det(sI-(A-LC))$$
$$= det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

En égalisant $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\omega_0 \\ 99\omega_0^2 \end{bmatrix}$

Solution avec programme sous Matlab avec $\omega_0 = 2$

```
A = [0 1; -4 0]; B = [0; 1]; C = [1 0];
D = [0];
p1= -10*4 ;
L = place(A',C',[p1,p1])
```

Exemple 3.4

Soit un système donné par la représention d'état suivante par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer l'estimateur pour ce système tel que les deux pôles de l'observateur soient placés en [0.7 0.2] puis en [0.7 0.5]

L'équation du système avec régulateur

$$A - LC = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 - 0.5\, l_1 \\ 2 & -0.5 l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + LC) = \lambda^2 + (2 - 0.5 l_2)\lambda - l_2 + 0.5\, l_1 + 1$$

L'équation désirée de l'observateur est

$$(\lambda + 4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

Par identification entre les deux équation on trouve $l_1 = 18$ et $l_2 = 12$

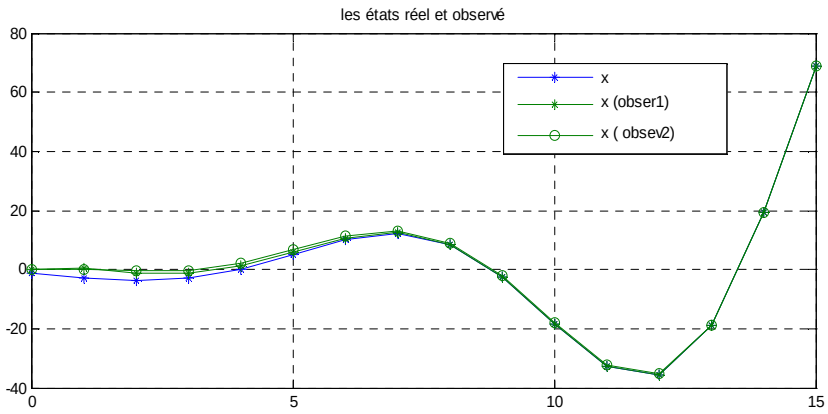
La représentation du sytème avec observateur est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} y$$

On trouve ces résultats sus Matlab

```
A =[2 -0.8; 2 0];
B = [1; 0];
D = 0;
C =[0 1];
% les poles de l'observateurs [p1,p2]=[0.7 0.2]
L=place(A',C',[.7 .2])'
Lamda = eig(A-L*C)

% traçage des deux états (x réel et x observé)
x=[-1;1]; % initial state
xobs=[0;0]; % initial estimate
XX=x;
XXobs=xobs;
T=15;
U1=.1*ones(1,T); % input signal
for k=0:T-1,
u=U1(k+1);
y=C*x+D*u;
yobs=C*xobs+D*u;
x=A*x+B*u;
xobs=A*xobs+B*u+L*(y-yobs);
XX=[XX,x];
XXobs=[XXobs,xobs];
end
plot(0:T,[XX(1,:);XXobs(1,:)],'*');
hold on
% les poles de l'observateurs [p1,p2]=[0.7 0.5]
L=place(A',C',[.7 .5])'
Lamda = eig(A-L*C)
plot(0:T,[XX(1,:);XXobs(1,:)],'o');
title( 'les états réel et observé')
```



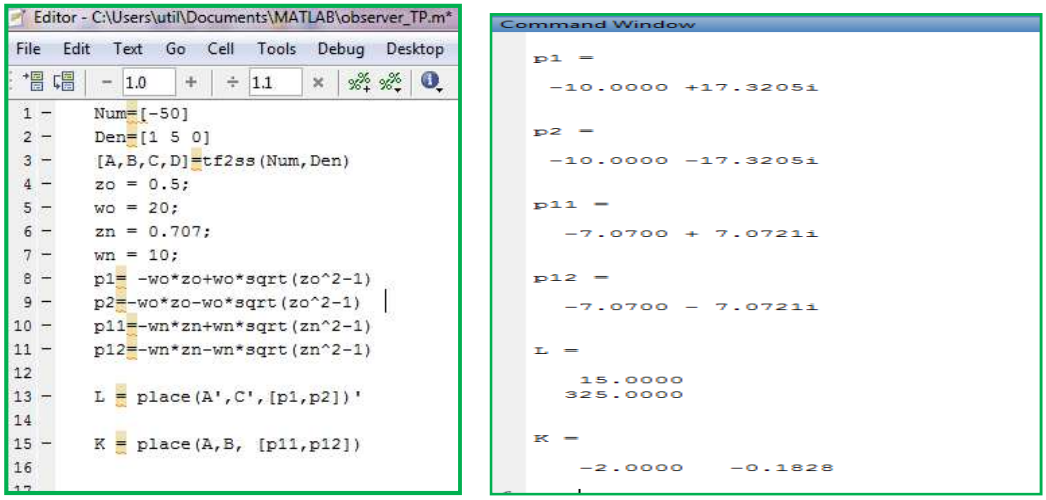
Exemple 3.5

Soit la fonction de transfert d'un MCC $G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-50}{s\,(s+5)}$

$\theta(s)$ la position du rotor et $U(s)$ est la tension d'alimentation

- Donner la représentation d'état du système
- Calculer un régulateur par retour d'état pour que le système un $\zeta = 0.707\ et\ \omega_n = 10rad/s$
- Déterminer l'observateur qui a un $\zeta_o = 0.5$ et $\omega_o = 20rad/s$

Solution sous Matlab



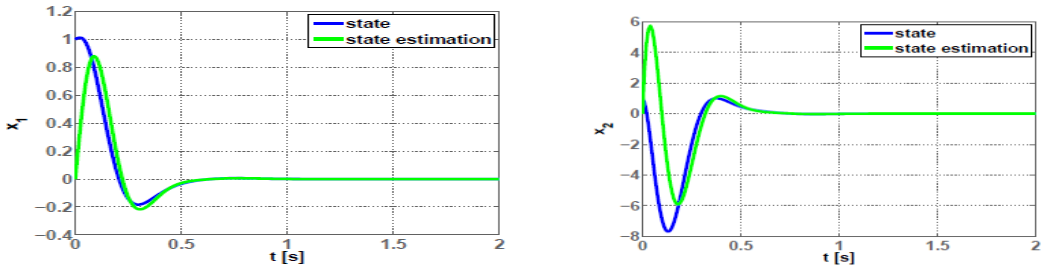


Figure 3.4 : comparaison entre l'état et son observé

Exemple 3.5

Soit à estimer le courant et la vitesse du MCC sous Simulink

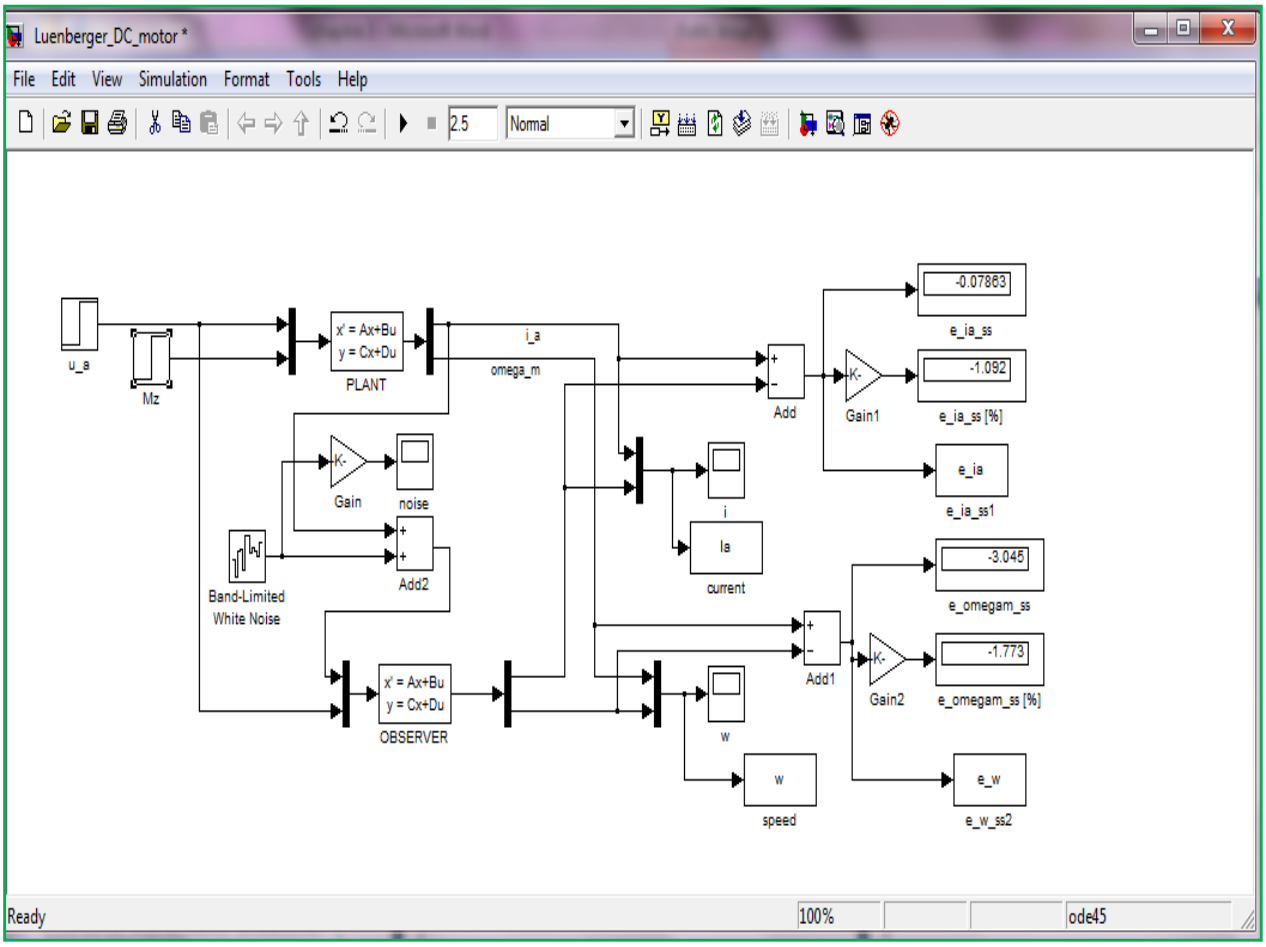


Figure 3.5 : Simulation d'observateur d'état d'un MCC

Editor - C:\Users\util\Downloads\Luenberger_observer\Luenberger_key.m

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
clc;
% parametres du moteur MCC
Un = 280; %V   tension d'alimentation
wn = 1640*pi/30; %rad/s   vitesse nominale
Pn = 1.52e3; %W     puissance nominale
Tn = 8.85; %Nm    couple nominale
In = 7.2; %A      courant nominale
R = 6.41; %Ohm   resistence d'induit
L = 23e-3; %H    inductance d'induit
psi_m = Tn/In;
psi_e = (Un-R*In)/wn;
J = 0.013*2; %kgm2
% presentation d'état du MCC
a11=-R/L; a12=-psi_e/L; a21=psi_m/J;
A=[a11 a12; a21 0];
b11=1/L; b22=-1/J;
B=[b11; 0];
E=[0; b22];
% x_dot = A x + B u + E z
C=[1 0];
C_all=eye(2);
D=zeros(2);
eigA=eig(A);
 num2str(eigA)
Rid=R;%*0.8;
Lid=L;%*1.05;
psi_eid=(Un-Rid*In)/wn;
Jid=J;%*1.05;
a11id=-Rid/Lid; a12id=-psi_eid/Lid; a21id=psi_m/Jid;
Aid=[a11id a12id; a21id 0];
b11id=1/Lid; b22id=-1/Jid;
Bid=[b11id; 0]; %
```

```
Bid=[b11id; 0]; %
Eid=[0; b22id]; %
Cid=[1 0];
Cid_all=eye(2);
Did=zeros(2);
eigAid=eig(Aid);
 num2str(eigAid)
if rank(obsv(Aid,Cid)) == rank(Aid),
disp(' system is observable.');
else
disp(' system is unobservable');
end
if rank(ctrb(Aid,Bid)) == rank(Aid),
disp(' system is controllable.');
else
disp(' system is uncontrollable');
end
%Observer Luenberger
k=10; %
lambda1=k*eigAid(1); lambda2=k*eigAid(2);
% det(A-GC-lambda*1) = 0
g1=a11id-lambda1-lambda2;
g2=lambda1*lambda2/a12id+a21id;
Gplace=(place(Aid',Cid',[lambda1, lambda2]))';
G=[g1; g2];
Aobs=Aid-G*Cid; Bobs=[G Bid]; Cobs=eye(2); Dobs=zeros(2);
 num2str(eig(Aobs))
Mz=Tn;
e_ia_ss = -a12*b22/(lambda1*lambda2)*Mz/In*100
e_omegam_ss = b22*(lambda1+lambda2)/(lambda1*lambda2)*Mz/wn*100
Ts = 1e-4;
how_many_within = 98; %
erf_inverse = erfinv(how_many_within/100)*sqrt(2);
noise_psd = (In*0.05/erf_inverse)^2*Ts;
```

Editor - C:\Users\util\Documents\MATLAB\luenberger_DC_motor_PLOT.m*

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
subplot(321)
plot(tout,Ia)
title('courant Ia mesuré et estimé')
grid
subplot(322)
plot(tout,w)
title('vitesse w mesurée et estimée')
grid
subplot(323)
plot(tout,Ia)
title('courant Ia mesuré et estimé')
grid
subplot(324)
plot(tout,w)
title('vitesse w mesurée et estimée')
grid
subplot(325)
plot(tout,e_ia)
title('erreur d estimation du courant ')
grid
subplot(326)
plot(tout,e_w)
title('erreur d estimation de la vitesse')
grid
```

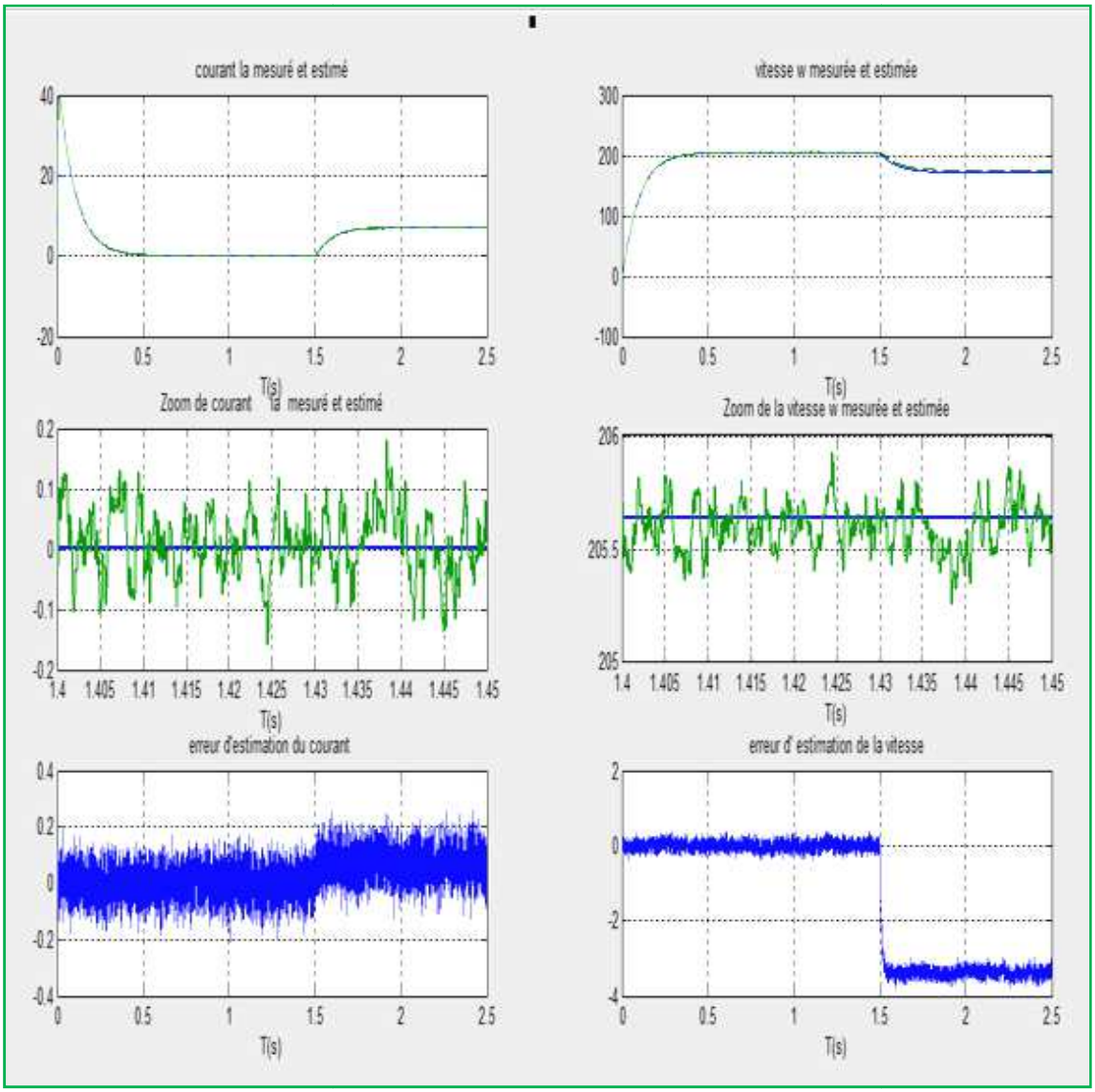


Figure 3.6 : Résultat de la simulation d'observateur d'état d'un MCC

RECUEIL DES TRAVAUX DIRIGÉS

N'hésitez pas à me contacter pour toutes éventuelles questions ou remarques

Khedidja.Kendouci@univ-usto.dz

kendoucikh@gmail.com

1. Représentation dans l'espace d'état

Exercice 1

On considère le schéma fonctionnel (voir figure 1)

a) Représenter le système dans l'espace d'état, et donner les matrices A, B, C, et D.
b) Calculer la fonction de transfert du système associé
c) Déterminer le gain statique du système par calcul

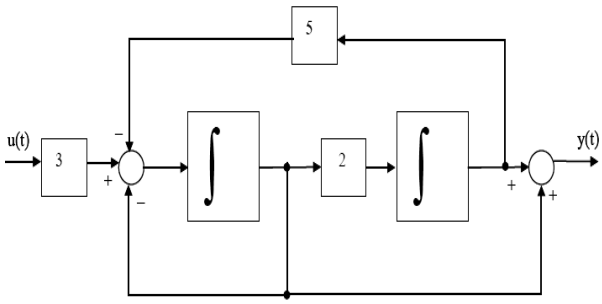


Figure 1

Exercice 2

On considère deux systèmes mis en cascade. Le premier est représenté dans l'espace d'état par les matrices A1, B1, C1, D1, et le deuxième par les matrices A2, B2, C2, D2. (voir figure 2)

Calculer les matrices A, B, C, D du système global. *Indication :* le vecteur d'état global est la concaténation des deux vecteurs d'état des sous-systèmes $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

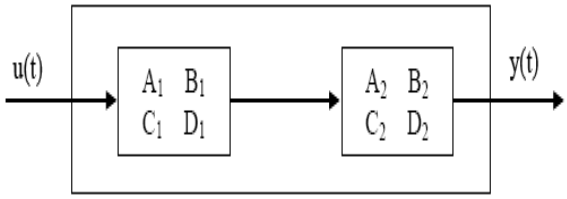


Figure 2

Exercice 3

On considère le circuit électrique représenté par la figure3. On suppose que les états du système sont : le courant dans l'inductance ($x_1(t) = i(t)$), et la charge dans le condensateur ($x_2(t) = q(t)$).

Trouver une représentation d'état du système (entrée $u(t) = v_i(t)$, et sortie $y(t) = v_o(t)$).

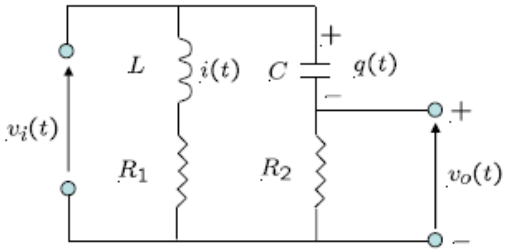


Figure 3

Exercice 4

Soit un moteur à courant continu représenté par le schéma électrique à la figure 4.

Dans ce cas, le flux inducteur est maintenu constant (excitation indépendante). La vitesse de rotation est commandée par la tension ua(t). En considérant les équations électriques et mécaniques du moteur.

Donner une représentation d'état de ce système en prenant comme variables d'état le courant induit ia(t) la vitesse ω(t) .

Calculer la fonction de transfert entre la tension d'induit ua(t) et la vitesse angulaire ω (t) du moteur.

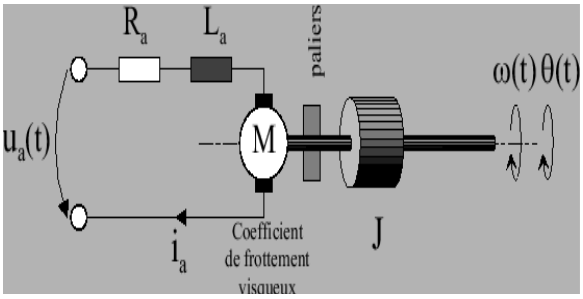


Figure 4

Mme Kh.Kendouci

2. Transformation dans l'espace d'état

Exercice 1 :

Convertir les fonctions de transfert suivantes en espace d'´etat, sous forme canonique.

$$\frac{2s+1}{s^2+3s+2} \qquad \frac{s+3}{s(s^2+2s+2)}$$

Exercice 2 :

On considère un système $\dot{x}=\boldsymbol{A}x+Bu$ donné par les matrices suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}, C=[1 \quad 0], D=0$$

a) Calculer la matrice de transformation P de sorte que si x = Pz, les matrices d'´etat qui décrivent le système sont sous forme canonique diagonale.
b) Calculer les nouvelles matrices An;Bn;Cn et Dn.

Exercice 3 :

Soit la fonction de transfert suivante : $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$

a) Donner la représentation sous trois formes différentes
b) Donner le schéma détaillé de simulation de chaque représentation

Exercice 4 :

On considère un système en BO donné par les matrices suivantes :

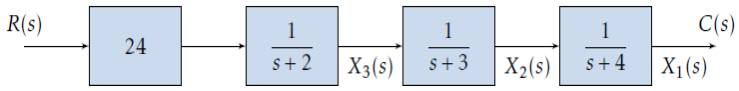
$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ -10 & -5 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, C=[1 \quad 0 \quad 0], D=0$$

a) Donner la représentation sous deux formes canoniques
b) Calculer la fonction de transfert des deux représentations puis conclure
c) Etudier la stabilité
d) Puis trouver l'erreur statique

Exercice 5 :

On considère un système donné par la FT suivante $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)}$

Qu'on peut présenter comme suit



a) Donner la représentation sous la forme diagonale
b) En déduire la forme compagne de commande
c) Ecrire la FT en fraction simple puis en déduire la forme compagne parallèle
d) Donner le schéma fonctionnel de la question c
e) Puis trouver l'erreur statique

Exercice 6 :

On considère un système en BO donné par les matrices suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 20 & -10 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, C=[-1 \quad 1 \quad 0], D=0$$

Calculer l'erreur statique due à une entrée échelon et rampe

Mme Kh.Kendouci

3. Commande par retour d'état

Exercice 1 :

On considère un système $\dot{x}=\boldsymbol{A}x+Bu$ donné par les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$

1- Dessiner le schéma bloc correspondant.
2. Déterminer les pôles du système à régler (valeurs propres de A).
3. Déterminer la commandabilité du système ci-dessus, en fonction du paramètre b.
4. Pour b=0, Déterminer si l'on peut placer par retour d'état les pôles à - 4 et -5
5. Pour b=2, Déterminer le gain d'un retour d'état pour placer les pôles à - 4 et -5

Exercice 2 :

Pour le système suivant,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

faire la conception d'un contrôleur qui satisfait aux conditions suivantes :

- Amortissement $\zeta = 0.707$
- Temps de pointe $T_p < 3.14\text{s}$

Exercice 3 :

Pour le système suivant,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

faire la conception d'un contrôleur qui satisfait aux conditions suivantes :

- Dépassement $M_p < 25\%$
- Temps de stabilisation à 1% $T_s < 0.115\text{s}$

Exercice 4 :

Soit le système suivant :

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Faire la conception d'un régulateur à variables de phase pour obtenir un dépassement de 9.5% et un temps de stabilisation de 0.74s.

Mme Kh. Kendouci

4.COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

Exercice 1 :

Convertir les fonctions de transfert suivantes en espace d'´etat, sous forme canonique d'observation
Analyser la commandabilité et l'observabilité de chaque système.

$$\frac{s+3}{s(s^2+2s+2)} \qquad \frac{2s+1}{s^2+3s+2}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction de transfert suivante :

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

a) Donner la représentation canonique d'observation
b) Donner la représentation canonique de commande
c) Conclure

Exercice 3 :

On considère les systèmes $\dot{x}=\boldsymbol{A}x+Bu$ donnés par les matrices suivantes :

Système 01

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$y=[1 \quad 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Système 02

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -0.008 & -0.15 & 0.12\\ 0 & 0.06 & -0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -0.1\\ 0.8\end{pmatrix}u(t)$$

$$y=[0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

a) Déterminer les pôles pour chaque système.
b) .Qu'est ce qu'on peut dire de la stabilité ?
c) Analyser la commandabilité et l'observabilité de chaque système.

Exercice 4 :

Soit les deux formes de représentation d'état d'un système:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.4 & -1.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u \;\; ; \;\; y=\begin{pmatrix}0.8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -0.4\\ 1 & -1.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.8\\ 1\end{pmatrix}u \;\; ; \;\; y=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

a) étudier la commandabilité et l'observabilité pour chaque représentation.
b) Calculer la fonction de transfert équivalente dans les deux cas.
c) Expliquer ce qui provoque la différence apparente dans la commandabilité et l'observabilité entre les deux représentations malgré qu'on a le même système.

Exercice 5 :

Soit le système linéaire représenté par sa fonction de transfert :

$$\frac{9}{s^2-9}$$

a) Trouver les matrices A,B,C de la représentation d'état sous forme canonique observable.
b) Le système est-il commandable ?
c) Calculer la matrice de retour d'état K assurant un placement de pôles à $s=-3\pm 3j$.
d) Le système est-il observable ?
e) Calculer la matrice L de l'estimateur d'état dont les pôles sont à $s=-6\pm 6j$.

Mme Kh. Kendouci

Exercice

Soit un moteur à courant continu MCC à excitation indépendante dont les paramètres sont :

Ra= 6.41Ω , La= 23^{e-3}H , Un= 280V , In= 7.2A, Pn=1.5KW, Cn=8.85Nm, J= 0.026Kgm²

1. Trouver une représentation d'état du système en choisissant la sortie la position du rotor $\theta(s)$ et l'entrée $U(s)$ la tension d'alimentation d'induit
2. Calculer les valeurs propres ainsi les vecteurs propres de A
3. En déduire la stabilité
4. Etudier la commandabilité et l'observabilité de ce système
5. Calculer un régulateur par retour d'état pour que le système ait $\zeta = 0.707\ et\ \omega_n = 10rad/s$ (théorique et par simulation)
6. Déterminer l'observateur qui a un $\zeta_o = 0.5$ et $\omega_o = 20rad/s$ (par calcul et par simulation)
7. Tracer les Xi(t) choisis et la sortie $\theta(s)$

ANNEXES

I. DEFINITIONS

Une matrice n x m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. Noté par ( ) ou [ ]

Exemple de matrice avec n = 2 et m = 3 :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractère gras. On note $\boldsymbol{M_{ij}}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne $\boldsymbol{i}$ et de la colonne $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} & \cdots & \boldsymbol{M_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{M_{nm}} \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{m = 1}$, la matrice est appelée vecteur (ou, vecteur-colonne) :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{n = m}$ la matrice est dite matrice carrée.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} & \cdots & \boldsymbol{M_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{M_{nn}} \end{bmatrix}$$

Quelques matrices carrées particulières

1. Matrice unité (ou matrice identité) :

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

2. Matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D_{22}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D_{33}} \end{bmatrix}$$

3. Matrice triangulaire (peut être supérieure ou inferieure)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T_{11}} & \boldsymbol{T_{12}} & \boldsymbol{T_{13}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{T_{22}} & \boldsymbol{T_{13}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{T_{33}} \end{bmatrix}$$

4. Matrice symétrique
   Une matrice carrée S est dite symétrique si $\boldsymbol{S_{ij} = S_{ji}}$:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & T_{22} & T_{13} \\ S_{13} & T_{13} & T_{33} \end{bmatrix}$$

II. OPERATIONS SUR LES MATRICES

1. Egalité de deux matrices

Deux matrices **A** et **B** sont égales si :

$$A_{ij} = B_{ij} \quad \forall\, i,j$$
$$n(B) = n(A) \;\; , \;\; m(B) = m(A)$$

2. Addition et soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme par terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 11 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Multiplication par un nombre

Lorsqu'une matrice est multipliée par un nombre, chaque terme de la matrice est multiplié par ce nombre :

Exemple :

$$\mathbf{3} * \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{12} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

4. Transposition

La transposée A^T d'une matrice A (aussi notée $\grave{A}$) est la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes de A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \grave{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix} \qquad \grave{A} = [A_{11} \qquad A_{n1}]$$

5. Multiplication matricielle

1. *Produit scalaire*

Le produit scalaire d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne y est défini par :

$$\boldsymbol{A.B} = [\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \dots \quad \boldsymbol{a_n}].\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i b_i}$$

Le résultat de cette opération est un scalaire. On peut noter que le produit scalaire est commutatif

2. *Produit matriciel*

Le produit matriciel se déduit du produit scalaire : le produit de la matrice $\boldsymbol{A\ (n\ .\ m)}$ par la matrice $\boldsymbol{B\ (m\ .\ p)}$ est la matrice $\boldsymbol{C\ (n\ .\ p)}$ telle que l'élément $\boldsymbol{C_{ij}}$ est égal au produit scalaire de la ligne $\boldsymbol{i}$ de la matrice $\boldsymbol{A}$ par la colonne $\boldsymbol{j}$ de la matrice $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_{ik} b_{kj}} \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1, \dots n} \textbf{ et } \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1, \dots p}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{9} & \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{23} & \boldsymbol{9} \end{pmatrix}$$

✓ **Propriétés**

Le produit matriciel est

- associatif : $\boldsymbol{ABC = (AB)C = A(BC)}$
- distributif par rapport à l'addition : $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
- non-commutatif : $\boldsymbol{AB \neq BA}$
- La matrice unité I est l'élément neutre pour la multiplication : $\boldsymbol{AI = IA = A}$
- Transposée d'une somme : $\boldsymbol{(A + B)^T = A^T + B^T}$
- Transposée d'un produit : $\boldsymbol{(AB)^T = B^T A^T}$

6. Inversion Une matrice carrée

A est dite inversible s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée matrice inverse) telle que $A\grave{A} = \grave{A}A = I$

✓ **Propriétés**

* $(A^{-1})^{-1} = A$
* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
* $(A\,B)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
* Si la matrice A est orthogonale, alors $A^{-1} = A^T$.

- Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2 x 2, on peut montrer que la matrice inverse est donnée par

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}}$$

Le determinant de A noté $\boldsymbol{det(A) = |A| = ad-bc}$

La matrice inverse n'existe donc que si det(A) est différent de zéro

Pour calculer l'inverse des matrices d'ordre supérieur à 2 on procède comme suit

1- Trouvez le déterminant de la matrice, **det(A)**
2- Trouvez $\mathbf{A^T}$, la transposition de la matrice.
3- Trouvez le déterminant de chacune des matrices mineures 2x2.
4- Représentez-les comme une matrice adjointe adj(A)
5- Trouvez l'inverse en divisant la comatrice trouvée dans l'étape précédente par le déterminant de la première étape **det(A).**
6-

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{im} \\ & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ adj(A)^T}$$

La matrice adjointe $\mathbf{adj(A)} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1m} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & & \Delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{i1} & \Delta_{i2} & & \Delta_{im} \\ \\ \Delta_{n1} & & \cdots & \Delta_{nm} \end{bmatrix}$

Où Δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation : $\boldsymbol{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|}$

Exemple 1

1- $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{det(M) = 1(0-24) - 2\,(0-20) + 3\,(0.5) = 1}$

2- $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$

3- $\boldsymbol{\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (1.0) - (4.6) = -24}$

$\boldsymbol{\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (2.0) - (3.6) = -18 \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5}$

$\boldsymbol{\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4}$

$\boldsymbol{\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1}$

4- ***ce qui donne la matrice des cofacteurs*** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}}$

on change les signe comme suit $\boldsymbol{\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}}$ ***on aura***

$$\boldsymbol{\Rightarrow adj(M)\begin{pmatrix} -24 & +18 & 5 \\ +20 & -15 & -4 \\ -5 & +4 & 1 \end{pmatrix}}$$

5- *On obtient la matrice inverse*

$$\boldsymbol{M^{-1} = \frac{1}{det(M)}\ adj(M)}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -24 & +18 & 5 \\ +20 & -15 & -4 \\ -5 & +4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & +18 & 5 \\ +20 & -15 & -4 \\ -5 & +4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification sous Matlab

- Le déterminant de A est calculé par **det(A)**
- La matrice inverse de A est calculée par **inv(A)**
- La transposé de A par **A'**

```
Command Window
>> A=[1 2 3;0 1 4; 5 6 0]

A =

     1     2     3
     0     1     4
     5     6     0

>> A'

ans =

     1     0     5
     2     1     6
     3     4     0

>> inv(A)

ans =

  -24.0000   18.0000    5.0000
   20.0000  -15.0000   -4.0000
   -5.0000    4.0000    1.0000

>> det(A)

ans =

    1.0000
```

Exemple 2

1- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ $det(M) = +6$

2- *ce qui donne la matrice des cofacteurs*

$$\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(M) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3- *On obtient la matrice inverse*

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}\ adj(M)^T$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =, \begin{pmatrix} 1.16 & -1.66 & 0.16 \\ -0.33 & 0.33 & -0.33 \\ 0.16 & 0.33 & 0.16 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[1 2 3;0 1 2; -1 -4 -1]

A =

      1      2      3
      0      1      2
     -1     -4     -1

>> det(A)

ans =

      6

>> A'

ans =

      1      0     -1
      2      1     -4
      3      2     -1

>> inv(A)

ans =

    1.1667   -1.6667    0.1667
   -0.3333    0.3333   -0.3333
    0.1667    0.3333    0.1667
```