Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques    Matière *: Analyse 03*

**TD N$^0$:06 (Fonctions définies par des intégrales**

**Exercice n°1 :**

En revenant à la définition, étudier si les limites suivantes ont un sens ou non et donner leur éventuelle valeur :

$$1)\lim_{y\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x\left(y+1\right)\right)}{2+\sin\left(x\left(y+1\right)\right)}dx \qquad 2)\ \lim_{y\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}\ ,$$

$$y\to 0$$

**Exercice n°2 :**

1. Montrer que l'intégrale généralisée :

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y\exp(-xy)dx,$$

converge simplement sur $[0,1]$, mais elle ne converge pas uniformément sur le même segment.

2. Montrons que  cette intégrale converge uniformément sur tout segment $]0,1]$.

**Exercice n°3 :**

1. Etudier si l'intégrale généralisée suivante a un sens ou non et donner leur éventuelle valeur :

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)\ \frac{\sin(\beta x)}{x}dx,\ \ \alpha \geq 0.$$

2. En passant à la limite convenablement justifiéé, trouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x}dx.$$

3. En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cos(\beta x)}{x}dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(\alpha x)}{x}dx.$$

**Exercice n°4 :**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels non nules. En effectuant une dérivation par rapport au paramètre $a$, établir la relation suivante :

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right) dx = \pi \ln\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)$$

**Exercice n°5 :**

En utilisant les fonctions spéciales, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^2 \sqrt{2x - x^2}dx \quad \text{(en posant } y = \frac{x}{2}\text{).} \\
J_2 &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln(x))\, dx}{x\sqrt{\ln x}\,(1 + \ln x)} \quad \text{(en posant } y = \ln x\text{).} \\
J_3 &= \int_0^{+\infty} \exp(-3x)\,(\exp(x) - 1)^{\frac{3}{2}}\, dx \quad \text{(en posant } \exp x = 1 + y\text{).}
\end{aligned}$$