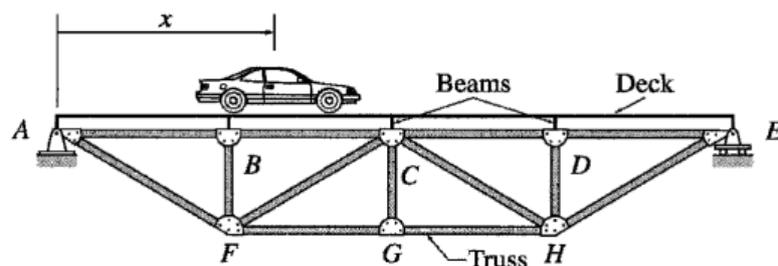


CHAPITRE 3

LIGNES D'INFLUENCE

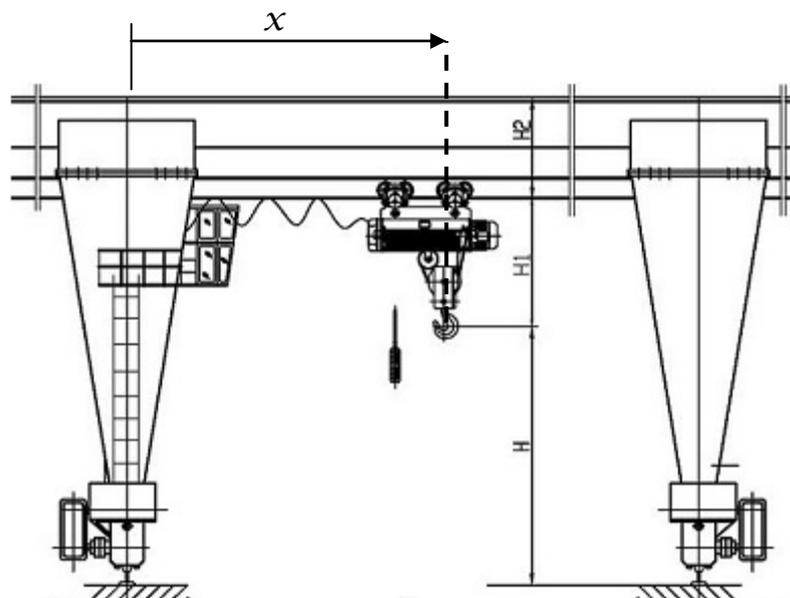
3.1. Introduction :

Jusqu'à présent nous avons étudié des structures soumises à des charges immobiles. Mais il existe de nombreux cas où les constructions supportent des charges mobiles. L'exemple le plus commun est celui des ponts (Fig 3.1). Le chargement mobile étant dans ce cas représenté par l'action de la circulation des véhicules et des trains.



(Fig 3.1)

Comme autre exemple, citons les ponts roulants qu'on rencontre dans les ateliers de fabrication. Le chariot, qui déplace des pièces d'un point à un autre de l'atelier, se meut sur des rails fixés à des poutres (Fig 3.2).



(Fig 3.2)

La question qui vient immédiatement à l'esprit est de savoir, pour une grandeur donnée, quelle est la position de la charge (chargement) qui provoque la plus grande valeur de la grandeur étudiée. Cette grandeur peut être un effet élastique quelconque : déplacement d'une section, réaction d'un appui, moment dans une section, etc. Il s'agit donc de trouver la position de la charge (chargement) qui provoque l'effet maximum et la section où il se produit (section la plus dangereuse). C'est le problème majeur des chargements mobiles. Il faut noter que la position du chargement qui provoque le plus grand effet pour une grandeur donnée (par exemple le moment fléchissant) ne l'est pas en général pour une

autre grandeur (l'effort tranchant par exemple) et que ce qui intéresse l'ingénieur en définitive, c'est la position qui provoque les contraintes les plus importantes.

3.2. Définitions :

Les lignes d'influence montrent graphiquement comment varient les diverses grandeurs qu'on rencontre habituellement, tous les effets élastiques auxquels s'intéresse la résistance des matériaux, sous l'influence d'une charge constante qui se déplace sur la structure.

La grandeur ou effet élastique peut être :

- une contrainte en un point précis ;
- le déplacement (rotation - translation) d'une section donnée ;
- une composante de réaction d'un appui ;
- un élément de réduction dans une section donnée.

La charge mobile est habituellement une force verticale unité, vu qu'en général on s'intéresse à l'action des charges verticales sur les constructions. Elle peut cependant être un couple, une force horizontale, une discontinuité de la section, un manque de concordance, etc.

Donc les lignes d'influence décrivent l'influence de la position des charges sur la valeur d'un effet (R, V ou M) dans une section déterminée;

→ Signification opposée à celle des diagrammes ordinaires

	L.I.	Diagramme
Position charge :	variable	fixe
Position section :	fixe	variable

3.3 Systèmes isostatiques

3.3.1 Méthodes de détermination des lignes d'influence

a) Méthode directe

Elle consiste en règle générale à chercher l'expression analytique de l'effet élastique étudié dans la section considérée sous l'effet d'une charge unité. La position de la charge est considérée comme la variable de l'expression cherchée, c'est-à-dire l'équation de la ligne d'influence de l'effet élastique étudié dans la section considérée. La ligne d'influence est tracée à partir des valeurs obtenues (coefficients d'influence) pour plusieurs positions de la cause (charge).

En verra plus loin que le tracé des lignes d'influence peut être grandement simplifié dans de nombreux cas. Par exemple, l'effet élastique est souvent une fonction linéaire de la position (abscisse) de la cause. Dans ce cas, la ligne d'influence est une droite, ou plusieurs segments de droite, qu'on peut construire à raison de 2 points par segment. Par ailleurs, les conditions de fixation de la structure donnent souvent des indications précieuses qui facilitent le tracé.

b) Méthode cinématique

Elle permet d'obtenir directement la forme exacte de la ligne d'influence. La détermination d'une seule ordonnée suffit pour avoir l'échelle correcte du diagramme d'influence.

La méthode est basée sur le théorème des travaux virtuels. Pour obtenir la ligne d'influence d'une grandeur R, M, N, T on supprime la liaison lui correspondant et on la remplace par une inconnue (ou 2 inconnues égales et opposées s'il s'agit d'une liaison interne). Avec la suppression d'une liaison, externe ou interne, le système isostatique devient alors un mécanisme à un degré de liberté, pouvant se déplacer sans se déformer (comme un corps indéformable).

On applique ensuite au mécanisme un déplacement virtuel, c'est-à-dire très petit et compatible avec les liaisons restantes. La configuration obtenue représente la ligne d'influence cherchée. L'échelle réelle du diagramme s'obtient en calculant l'ordonnée d'un point.

3.3.2 Ligne d'influence d'une réaction d'appui

Les lignes d'influence offre un moyen assez simple de calcul ou de vérification des réactions. Considérons la poutre bi-articulée de la figure 3.2.

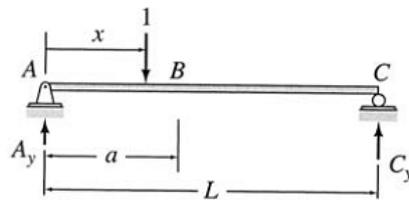
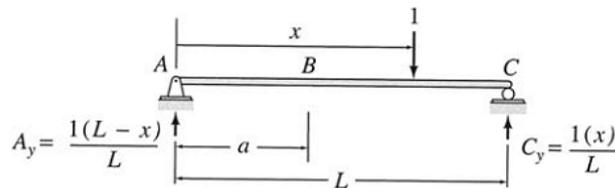


Figure 3.2

Nous déterminons l'expression de A_y en fonction de la position variable de la charge unitaire x , en appliquant l'équation d'équilibre:

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_C &= 0 \\
 -A_y(L) + 1(L-x) &= 0 \\
 A_y &= \frac{1(L-x)}{L} = 1 - \frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{1(x)}{L}
 \end{aligned}$$



A_y est une fonction linéaire de x , avec $A_y = 1$ à $x = 0$ et $A_y = 0$ à $x = L$.

où $\frac{(L-x)}{L}$ et $\frac{x}{L}$ sont les coefficients d'influence de A_y et C_y , respectivement. Ils sont représentés graphiquement par les lignes d'influence dans la figure 3.3.

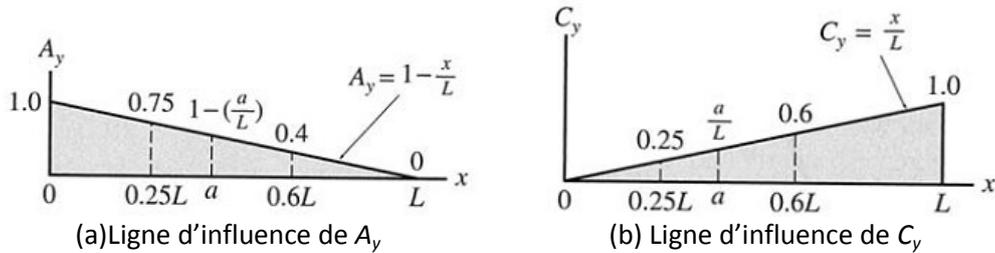
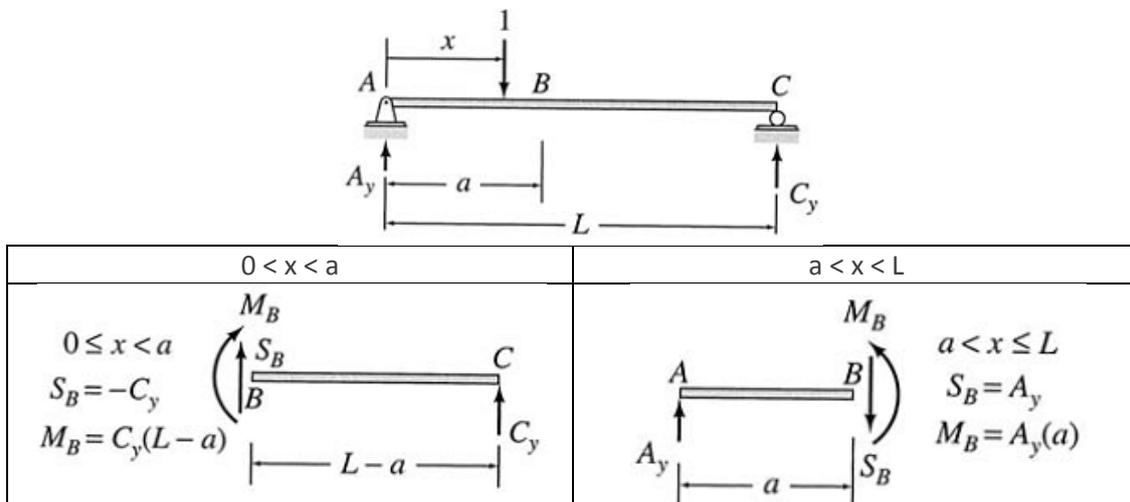


Figure 3.3

3.3.3. Lignes d'influence de l'effort tranchant et de moment fléchissant :

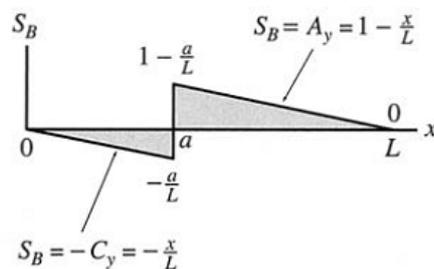
Après avoir déterminé l'intensité des réactions d'appuis (en fonction de l'abscisse x du chargement), nous pouvons passer à l'équation de la ligne d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant.



Donc l'expression de la ligne d'influence de l'effort tranchant S_B est :

$$S_B = \begin{cases} -C_y = -\frac{x}{L} & 0 \leq x < a \\ A_y = 1 - \frac{x}{L} & a < x \leq L \end{cases}$$

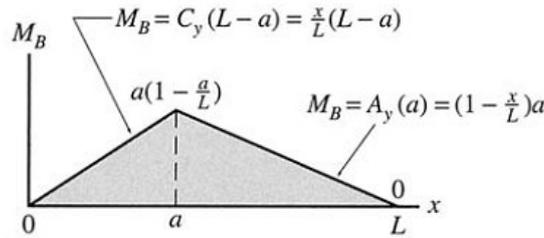
Si l'on trace cette ligne d'influence, nous obtenons ceci :



L'expression de la ligne d'influence du moment fléchissant M_B est :

$$M_B = \begin{cases} C_y(L - a) = \frac{x}{L}(L - a) & 0 \leq x \leq a \\ A_y(a) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)a & a \leq x \leq L \end{cases}$$

On trace cette ligne d'influence, nous obtenons :



3.4. Utilisation des lignes d'influence

Les lignes d'influence permettent de calculer assez facilement les effets élastiques produits par les chargements les plus divers. Elles sont plus particulièrement utiles dans la recherche des valeurs extrêmes de ces effets et des positions du chargement qui les provoquent.

Reprenons l'exemple de la poutre-console et considérons un chargement composé de trois charges concentrées dont les distances mutuelles (d_1 et d_2) sont invariables (Figure 3.4a). Signalons qu'un système de forces mobiles concentrées pouvant se déplacer en maintenant fixes les distances entre les points d'application des forces est appelé *convoi*.

D'après la définition du diagramme d'influence et en vertu du principe de superposition, le moment en B sous l'action du système de forces vaut :

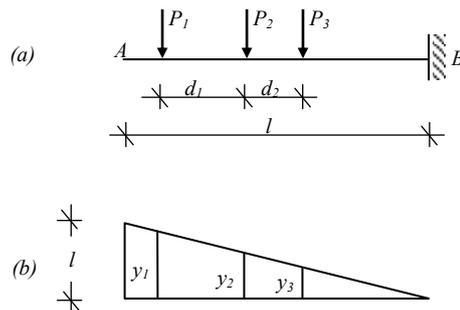


Figure 3.4

$$M_B = -(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3) = -\sum_{i=1}^3 P_i y_i$$

Comme les valeurs du coefficient d'influence (ordonnées du diagramme d'influence) augmentent quand on se rapproche de l'extrémité libre, on conclue que la valeur extrême du moment d'encastrement s'obtient en plaçant le chargement de manière à faire coïncider la force P_1 avec l'extrémité libre de la poutre.

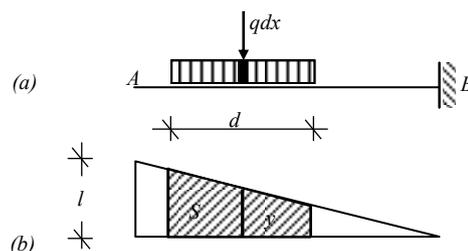


Figure 3.5

Les lignes d'influence sont d'une utilité autrement plus grande dans les cas complexes. Elles peuvent être également utilisées dans l'étude de l'action des charges réparties. Si la poutre précédente est soumise à une charge répartie uniforme partielle comme indiqué à la figure 3.5a, le moment qu'elle produit dans l'encastrement se calcule en assimilant la charge répartie à une série de forces élémentaires qdx .

$$M_B = -\int_0^d q \cdot y dx$$

Soit :

$$M_B = -\int_0^d q \cdot y dx = -q \int_0^d y dx = -qS$$

Où S est l'aire du diagramme d'influence se trouvant sous la charge répartie (Figure 3.5b). Ce résultat peut être utilisé pour calculer le moment quelle que soit la partie de la poutre chargée. Il permet entre autres de déduire que la position critique consiste à placer la charge le plus proche possible de l'extrémité libre. D'autres utilisations des lignes d'influence, comme le calcul des réactions, seront montrées plus loin.

Généralisation

Soit une structure élastique soumise à un système de forces concentrées P_1, P_2, \dots, P_n et une

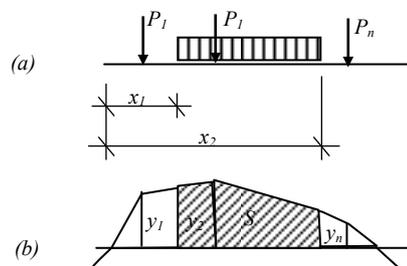


Figure 3.6

densité de charge q répartie sur un tronçon " d " compris entre les sections d'abscisses x_1 et x_2 , respectivement (Figure 3.6a).

La connaissance de la ligne d'influence d'un effet élastique E permet de calculer la valeur de cet effet sous l'action de la sollicitation globale en généralisant les relations (a) et (b) précédentes :

$$E = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \int_{x_1}^{x_2} q \cdot y dx$$