CHAPITRE 1:

SYSTÈMES EN TREILLIS ISOSTATIQUES

1.1. Généralités :

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes des toitures des hangars et des grandes salles de sport , de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc., . On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité et rigidité importante suivant leurs plans.

Les treillis peuvent être sollicités par des forces externes comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces internes de la part des pièces voisines. Ces efforts internes et externes doivent être déterminés pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

Lorsque toutes les barres ainsi que les forces appliquées sont dans un même plan, le treillis est appelé un treillis plan ; dans le cas contraire, il s'agit d'un treillis spatial.

1.2. Définition :

Les systèmes en treillis (appelés aussi triangulations ou structures réticulées) sont des structures composées de barres droites articulées entre-elles à leurs extrémités situées dans un seul plan appelé le plan de charpente. Les articulations communes à plusieurs barres sont les nœuds du système. Il forme généralement une chaîne simple (plane) de triangles juxtaposés.

Cette construction est une des principales structures employées en ingénierie.

Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles.

La cellule de base d'un treillis plan est le triangle (parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable) et les trois barres (figure 1.1.a) articulées à leurs extrémités forment une structure stable pour supporter la charge *P*. Le treillis de la figure 1.1a peut être agrandi par juxtaposition de triangles, et on obtient ainsi un système triangulé (figure 1.1.b).

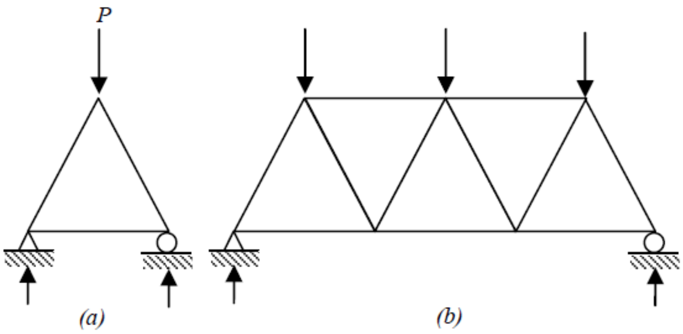


Figure 1.1 **:** *Systèmes en treillis*

1.3) TERMINOLOGIE

1.3.1) Nœud: Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un nœud. Les nœuds peuvent être fait de joint solide (assemblage par rivetage, soudage,...) ou des articulations (assemblage par rotule, axe, ...). La figure 1.2 présente un exemple de détail de la réalisation pratique d'un nœud de treillis.

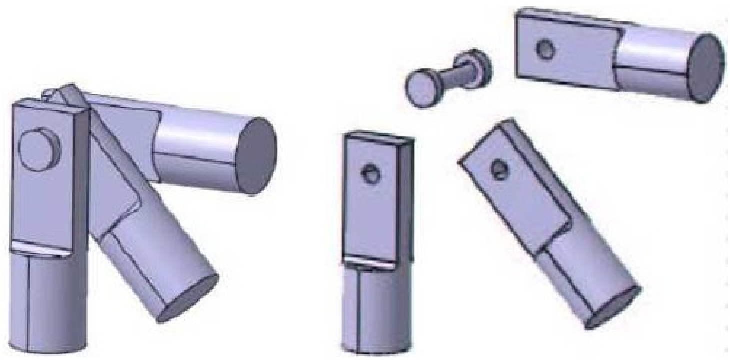


Figure 1.2*: Détail d'un nœud*

1.3.2) Barres ou membrures: Les pièces d'une structure triangulée sont des barres. Elles sont faites d'acier, de bois ou autre. On associe généralement les barres ou membrures des treillis à des barres articulées.

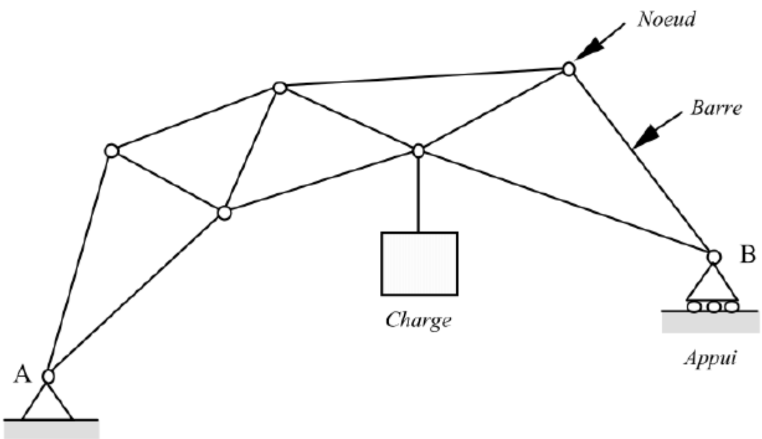


Figure 1.3 *: Terminologie d'un treillis*

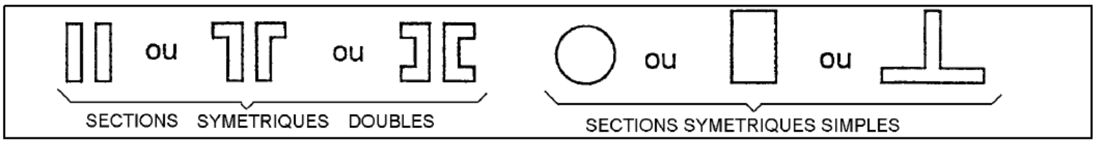
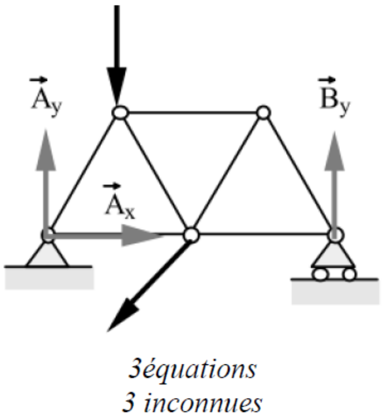


Figure 1.4 : *Exemples de section des barres*

1.4) SYSTEMES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES

1.4.1) Système isostatique

Un treillis ou système réticulé est extérieurement isostatique si les actions d'appui peuvent être déterminées à partir des trois équations d'équilibre de la statique ; dans le cas contraire, le treillis est extérieurement hyperstatique.



- *Trois équations :*

Equilibre de translation :

$\sum F_x = 0$ .... (1.1)

$\sum F_y = 0$ .... (1.2)

Equilibre de rotation :

$\sum M = 0$ .... (1.3)

- *Trois inconnues :*

A_x, A_y et B_y

Figure 1.4 *: Système isostatique*

Par ailleurs, un treillis est intérieurement isostatique si les efforts dans les barres peuvent être déterminés par les équations d'équilibre de la statique à partir des charges et des actions d'appui préalablement calculées ; dans le cas contraire, le treillis est intérieurement hyperstatique.

1.4.2) Système hyperstatique

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est supérieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit hyperstatique. On à un système possédant plus d'inconnues que d'équations donc on ne peut résoudre ce type de système par les méthodes que l'on connaît. Dans ce cas le nombre d'inconnues est quatres : Ax, Ay, Bx et By.

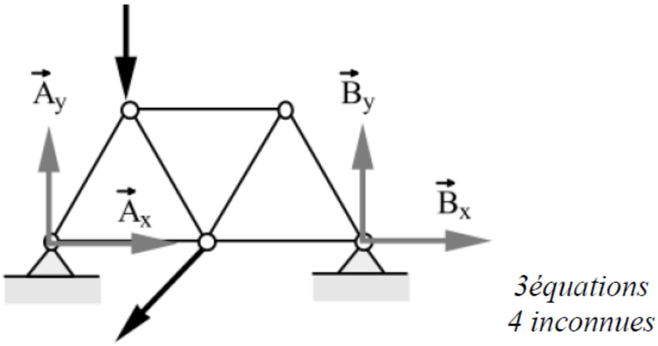


Figure 1.5 *: système hyperstatique*

1.4.3) Système instable

Si le nombre d'éléments inconnues des réactions d'appuis est inférieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit instable. C'est par exemple le cas d'un système reposant sur deux appuis simple comme l'exemple ci-contre: la structure peut se déplacer latéralement. Dans ce cas le nombre d'inconnue est seulement deux : Ay et By

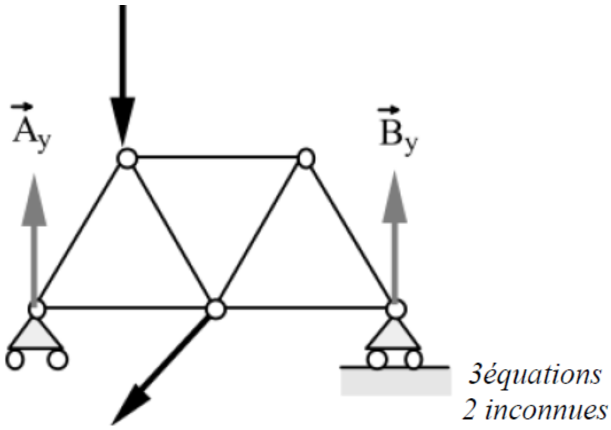


Figure 1.6 *: système instable*

La condition nécessaire pour que le treillis soit intérieurement isostatique est :

$$\boldsymbol{b = 2n - 3} \tag{1.4}$$

Où :

b : nombre de membrures (barres)

n : nombre de nœuds

- Si b = 2n-3 : Le système est intérieurement isostatique ;
- Si b <2n-3 : Le système est instable ;
- Si b >2n-3 : Le système est hyperstatique intérieurement.

Dans ce cas le degré d' hyperstaticité du treillis h est donné par :

$$\boldsymbol{h = b + l - 2n} \tag{1.5}$$

Où :

b : nombre de membrures (barres) ;
n : nombre de nœuds ;
l : le nombre de réactions d'appuis ;

- Si h=0 le système est isostatique.

1.5) TYPE DE TREILLIS

Les treillis peuvent être classés en plusieurs catégories comme par exemple:

1-Ferme de pont, (figure 1.7)

2-Ferme de toit, (figure 1.8)

3-Grue, (figure 1.9)

4-Autres

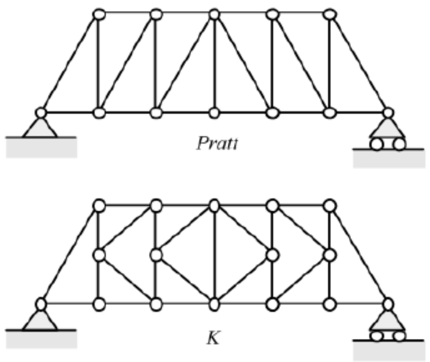


Figure 1.7 *: Ferme de pont.*

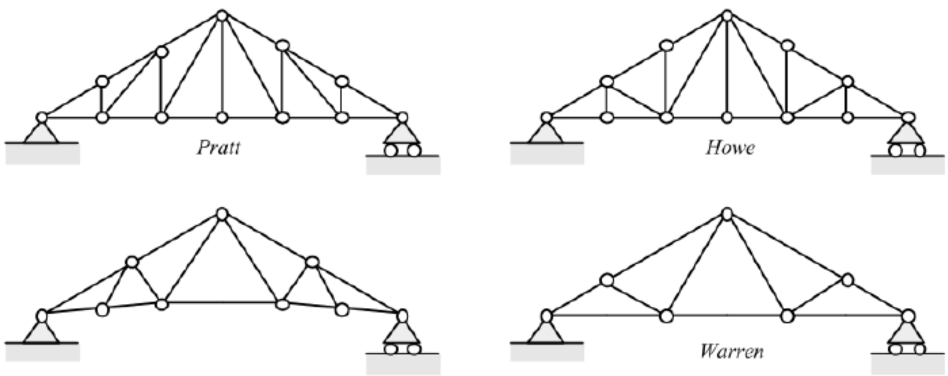


Figure 1.8 *: Ferme de toit.*

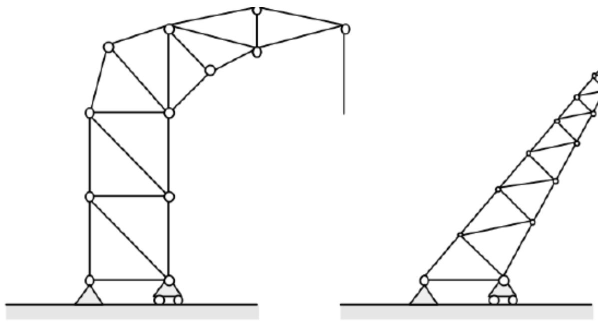


Figure 1.9 *: Grue*

1.6) HYPOTHESE DE CALCUL

Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicité qu'en traction ou en compression il faut que :

- Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide (les barres sont considérés comme rigide et indéformables).
- Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le centre de gravité des sections droites).
- On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds, (articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis).
- Le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- Les sollicitations extérieures (charge) ne soient que des efforts appliqués sur les nœuds,
- Les liaisons avec l'extérieur soient des appuis fixes ou des appuis mobiles.
- Les calculs sont conduits exclusivement en élasticité.

1.7) SOLLICITATION DES BARRES

On suppose que les forces extérieures sont appliquées aux nœuds. Il en résulte qu'une barre CD du système comprise entre les nœuds C et D est sollicité par deux forces axiales NC et ND transmises par ces nœuds. La barre isolée doit être en équilibre sous l'action de ces deux forces, ce qui exige que celles-ci soient de sens opposé et d'intensité égale, figure 1.10. La barre CD supporte donc uniquement un effort normal NCD qui est considéré comme :

· Positif si la barre CD est tendue (Traction)

· Négatif si la barre CD est comprimée (Compression)

Donc nous pouvons écrire que : NCD=NDC

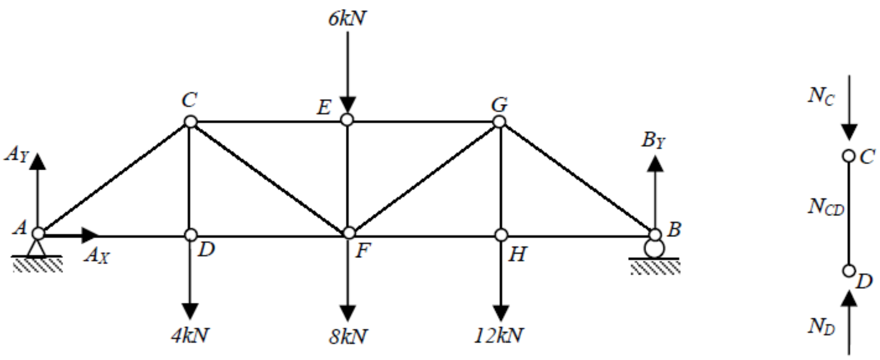


Figure 1.10 *: Sollicitation des barres*

1.8) ANALYSE DE TREILLIS

Deux méthodes principales permettent de calculer théoriquement les efforts dans les membranes d'un treillis : la méthode des nœuds et la méthode des coupes (sections).

1.8.1) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des nœuds

a) Méthodologie

Cette méthode consiste à faire le schéma rendu libre d'un premier nœud et d'écrire les deux équations exprimant son équilibre, $\Sigma Fx = 0$; $\Sigma Fy = 0$, (C'est généralement le cas d'un nœud d'extrémité ou d'appui du treillis). Sur base des résultats obtenus par la résolution de ce premier système d'équations, on écrit l'équilibre d'un deuxième nœud puis d'un troisième et ainsi de suite pour obtenir les efforts dans toutes les barres.

Dans cette méthode, on comprendra aisément qu'il faut disposer d'un premier nœud où n'aboutissent que deux barres afin de n'introduire que deux inconnues puisque l'on n'a que deux équations (c'est toujours le cas dans les triangulations simples) et ensuite, il faut également que, pour tout nœud suivant, il n'y ait jamais plus de deux efforts inconnus à trouver. Ce sont ces deux critères qui vont gouverner le choix du nœud de départ puis de l'ordre suivant lequel on va progresser dans le treillis.

Signalons que souvent, il est utile de déterminer la nature du treillis et de calculer, au préalable, les réactions d'appui par équilibre de tout le treillis.

b) Remarque

Lors de la résolution, pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction (leurs vecteurs représentatifs s'éloignent du nœud). On écrit les équations d'équilibre pour trouver la valeur de ces efforts.

Si le résultat est positif pour un effort, il s’agit bien d’une traction ; sinon il s’agit d’une compression. Il est clair qu’au dernier nœud, les équations d’équilibre devront être automatiquement satisfaites et que cela pourra servir de contrôle final.

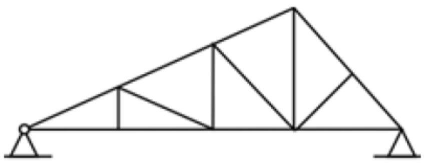
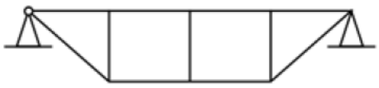
c) Conclusion

La méthode des nœuds est toute indiquée quand il s’agit de calculer les forces dans toutes les barres d’un treillis. Elle consiste à écrire l’équilibre de chaque nœud, pour déterminer les valeurs de sollicitation de chaque barre. On peut se vérifier sur le dernier nœud. Seuls problèmes :

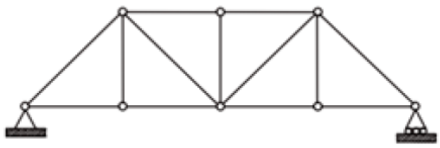
- On doit généralement résoudre entièrement le treillis pour obtenir l’effort dans une barre bien précise ;
- Les erreurs se cumulent au fur et à mesure de l’avancement de la résolution.

<u>Exercice 1 :</u>

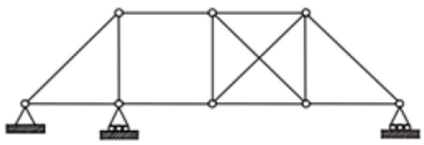
1- Vérifier l’isostatisme des systèmes triangulés suivants.

systèmes triangulées	Nbrs. de barres et de nœuds	Type de système
	b =15 n =9	Système est intérieurement isostatique
	b =11 n =8	le système est instable

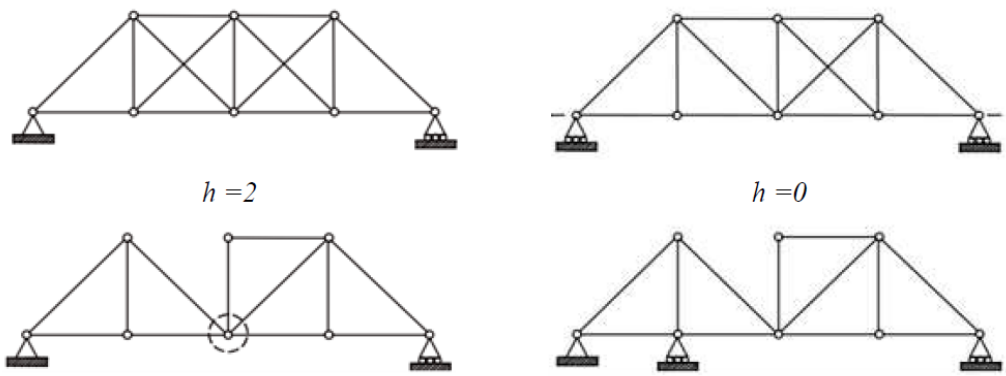
2- Calculer le degré d’ hyperstaticité *h* des systèmes triangulés suivants :



h =1



h =1

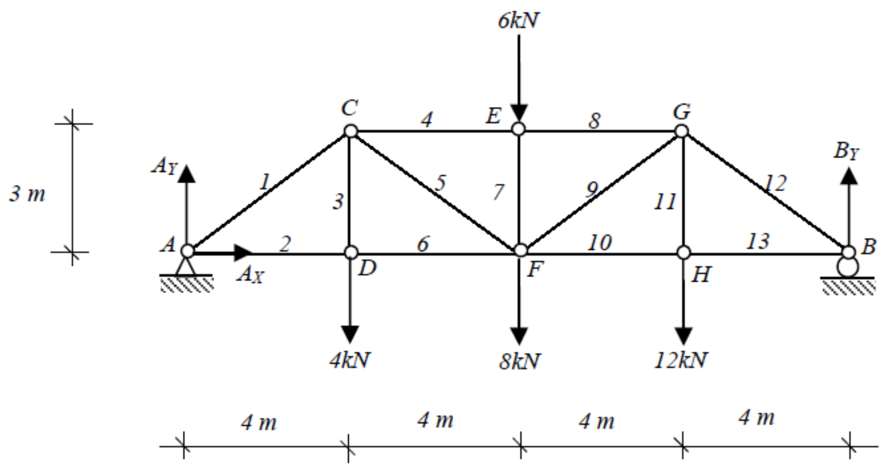


$h = 2$ $h = 0$

$h = -1$ $h = 0$

Exercice 2:

Trouver les forces dans toutes les barres du treillis suivant :



Solution :

- Vérification de la structure

$b = 2n - 3$

$b = 13$

$n = 8 \Rightarrow 13 = 13$

Donc le système est intérieurement isostatique.

1- Trouvons les réactions d'appuis

$\Sigma MA = -(4000 * 4) - (8000 * 8) - (6000 * 8) - (12000 * 12) + (By * 16) = 0$

$By * 16 = 16000 + 64000 + 48000 + 144000$

D'où **$By = 17$ kN**

$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow$ **$Ax = 0$**

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Ay - 4000 - 8000 - 6000 - 12000 + 17000 = 0$

D'où **$Ay = 13$ kN**

2- Équilibre des nœuds

- Nœud A : Remplaçons l'articulation par A_y et les barres 1 et 2 par des efforts N_1 et N_2 en tension.

$\sum F_x = N_1 \cos\theta + N_2 = N_1(4/5) + N_2 = 0$

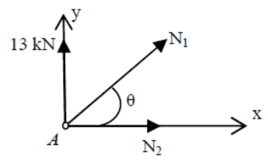
D'où $N_2 = -(4/5)N_1$

$\sum F_y = N_1 \sin\theta + 13000 = 0$

Donc $N_1(3/5) = -13000$

D'où $N_1 = -21667$ N

Donc $N_2 = 17333$ N



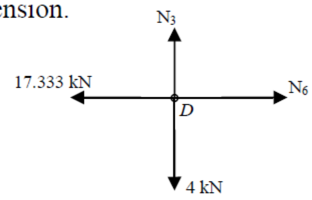
- Nœud D : Remplaçons la barre 2 par son effort, la barre 3 par un effort N_3 supposé en tension et la barre 6 par un effort N_6 supposé en tension.

$\sum F_x = N_6 - 17333 = 0$

d'où $N_6 = 17333$ N

$\sum F_y = N_3 - 4000 = 0$

d'où $N_3 = 4$ kN



- Nœud C : Remplaçons les barres 1 et 3 par leurs efforts, la barre 4 par un effort N_4 supposé en tension et la barre 5 par un effort N_5 supposé en tension.

$\sum F_x = N_4 + 21667 \sin\alpha + N_5 \cos\theta$

$= N_4 + 21667(4/5) + N_5(4/5) = 0$

D'où $N_4 = -(4/5)N_5 - 17333$ (1)

$\sum F_y = 21667 \cos\alpha - 4000 - N_5 \sin\theta$

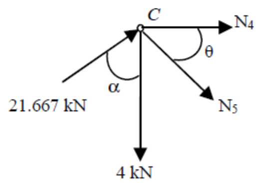
$= 21667(3/5) - 4000 - N_5(3/5) = 0$

$(3/5)N_5 = 13000 - 4000$

D'où $N_5 = 15000$ N

N_5 dans équation (1) $N_4 = -(4/5)(15000) - 17333$

D'où $N_4 = -29333$ N



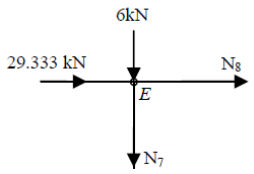
- Nœud E : Remplaçons la barre 4 par son effort (29333 N compression), la barre 7 par un effort N_7 supposé en tension et la barre 8 par un effort N_8 supposé en tension.

$\sum F_x = N_8 + 29333 = 0$

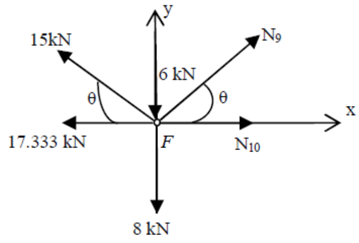
D'où $N_8 = -29333$ N

$\sum F_y = -N_7 - 6000 = 0$

D'où $N_7 = -6000$ N



- Nœud F: Remplaçons les barres 5, 6 et 7 par leurs efforts, la barre 9 par un effort N_9 supposé en tension et la barre 10 par un effort N_{10} supposé en tension.



$\sum F_x = -17333 - 15000\cos\theta + N_9\cos\theta + N_{10}$

$= -17333 - 15000(4/5) + N_9(4/5) + N_{10} = 0$

D'où $N_{10} = -(4/5)\, N_9 - 29333$ (1)

$\sum F_y = 15000\sin\theta - 6000 - 8000 + N_9\sin\theta$

$= 15000(3/5) - 14000 + N_9(3/5) = 0$

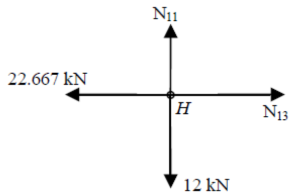
$(3/5)N_9 = 14000 - 9000 = 5000$

D'où $N_9 = 8333$ N

N_9 dans équation (1) $N_{10} = -(4/5)(8333) + 29333$

D'où $N_{10} = 22667$ N

- Nœud H: Remplaçons la barre 10 par son effort, la barre 11 par un effort N_{11} supposé en tension et la barre 13 par un effort N_{13} supposé en tension.



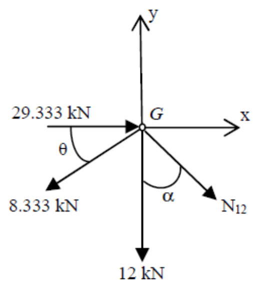
$\sum F_x = N_{13} - 22667 = 0$

D'où $N_{13} = 22667$ N

$\sum F_y = N_{11} - 12000 = 0$

D'où $N_{11} = 12000$ N

- Nœud G: Remplaçons les barres 8 et 9 par leurs efforts, et la barre 12 par un effort N_{12} supposé en tension.



$\sum F_x = 29333 - 8333\cos\theta + N_{12}\sin\alpha$

$= 29333 - 8333(4/5) + (4/5)N_{12} = 0$

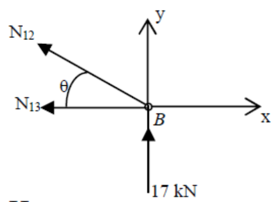
D'où $N_{12} = -28333$ N

$\sum F_y = -8333\sin\theta - 12000 - N_{12}\cos\alpha$

$= - 8333(3/5) - 12000 - (3/5)N_{12} = 0$

D'où $N_{12} = -28333$ N (preuve)

- Nœud B: Vérification; Si les valeurs trouvées pour N_{12} et N_{13} par le calcul successif de toutes les barres sont exactes, les autres valeurs le seront également.



$\sum F_y = N_{12}\sin\theta + 17000 = N_{12}\,(3/5) + 17000 = 0$

D'où $N_{12} = -28333$ N

$\sum F_x = -N_{12}\sin\theta - N_{13} = 0 \Rightarrow N_{13} = -(4/5)N_{12} = -(4/5)(-28333)$

D'où $N_{13} = 22667$ N

Les mêmes valeurs (N_{12} et N_{13}) trouvées par l'étude des nœuds G et H.

1.8.2) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des sections (de Ritter)

La méthode des noeuds ci-dessus est un outil très pratique lorsqu'il s'agit de déterminer les efforts dans toutes les barres du treillis. Cependant, pour déterminer ou vérifier l'effort dans une barre quelconque, une autre méthode, appelée la méthode des sections est plus avantageuse.

Cette méthode consiste à couper le treillis (figure 1.11) en deux parties par une section qui coupe les barres dont on veut déterminer les efforts. On isole la partie à gauche de la section, on dénote les efforts inconnus des barres comme des forces extérieures et l'on tient compte des forces extérieures appliquées aux nœuds ainsi que les actions aux appuis. On calcule ensuite les efforts inconnus à partir des équations d'équilibre de la statique.

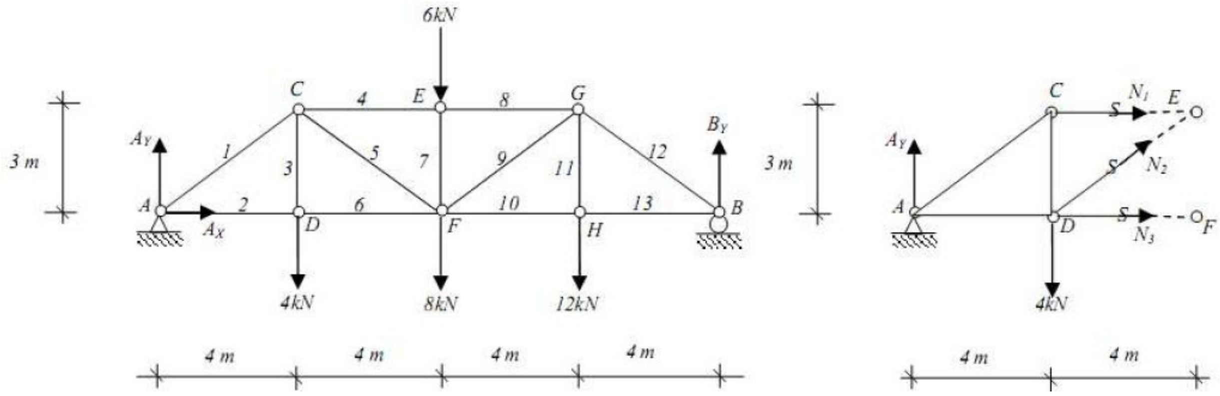


Figure 1.11 *: Méthode des sections (de Ritter)*

La coupe idéale est donc celle qui ne sectionne que trois barres, puisqu'on n'a que trois équations d'équilibre. Il faut savoir choisir la coupe appropriée qui permettra les calculs, car ce n'est pas n'importe quelle coupe qui conviendra. On coupera le treillis en deux parties autant de fois que cela est nécessaire, selon le nombre de barres dont on veut calculer les efforts.

a) Méthodologie

Pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction. Les équations d'équilibre sont écrites pour trouver la valeur de ces efforts. Si le résultat est positif pour un effort, il s'agit bien d'une traction ; sinon, il s'agit d'une compression.

Pour écrire les équations d'équilibre de la statique, on utilise les composantes horizontales et verticales des efforts et des forces extérieures suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On peut aussi employer les distances des forces et des efforts au point P (le point P représente l'intersection des deux poutres prises parmi les trois barres coupées), par rapport auquel on écrit l'équation d'équilibre des moments $\Sigma \vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{0}$, si cela s'avère plus commode et plus rapide pour les calculs. Le point d'intersection des deux poutres coupées est appelé « pole ».

b) Conclusion

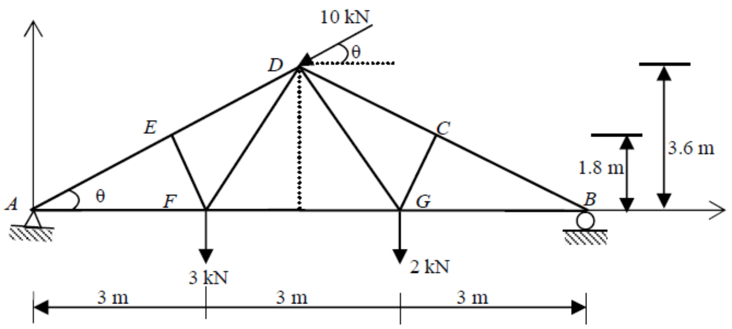
Cette méthode est simple. Juste en appliquant les équations d'équilibres sur la demi-structure, on détermine les valeurs de sollicitation de chaque barre. Cependant, les calculs sont plus laborieux que la méthode des nœuds. L'avantage de cette méthode est qu'elle :

- permet de calculer l'effort dans une barre particulière, directement, sans être au préalable obligé de calculer les efforts dans plusieurs autres barres.
- De plus, les erreurs ne se cumulent pas. Cependant, on ne peut pas se vérifier.

Exercice 4 :

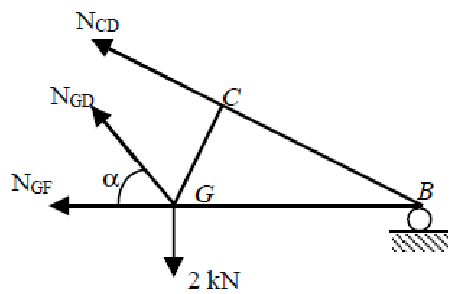
Soit le treillis articulé plan schématisé par la figure ci-dessous.

1) Etudier l'isostaticité du treillis.
2) Déterminer l'effort dans la barre DG.



Solution

1- Isostaticité du système



Nombre de nœuds: (n = 7)
Nombre de barres: (b = 11)
Donc $b = 2n - 3$, d'où le système est isostatique.

2- Effort dans la barre DG.

En utilisant la méthode des sections, on coupe au maximum trois barres de sorte que la barre dont on recherche l'effort soit parmi elle.
Nous écrivons une seule équation qui est celle des moments par rapport au point B :

$\Sigma M_{/B} = 0$

$\Rightarrow -(N_{GD} \sin a) * 3 + 2 * 3 = 0$

$\Rightarrow N_{GD} = 2/\sin a \ (avec\ a = 67°, 38')$

$\Rightarrow N_{GD} = 2.17\ kN\ (traction)$