الفصل الثاني- محاضرة 3

2-2- التقدير بمجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

نميز بين حالتين:

2-2-1- عندما يكون تباين المجتمعين معلومين $\left(\sigma_2^2 \text{ و } \sigma_1^2 \text{ معلومين}\right)$

حسب النظرية (1-11) فإنه إذا كان $\mathbf{X_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $\mathbf{X_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ بحيث $\mathbf{X_1}$ و $\mathbf{X_2}$ مجتمعان طبيعيان مستقلان فإن:

- $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
- $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

وبالتالي:

$$(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

ومنه:

$$Z = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0.1)$$

ويكون مجال الثقة كما يلي:

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

بالتعويض عن قيمة Z نجد:

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة، بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوي على المعلمة المجهولة فقط، نجد:

$$(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال (2- 9):

أردنا مقارنة متوسط كميات الإنتاج لشجيرات البرتقال في مزرعة **A** بكميات الإنتاج لشجيرات البرتقال في مزرعة **B**، ولهذا الغرض قمنا بسحب عينة عشوائية من شجيرات البرتقال من المزرعة **A** حجمها **25** شجيرة فكان متوسط كمية الإنتاج لها **55** كلغ، وسحبنا أيضا عينة عشوائية أخرى من المزرعة **B** مستقلة عن المزرعة الأولى حجمها **32** فكان متوسط كمية الإنتاج لها **48** كلغ. فإذا كانت كميات الإنتاج لجميع شجيرات البرتقال في المزرعة **A** تتبع التوزيع الطبيعي بتباين يساوي **16** كلغ، وكميات الإنتاج لجميع شجيرات البرتقال في المزرعة **B** تتبع التوزيع الطبيعي بتباين يساوي **9** كلغ، فأوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي كميات الإنتاج في المزرعتين عند مستوى ثقة **90%**.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$$n_A = 25$$

$$= 1$$

$$n_B = 32 \qquad \bar{X}_B = 48 \qquad \sigma_B^2 = 9$$

بما أن المجتمعين موزعين توزيعا طبيعيا ومستقلين عن بعضهما البعض، وتباينهما معلومين فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين، أي مجال الثقة لـ $\mu_A - \mu_B$ هو:

$$(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - Z$$

بالتعويض نجد:

$$7 - 1$$

ملاحظة:

إنّ درجة الثقة التي حصلنا عليها سابقا تعتبر مقبولة عندما نسحب عينات من مجتمعات طبيعية، أما في حالة المجتمعات غير الموزعة توزيعا طبيعيا، نحصل على مجالات ثقة تقريبية وتكون مقبولة فيما إذا كان حجم العينتين كبير وهذا طبقا لنظرية النهاية المركزية.

2-2-2- عندما يكون تباين المجتمعين مجهولين $\left(\sigma_2^2 \text{ و } \sigma_1^2 \text{ مجهولين}\right)$

نستبدل تباين المجتمعين $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ بتباين العينتين $\mathbf{S_2^2}$ و $\mathbf{S_1^2}$. ويجب أيضا أن نميز بين حالتين:

2-2-2-1- عندما يكون $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ مجهولين وغير متساويين

- **إذا كان** $\mathbf{n_1}, \boldsymbol{n_2} \geq \mathbf{30}$: يكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين كالتالي:

$$(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - \boldsymbol{Z}_{1}$$

- **إذا كان** $\mathbf{n_1}, \boldsymbol{n_2} < 30$ **أو أحدهما صغير**: يكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين كالتالي:

$$(\bar{\mathbf{X}}$$

حيث:

مثال (2- 10):

من مجتمعين طبيعيين مستقلين بتباينين غير متساويين تمّ سحب عينة عشوائية حجمها **50** مشاهدة من المجتمع الأول بمتوسط يساوي **20** وتباين يساوي **25**، كما تم سحب عينة أخرى حجمها **60** مشاهدة من المجتمع الثاني بمتوسط يساوي **15** وتباين يساوي **18**. والمطلوب، عند مستوى ثقة **95%**:

1- أوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين.

الحل:

الحالة الأولى:

من معطيات المثال لدينا:

$$n_1 = 50$$

$$= 5$$

$$n_2 = 60 \qquad \bar{X}_2 = 15 \qquad S_2^2 = 18$$

حجم العينتين كبير وتباين المجتمعين مجهول، نستبدل تباين المجتمعين بتباين العينتين ويكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z$$

بالتعويض نجد:

$$5-1$$

الحالة الثانية عندما حجم العينة الأولى يساوي 28 والثانية 24

تصبح معطيات المثال (2- 10) كما يلي:

$n_1 = 28$

$= 5$

$n_2 = 24$ $\qquad \bar{X}_2 = 15$ $\qquad S_2^2 = 18$

حجم العينتين صغير وتباين المجتمعين مجهول، نستبدل تباين المجتمعين بتباين العينتين ويكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

بالتعويض نجد:

$$5-2$$

2-2-2-2- عندما يكون σ_2^2 و σ_1^2 مجهولين و متساويين

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ حيث μ_1 و σ_1^2 مجهولان، وكان $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ بحيث μ_2 و σ_2^2 مجهولان أيضا، وتم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من هذين المجتمعين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، في هذه الحالة نجد أن تباين المجتمع الأول وتباين المجتمع الثاني مجهولان

ومتساويان، وكل منهما يساوي σ^2، فقد استخدم نفس الرمز للتعبير عن σ_1^2 و σ_2^2 وهذا يعني أنهما متساويان. ونعلم مما سبق أن أفضل مقدر لتباين المجتمع هو تباين العينة المسحوبة منه، فأفضل مقدر لـ σ_1^2 و σ_2^2 هو S_1^2 و S_2^2 على التوالي، وبطبيعة الحال فإن المقدرين S_1^2 و S_2^2 مختلفان فالقيمة، وبما أن تباين المجتمع الأول يساوي تباين المجتمع الثاني فإنه من غير المنطق أن نقدّر معلمتين بتقديرين مختلفين، لذلك نقدّر التباينين بنفس المقدّر، وهو عبارة عن الوسط المرجّح لتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية، ويتم الترجيح بدرجة الحرية الخاصة بكل عينة، ويطلق على هذا المقدّر بالتباين المشترك ويرمز له بالرمز S_P^2، ويحسب كما يلي:

وباستبدال قيمة كل من σ_1^2 و σ_2^2 بـ S_P^2 في قيمة الإحصائية $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ نحصل على متغير عشوائي آخر يطلق عليه المتغير العشوائي T حيث :

T

وبالتالي يكون مجال الثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ في هذه الحالة هو:

$(\bar{X}$

ملاحظة:

إذا كان $n_1, n_2 \geq 30$، نستطيع استخدام مجال الثقة الأخير للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$، حتى وإن لم يتوفر شرط توزع المجتمعين توزيعا طبيعيا، وهذا طبقا لنظرية النهاية المركزية.

مثال (2- 11):

تمثل المعطيات أدناه أجور عينة من المهندسين المبتدئين في البناء والري، فإذا علمت أن أجور المهندسين في البناء والري في المجتمع ككل تتوزع توزيعا طبيعيا بتباينين متساويين وفقا لدراسات سابقة، فأوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

مهندس في البناء (10^3)	30,0	29,6	31,2	31,9	29,9	34,0	36,7
مهندس في الري (10^3)	32,7	33,3	32,4	30,2	29,6	34,4	

الحل:

بما أن الأجور تتوزع توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين لأنّ كل عينة خاصة بفئة معينة من المهندسين فإن مجال الثقة في هذه الحالة هو:

$(\bar{\mathbf{X}}$

ولحساب هذا المجال يجب حساب كل من: $\bar{\mathbf{X}}_1$، $\bar{\mathbf{X}}_2$، $\mathbf{S}_1^2$، $\mathbf{S}_2^2$، $\mathbf{S}_p^2$.

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \frac{\sum X_{1i}}{n_1} =$$

$$=$$

$$\mathbf{S}_1^2 = \frac{\sum(X_{1i} - \bar{\bar{X}}_1}{n_1 - 1}$$

$$= 3$$

$$\mathbf{S}_p^2 = \frac{(n_1 - 1)}{(n_1 -}$$

وحيث أن:

$\alpha = 0.05 \Rightarrow$

وبالتالي:

$(\bar{X}$

$-0.2 - 2.201\sqrt{5}$

3-2- التقدير بمجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين

نميز بين حالتين:

- **في حالة** $n \geq 30$:

تكون: $Z = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sqrt{S_D^2/n}}$ وبالتالي مجال الثقة هو:

$$\bar{D} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_D^2/n} \leq \mu_D \leq \bar{D} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_D^2/n}$$

- **في حالة** $n < 30$:

يكون:

ويكون مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق هو:

$\bar{D}$ –

مثال (2- 12):

تم قياس أوزان عينة مكونة من **10** أشخاص قبل وبعد امتناعهم عن الدهون والسكريات لمدة شهر فكانت النتائج كالتالي:

قبل الامتناع X_i	74	66	82	76	58	102	73	98	69	71
بعد الامتناع Y_i	69	62	79	71	54	97	68	92	63	67

والمطلوب: بافتراض أن المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا، أوجد مجال الثقة لفرق متوسطي الوزنين عند مستوى

الحل:

تكون الفروق ما بين قبل الامتناع عن أخذ الدهون والسكريات وبعد الامتناع عنها كما يلي:

قبل الامتناع X_i	74	66	82	76	58	102	73	98	69	71
بعد الامتناع Y_i	69	62	79	71	54	97	68	92	63	67
الفروق D_i	5	4	3	5	4	5	5	6	6	4

وتكون:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{\sum D_i}{n} = 4,7$$

$$S_D^2 = \frac{\sum(D_i - \mu_D)}{n-1}$$

وبذلك نحصل على:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} = \frac{\bar{D}}{\sqrt{}}$$

ومن جدول توزيع ستودنت:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} = t_{(0.97}$$

وعليه مجال الثقة المطلوب هو:

$$\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{S_D^2/}$$

$$4.7 - 2.262\sqrt{0.}$$

$$4.0214 \le \mu_D \le$$

2- 4- التقدير بمجال الثقة لنسبة المجتمع P

تكلمنا سابقا عند تعرضنا لتوزيعات المعاينة أنّ توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{\mathbf{P}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كان حجم العينة **n** كبيرا، وذلك بمتوسط حسابي $\mu_{\hat{P}} = P$ وتباين $\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{P.q}{n}$، وبالتالي تكون قيمة المتغير **Z** الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري هي:

وحيث أنّ نسبة المجتمع P مجهولة، وهي التي نريد تقديرها بمجال الثقة، فلا يمكن حساب التباين $\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{P.q}{n}$ وبالتالي سنقدره باستخدام أفضل مقدّر بالقيمة لنسبة المجتمع المجهولة P، وهو نسبة العينة $\hat{P}$، ومن خلاله يكون مقدّر التباين هو: $\hat{\sigma}_{\hat{P}}^2 = \frac{\widehat{P.q}}{n}$.

وتصبح قيمة المتغير Z هي:

ونعرّف مجال الثقة (فترة الثقة) للنسبة بأنها الفترة التي تحقق ما يلي:

وتكون فترة الثقة هي:

ملاحظة:

إذ كان السحب بدون إرجاع، بمعنى $\frac{n}{N} \geq 0,05$، يجب استعمال معامل التصحيح (معامل الإرجاع).

مثال (2- 13):

اخترنا عينة عشوائية مكونة من **800** مقهى في ولاية الجزائر، فوجدنا **760** مقهى تمتلك أجهزة تلفاز ذكية (Plasma). والمطلوب، قدّر نسبة المقاهي الذين يملكون أجهزة تلفاز ذكية في ولاية الجزائر باستخدام مستوى ثقة 90%.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$n = 800$$

إذن:

$$\alpha = 10\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} =$$

بالتعويض في مجال الثقة:

نجد:

$$0,95 - 1$$

$$0,95 - 1$$

2- 5- التقدير بمجال ثقة للفرق بين نسبتين

رأينا في توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين، أنه إذا سحبنا عينة كبيرة n_1 من مجتمع يخضع لتوزيع برنولي (ذي الحدين $(X_1 \sim b(1, P_1)$ وسحبنا عينة كبيرة أخرى n_2 من مجتمع آخر مستقل عن المجتمع الأول ويخضع لتوزيع برنولي (ذي الحدين $(X_2 \sim b(1, P_2)$ فإن الفرق بين النسبتين في العينتين $(\widehat{P_1} - \widehat{P_2})$ هو متغير عشوائي يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \mu_{\hat{P}_1} - \mu$$

وتباين

$$\sigma^2{}_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sigma^2{}_{\hat{P}_1} +$$

ومنه:

وحيث أنّ نسبة المجتمع الأول P_1 والثاني P_2 مجهولتين، والتي نريد تقديرهما بمجال الثقة، فلا يمكن حساب التباين $\sigma^2{}_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}$ وبالتالي سنقدره باستخدام: $\hat{\sigma}^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}$.

وتصبح قيمة المتغير Z هي:

وبالتالي مجال الثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 - P_2)$ يكون مساو إلى:

$$(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) - Z_{1-}$$

ملاحظة:

إذ كان السحب بدون إرجاع، بمعنى $\frac{n_1}{N_1} \geq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \geq 0,05$ يجب استعمال معامل التصحيح (معامل الإرجاع).

مثال (2- 14):

لمعالجة فيروس معين أصاب الدجاج، تم سحب عينتين من الدجاج المصاب به وطبِّقت عليهم طريقتين **A** و **B** للمعالجة، حيث العينة الأولى طبِّقت عليها الطريقة **A** والعينة الثانية طبقت عليها الطريقة **B**. فإذا كان حجم العينة الأولى **50** دجاجة مصابة، شفي منهم **36** دجاجة، وكان حجم العينة الثانية **60** دجاجة مصابة، شفي منها **33** دجاجة. المطلوب، عند مستوى معنوية **1%** أوجد مجال الثقة للفرق بين نسبتي الدجاج الذين تم شفاؤهم من هذا الفيروس.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$\boldsymbol{n_1 = 50}$$

$$\boldsymbol{n_2 = 60}$$

وحيث أنّ:

$$\boldsymbol{\alpha = 1}\% \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2}$$

ويكون مجال الثقة للفرق بين النسبتين $(\mathbf{P_1 - P_2})$ مساو إلى:

$$\left(\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_2\right) - \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-}}$$

بالتعويض نجد:

$$0{,}17$$