الفصل الثاني- نظرية التقدير – المحاضرة 2

ثانيا: التقدير بمجالات الثقة

رأينا سابقا أنه إذا قدرت معلمة المجتمع بقيمة واحدة فهذا يسمى بتقدير المعلمة بنقطة واحدة، وهذا التقدير قد يكون قريبا جدا من المعلومة المجهولة، ولكن غالبا لا يطابق القيمة الفعلية لهذه المعلمة وبذلك إذا انتهت عملية التقدير عند هذا الحدّ فإننا لا نعلم مدى دقة التقدير أو مدى بعده من القيمة الحقيقية المجهولة. أما إذا حاولنا تقدير معلمة المجتمع محل الدراسة بقيمتين بحيث يمكن اعتبار أنّ المعلمة تقع بينهما فإننا نحصل على ما يسمى بالتقدير بمجال أو فترة ثقة لهذه المعلمة وذلك كما يلي:

بحيث:

المجال $(\hat{\theta}_L , \hat{\theta}_U)$ يسمى بمجال الثقة أو فترة الثقة للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$.

$\hat{\theta}_L$ و $\hat{\theta}_U$: هما على التوالي الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة، ونعتمد في حسابهما على بيانات العينة، فنعتمد على الإحصائية المستخدمة كأفضل مقدر بالقيمة للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$، وعلى توزيع المعاينة لهذا المقدر وعلى خطئه المعياري، وعلى حجم العينة، وعلى معامل الثقة المرغوب فيه $(\mathbf{1-\alpha})$.

وحيث أن معامل الثقة محصور بين الصفر والواحد، أي: $\mathbf{0} < 1-\alpha < 1$ فإن ذلك يعني:

وعند التعبير عن معامل الثقة $(\mathbf{1} -)$ بنسب مئوية، أي $\mathbf{100\%}\ (\mathbf{1-\alpha})$ يطلق على معامل الثقة في هذه الحالة بمستوى الثقة.

ملاحظة:

القيم الأكثر شيوعا لمستوى المعنوية أو مستوى الدلالة α هي **1%**، **5%** و**10%**. والاختيار في ما بين هذه القيم يكون على حسب نوعية الظاهرة المدروسة. ففي ميدان الطب مثلا أو الفيزياء

أو الكيمياء، نختار α تساوي **1%** أو أقل من ذلك. وفي الاقتصاد نختار **1%** أو **5%** أو **10%**، وفي الظواهر الاجتماعية يمكن أن نختار **5%** أو **10%**، والسبب في ذلك أنه في حالة حدوث خطأ في اتخاذ القرار يمكن تصحيحه بمرور الوقت عكس الظواهر التي لا تتطلب ذلك كما هو الحال في ميدان الطب والكيمياء.

2-1- مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ

2-1-1- عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما

توصلنا سابقا من خلال **نظرية النهاية المركزية** (الفصل الأول، النظرية 1.10) أنه إذا سحبت عينة حجمها n من مجتمع إحصائي متوسطه μ وتباينه σ^2 بحيث $n \geq 30$ فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع يكون توزيع المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ هو بالتقريب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

رأينا أيضا أنه عندما يكون مجتمع موزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 معلوم أي: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإنه وبغض النظر عن حجم العينة n التي تسحب من هذا المجتمع، سوف يكون توزيع المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ هو الآخر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$، وفي هذه الحالات المذكورة نستطيع تحويل $\bar{X}$ إلى المتغيرة المعيارية $\mathbf{Z}$ كما يلي :

ومن خلال هذه المتغيرة المعيارية، نعرّف فترة الثقة بأنها الفترة التي تحقق:

وبإجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة بين القوسين، بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوي على المعلمة المجهولة فقط، ويتم ذلك بضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في $\sqrt{\sigma^2/n}$ نحصل على ما يلي:

$$P\Big($$

وعند طرح ¯ من الأطراف الثلاثة للمتباينة نحصل على :

$$P\Big(-\bar{X}$$

ثم بضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في (1-) نحصل على:

$$P\Big($$

نقوم بترتيب المتباينة بوضع الحد الأصغر ناحية اليسار والأكبر ناحية اليمين نحصل على ما يلي:

$$P\Big($$

وتعني هذه العلاقة الأخيرة أنّ احتمال وقوع متوسط المجتمع **μ** (المجهول) بين القيمتين:

$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{{}^{2}/n}\right)$ و $\left(\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}\right)$ يساوي إلى $(1-\alpha)$.

ملاحظات:

- يسمى المقدار $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{{}^{2}/_{n}}$ بحد الخطأ ويرمز له عادة بالرمز ϵ ، وهو يعبّر عن أنّ متوسط العينة $\bar{X}$ يختلف عن متوسط المجتمع μ بمقدار $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مضروبا في الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{{\sigma^2}/_{n}}$.
- في الحالة التي يكون فيها السحب بدون إرجاع $(\frac{n}{N} \geq 0.05)$، ندخل معامل التصحيح $(\frac{N-n}{N-1})$ في حساب تباين العينة.
- إذا أردنا تعيين حجم العينة التي ينبغي أخذها بحيث لا يتجاوز الخطأ في تقديرنا لـ μ بـ المقدار ϵ والذي يتم تحديده مسبقا من طرف الباحث، نقوم بحل المتباينة $\epsilon \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{{\sigma^2}/_{n}}$ كما يلي:

$$\epsilon \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{{\sigma^2}/_{n}} \Rightarrow \epsilon^2 \geq \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{{\sigma^2}/_{n}}\right)^2 \Rightarrow \epsilon^2 \geq (Z_{1-\frac{\alpha}{2}})^2 \cdot {\sigma^2}/_{n} \Rightarrow n \geq (Z_{1-\frac{\alpha}{2}})^2 \cdot {\sigma^2}/_{\epsilon^2}.$$

وإذا كان تباين المجتمع مجهول نستبدله بتباين العينة.

مثال (2- 6):

من مجتمع طبيعي التوزيع تباينه يساوي **16**، تم سحب عينة عشوائية حجمها يساوي **64** ومتوسطها يساوي **10**.
والمطلوب عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$$\sigma^2 = 16$$

وبما أنّ حجم العينة $n = 64 > 30$ وتباين المجتمع الطبيعي معلوم فإننا سوف نستخدم التوزيع الطبيعي في إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

وحيث:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} =$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد $Z_{0.975} = 1.96$

ويكون مجال الثقة لـ μ هو:

1

ومنه باحتمال **95%** سوف يقع متوسط المجتمع μ بين القيمتين **9.02** و**10.98**.

2-1-2- عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا

في هذه الحالة نهتم بحجم العينة إن كان كبيرا ($n \geq 3$) أو صغيرا ($n < 30$).

- **إذا كان حجم العينة كبيرا** ($n \geq 30$):

نستبدل تباين المجتمع بتباين العينة، ويبقى التوزيع توزيع طبيعي. وبذلك يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

- **إذا كان حجم العينة صغيرا** ($n < 30$):

نستبدل تباين المجتمع بتباين العينة، والتوزيع هو توزيع ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$. وبذلك يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$\bar{X}$

مثال (2- 7): (تباين المجتمع مجهول وحجم العينة كبير)

من مجتمع طبيعي التوزيع بتباين مجهول، تم سحب عينة حجمها **49** بمتوسط يساوي **15** وتباين يساوي **25**.
والمطلوب، عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$\sigma^2 = ?$

$= 2$

وبما أنّ تباين المجتمع الطبيعي مجهول وحجم العينة $n = 49 > 30$ فإننا سوف نستبدل تباين المجتمع بتباين العينة ونستخدم التوزيع الطبيعي في إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

وحيث أنّ:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} =$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد $Z_{0.975} = 1.96$

ويكون مجال الثقة لـ μ هو:

مثال (2- 8): (تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير)

من مجتمع طبيعي التوزيع بتباين مجهول، تم سحب عينة حجمها **25** بمتوسط يساوي **20** وتباين يساوي **36**.

والمطلوب، عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$$\sigma^2 = ?$$

$$= 3$$

وبما أنّ تباين المجتمع الطبيعي مجهول وحجم العينة $n = 25 < 30$ فإننا سوف نستبدل تباين المجتمع بتباين العينة ونستخدم توزيع ستودنت في إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

وحيث أنّ:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} =$$

من جدول توزيع ستودنت نجد $t_{(0.975,24)} = 2.064$

ويكون مجال الثقة لـ μ هو :

$$\bar{X}$$

$$2$$