# الفصل الثاني: نظرية التقدير – محاضرة 1

تتم عملية التقدير الاحصائي بطريقتين:

- **التقدير النقطي (Estimation Ponctuelle).**
- **التقدير بمجال ثقة (Estimation par L'intervalle de Confiance).**

وفي ما يلي عرض لهذين الطريقتين بشيء من التفصيل.

**أولا: التقدير النقطي**

رأينا في الفصل الأول أنّ إحصائيات العينة تستخدم كتقدير لمعالم المجتمع، فمثلا في عينة واحدة نجد متوسط العينة $\bar{X}$ المحسوب من عينة حجمها $n$ هو تقدير لمتوسط المجتمع $\mu$، وتباين العينة $S^2$ هو تقدير لتباين المجتمع $\sigma^2$، نسبة العينة $\hat{P}$ حيث $\hat{P}=\frac{x}{n}$ هو تقدير لنسبة المجتمع $P$ في توزيع برنولي. وفي حالة عينتين نجد الفرق بين متوسطي عينتين هو تقدير للفرق بين متوسطي المجتمعين، والفرق بين تبايني عينتين هو تقدير للفرق بين تبايني مجتمعين ...وهكذا. وبالتالي فإن قيمة "إحصائية العينة" المتخذة كتقريب لمعلمة المجتمع تسمى بـ "التقدير النقطي". وعلى العموم يرمز للمقدر النقطي بالرمز $\hat{\theta}$.

في مايلي بعض المفاهيم العامة حول التقدير النقطي والخصائص المرغوبة حتى يكون المقدِّر مقدرا جيدا.

**تعريف (2- 1):**

المقدِّر (Estimateur) عبارة عن إحصائية (Statistique)، بينما التقدير (Estimation) عبارة عن قيمة (valeur) المقدِّر (الإحصائية).

**مثال (2- 1):**

$\bar{X}$ عبارة عن **مقدِّر** لـ $\mu$، بينما $\bar{}$ عبارة عن **تقدير** لـ $\mu$.

تجدر الإشارة إلى أنه علينا ألاّ نتوقع من المقدِّر أن يعطينا معالم المجتمع بدون أخطاء. فمثلا $\bar{x}$ لا يقدر لنا $\mu$ بشكل دقيق لكننا نأمل ألاّ تختلف هذه التقديرات كثيرا عن القيم الحقيقية. فمن أجل بعض العينات الخاصة يمكننا الحصول على تقدير أفضل لـ $\mu$ باستخدام الوسيط $\tilde{x}$ كمقدر.

**مثال (2- 2):**

من مجتمع متوسطه $\mu$ غير معلوم، تم سحب عينة حجمها 3 مكونة من العناصر: **13**، **7**، **4**. فإذا استخدمنا تقديرا لـ $\mu$ المتوسط $\bar{x}=8$ مستخدمين متوسط العينة كمقدِّر أو $\tilde{x}=7$ مستخدمين الوسيط كمقدِّر نجد أنّ $\tilde{x}$ تعطينا تقديرا أفضل لـ $\mu$، ولكن علينا أن نأخذ القرار مسبقا ما إذا كنّا سنستخدم المقدر $\bar{x}$ أو $\tilde{x}$ إذا كان $\mu$

## خواص المقدِّر الجيد

نقول عن المقدر (Estimateur) أنه مقدر جيد وفعال إذا حقق الشروط التالية:

### 1- عدم التحيز (non biaisé)

يعتبر المقدر غير متحيز إذا حقق الشرط التالي: $E(\hat{\ }) = \theta$

**مثال (2- 3):**

المقدر $\bar{\ }$ مقدر غير متحيز لمتوسط مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $\mu$، وأيضا المقدر $\hat{S}^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ غير متحيز لـ $\sigma^2$.

**البرهان:**

المقدر $\bar{\ }$ مقدر غير متحيز لمتوسط مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $\mu$، وأيضا المقدر $\hat{S}^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ غير متحيز لـ $\sigma^2$ لأنّ:

- $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{(\mu+\mu+\cdots+\mu)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$
- $E(\hat{S}^2) = E\left(\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E(\sum[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2)$

$$= \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum(X_i - \mu) + \sum(\bar{X} - \mu)^2)$$
$$= \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2)$$
$$= \frac{1}{n-1}(\sum E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2)$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{(n-1)\,\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن $\hat{S} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$ مقدر متحيز لـ $\sigma^2$، بحيث:

$$E(\hat{S}^2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$$

### 2- الاتساق (Cohérence)

يكون المقدر $\hat{\theta}$ مقدرا متسقا (متماسكا) للمعلمة $\theta$ إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0 \qquad , \quad E(\hat{\theta}) = \theta$$

فمثلا المتوسط الحسابي للعينة $\bar{}$ هو مقدر متسق للوسط الحسابي للمجتمع $\mu$، وذلك لأن تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة يساوي $\frac{\sigma^2}{n}$ وهذا المقدار كلما زاد حجم العينة $n$ قلّت قيمته.

**مثال (2- 4):**

من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا حجمه يساوي **3000**، بتباين يساوي **9**، تم سحب عينة عشوائية من هذا المجتمع. والمطلوب، أحسب تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في الحالات التالية:

- حجم العينة يساوي **50**.
- حجم العينة يساوي **100**.
- حجم العينة يساوي **150**.

**الحل:**

من دون استخدام معامل التصحيح في الحالات الثلاث، لأن في كل حالة $\frac{n}{N} < 0,05$.

ويكون تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي عندما $n = 50$ هو:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{50} = 0.18$$

ويكون تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي عندما $n = 100$ هو:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{100} = 0.09$$

بينما يكون تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي عندما $n = 150$ هو:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{150} = 0.06$$

وبالتالي نلاحظ أنه كلما زاد حجم العينة $n$ انخفضت قيمة تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\frac{2}{\bar{X}}$ واقتربت من الصفر. وبذلك $\bar{X}$ هو مقدر متسق لمتوسط المجتمع $\mu$.

**3- الكفاءة (Efficacité)**

يكون المقدر $\hat{\theta}$ مقدرا كفؤا (فعالا) إذا كان له أصغر تباين من بين المقدرات الأخرى للمعلمة $\theta$.

**مثال (2- 5):**

إذا كان المقدران $\widehat{\theta}$ و $\widehat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة المجهولة $\theta$، أي أنّ:

$$E(\widehat{\theta}_1) = \theta \qquad , \qquad E(\widehat{\theta}_2) = \theta$$

وكان توزيع المعاينة للمقدر $\widehat{\theta}$ أقل من تباين توزيع المعاينة للمقدر $\widehat{\theta}_2$، أي أنّ:

$$\sigma^2_{\widehat{\theta}_1} < \sigma^2_{\widehat{\theta}_2}$$

فالمقدر بالقيمة $\widehat{\theta}$ يكون مقدرا أكثر كفاءة من $\widehat{\theta}_2$ ويسمى مقدر كفء. ذلك لأننا عندما نقدر المعلمة المجهولة نختار عينة عشوائية واحدة ونحسب منها $\widehat{\theta}_1$ أو $\widehat{\theta}_2$، فعندما يكون تباين توزيع المعاينة للإحصائية $\widehat{\theta}_1$ أقل من تباين توزيع المعاينة للإحصائية $\widehat{\theta}_2$، نكون أكثر ثقة في المقدر $\widehat{\theta}_1$ من المقدر $\widehat{\theta}_2$، لأن قيم $\widehat{\theta}_1$ ستكون أقرب لوسطها الحسابي وهو المعلمة المجهولة $\theta$.

**ملاحظة:**

عادة ما تستخدم النسبة $\frac{\sigma^2_{\widehat{\theta}}}{\sigma^2_{\widehat{\theta}_2}}$ كمقياس لتحديد أي من المقدرين الأكفأ، فإذا كانت هذه النسبة أقل من الواحد صحيح فإنّ $\widehat{\theta}_1$ هو المقدر الأكفأ، أما إذا كانت النسبة اكبر من الواحد الصحيح فإن $\widehat{\theta}_2$ هو المقدّر الأكفأ.

**4- الكفاية (Suffisance)**

يكون المقدر ^ مقدرا كافيا للمعلمة المجهولة $\theta$ إذا استخدمت جميع البيانات الموجودة في العينة والخاصة بحساب المعلمة المراد تقديرها. وإذا كان هناك مقدر كاف فلا يكون مجديا استخدام أي مقدر آخر أقل كفاية، فالمقدر الكاف يستخدم كل المعلومات الموجودة في العينة والخاصة بتقدير المعلمة. فالمتوسط الحسابي $\bar{X}$ مقدر كاف للمعلمة $\mu$ لأنه يستخدم في حسابه نفس المعلومات التي تستخدمها المعلمة $\mu$. فلحساب $\mu$ نجمع جميع القيم ونقسم على عددها. ونقوم بنفس الشيء في العينة لحساب $\bar{X}$. بينما الوسيط (Médiane) فلا يعتبر مقدر كاف للمعلمة $\mu$، فلحساب الوسيط نقوم أولا بترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا، ثم نوجد القيمة الوسطى، ولا نستخدم جميع القيم كما يحدث عند حساب $\mu$. كذلك تعتبر النسبة $\widehat{P}$ مقدر كاف للمعلمة $P$ لأننا نستخدم في حسابها جميع المعلومات التي نستخدمها في حساب النسبة في المجتمع $P$، فلحساب النسبة $P$ في المجتمع نقسم عدد المفردات التي لها نفس الصفة على عدد المفردات الكلية، ونقوم بنفس الشيء في العينة لحساب النسبة $\widehat{P}$.