Solution série 5 :

Exo 1 :

1/ On a : $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$.

Donc f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2/ On a : $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^0 = 1.$$

Autrement dit f est prolongeable par continuité en 0,

par $f(0) = 1$.

3/ $f'(x) = \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x \ln(x)} = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a : $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et le graphe de f admet une demi-tangente verticale en 0.

4/ Le signe de la dérivée est le même que celui de $\ln(x) + 1$.

$\ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$0 < x < \frac{1}{e} \Rightarrow \ln(x) < \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \Rightarrow \ln(x) + 1 < 0$.

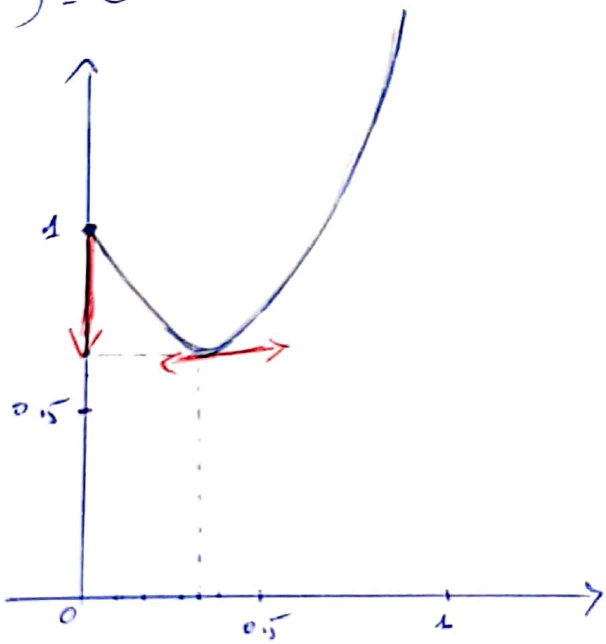
De même ; $x > \frac{1}{e} \Rightarrow \ln(x)+1 > 0$.

Donc f est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$ et croissante sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

Clairement : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5/ Le graphe :

On a : $f(\frac{1}{e}) = f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}} \simeq 0.692$, et $f(0)=1$.



Exo 2 :

1/ On a, en développant :

$$ch(a)\,ch(b) = \frac{1}{4}\left(e^{a}+e^{-a}\right)\left(e^{b}+e^{-b}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{a+b}+e^{-(a+b)}+e^{a-b}+e^{-(a-b)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(ch(a+b)+ch(a-b)\right).$$

On a : $$\frac{1-\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1-\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}$$

$$= \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \cos^2(t)-\sin^2(t) = \cos(2t).$$

EXO 3 :

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = a \iff \operatorname{ch}(x) = e^a$$

$$\iff \frac{e^x+e^{-x}}{2} = e^a \iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2e^a.$$

On pose : $X = e^x$, donc :

$$X + \frac{1}{X} = 2e^a \iff X^2 + 1 = 2Xe^a.$$

$$\iff X^2 - 2Xe^a + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 4e^{2a} - 4 = 4(e^{2a}-1) > 0.$$

Les racines sont :

$$X_1 = \frac{2e^a - 2\sqrt{e^{2a}-1}}{2} = e^a - \sqrt{e^{2a}-1} \quad \text{et} \quad X_2 = e^a + \sqrt{e^{2a}-1}$$

On notera que $e^{2a} > e^{2a}-1$ et que donc $e^a > \sqrt{e^{2a}-1}$, ce qui montre que $X_1 > 0$, pour X_2 c'est évident.

Donc les solutions de $\ln(\operatorname{ch}(x)) = a$ sont :

$$x_1 = \ln\left(e^a - \sqrt{e^{2a}-1}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \ln\left(e^a + \sqrt{e^{2a}-1}\right).$$

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right)$

On a : $e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right) = e^{-x}\left[\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^3\right].$

$$= \frac{e^{-x}}{8}\left[e^{3x} + 3e^{x} + 3e^{-x} + e^{-3x} - \left(e^{3x} - 3e^{x} + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{8}\left(6e^{x} + 2e^{-3x}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x} = \frac{3}{4}.$

2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln\left(ch(x)\right).$

On a : $x - \ln\left(ch(x)\right) = x - \ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$

$$= x - \ln\left(e^{x} \cdot \frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$

$$= x - \ln(e^{x}) - \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln\left(ch(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}.$

Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln\left(ch(x)\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

#—