الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

رقم المطبوعة:........../2021

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية، طور ليسانس، شعبة: علوم التسيير

من إعداد الدكتور: ريغي هشام

الرتبة: أستاذ محاضر قسم –أ-

السنة الجامعية 2021/2020

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

رقم المطبوعة:........../2021

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية، طور ليسانس، شعبة: علوم التسيير

من إعداد الدكتور: ريغي هشام

الرتبة: أستاذ محاضر قسم –أ-

السنة الجامعية 2021/2020

فهرس المحتويات

الفصل الثاني: مشاكل النقل

الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود

مقدمة:

تواجه المؤسسات الاقتصادية خلال أداء أنشطتها اليومية عدة مشاكل تؤثر على مختلف مؤشرات الأداء فيها مثل حجم الإنتاج، التكاليف والأرباح. ومن أجل معالجة مثل هذه المشاكل يلجأ متخذوا القرار في هذه المؤسسات لإستخدام العديد من التقنيات. وتتضمن مادة رياضيات المؤسسة مجموعة من هذه التقنيات والتي تساعد على حل المشاكل وإتخاذ القرارات الصحيحة في المؤسسة.

ولقد تم تناول عدد من التقنيات التي تتضمنها مادة رياضيات المؤسسة تحت شكل مطبوعة بيداغوجية وفقاً للبرنامج الرسمي المعتمد لطلبة السنة الثانية –شعبة علوم التسيير–. ومن أجل إثراء هذا الموضوع حاولنا قدر الإمكان الإجابة على تساؤلات يُمكن أن تتبادر إلى ذهن أي طالب علم باحث في مواضيع رياضيات المؤسسة. وبالإضافة لمحاولتنا التفصيل قدر الإمكان في مختلف المواضيع التي تناولها هذا العمل العلمي، فلقد دعمناها بالعديد من الأمثلة من أجل فهم أكبر لما تم تناوله، وتم ترقيم مختلف الأمثلة في كل فصل بشكل تسلسلي لتسهيل عملية الإشارة إليها عند الضرورة.

وبالرغم من كون هذه المطبوعة البيداغوجية موجهة أساساً لطلبة السنة الثانية –شعبة علوم التسيير–، إلّا أنّها تمثل مرجعاً مهماً لأي مهتم بالمواضيع التي تتضمنها.

ونظراً لشساعة المواضيع التي تتضمنها مادة رياضيات المؤسسة (وفقاً للبرنامج الرسمي)، وبالرغم من محاولتنا قدر الإمكان الإلمام بمختلف تفاصيل هذه المواضيع، إلّا أنّه من الصعب الإلمام بجميع التفاصيل. وهنا تجدر الإشارة إلى أنّنا لم نتطرق للعديد من جوانب وتفاصيل موضوع البرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود الذي يعالجه الفصل الثالث لكون ما هو مطلوب في البرنامج الرسمي هو مدخل فقط للموضوع، وعلى كل باحث يريد الإلمام بهذا الموضوع التوجه إلى مراجع أخرى.

وبما أن هذا العمل العلمي المتواضع عمل بشري، فقد يتضمن أخطاء أو هفوات غير متعمدة.

وفي الأخير أرجو أن أكون قد وُفّقت في إعداد هذا العمل العلمي المتواضع، وما توفيقي إلّا بالله العزيز الحكيم.

الفصل الأول:

البرمجة الخطية

1- مفهوم البرمجة الخطية:

تُعرّف البرمجة الخطية بأنها "أسلوب يتضمن إستخدام الرياضيات العالية لتقديم الحلول لأنواع معينة من المشاكل، وخاصة مشاكل الإنتاج."

وتُعرّف أيضاً بأنها "أسلوب رياضي يستخدم لمساعدة المدراء في التخطيط واتخاذ القرارات الإيجابية بصدد توزيع الموارد البشرية والمادية المحدودة بين أفضل الاستخدامات المتاحة، بهدف تحقيق أكبر عائد مادي ممكن Maximization أو تحقيق أقل تكلفة ممكنة Minimization ضمن مجموعة من القيود (المعيقات) والعوامل الثابتة، بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة."

ويُقصد بكلمة خطية أن العلاقات المعمول بها تشبه العلاقات المتمثلة بالخطوط المستقيمة، أما كلمة برمجة فيُقصد بها التخطيط المنتظم systematic planing أو عملية اتخاذ القرار.

وأسلوب البرمجة الخطية بدأ استخدامه سنة 1947 من قبل الرياضي جورج. ب. دانتزنيك بهدف تنظيم الأنشطة المعقدة للقوة الجوية في الولايات المتحدة.

وهناك بعض الإنتقادات التي توجه إلى أسلوب البرمجة الخطية في التحليل ولعل أهمها:

- يفترض هذا الأسلوب في التحليل أن كل العوامل أو العلاقات بين المتغيرات معروفة ومؤكدة الحدوث، بمعنى أنه لا يوجد عنصر أو عناصر مشكوك في حدوثها أو غير متأكد منها، أو بعبارة أخرى فإنه لا يأخذ في الاعتبار عناصر عدم التأكد التي تميّز الحياة التجارية والصناعية في الوقت الحاضر؛
- لا يأخذ هذا الأسلوب في التحليل أي اعتبار للعوامل التي لا يمكن إعطائها قيمة كمية والتي قد تؤثر بدرجة كبيرة على اتخاذ القرارات؛
- يتطلب التحليل كمية من المعلومات التي قد لا يكون من السهل الحصول عليها في الظروف العادية في المنشآت الصغيرة والمتوسطة الحجم؛
- الفرض الأساسي الذي يتضمنه هذا التحليل هو الخطية التي قد لا تتماشى مع الواقع، ذلك لأن معظم العلاقات في الحياة العملية علاقات غير خطية، ولابد في مثل هذه الحالات من استخدام أسلوب البرمجة غير الخطية؛
- يتطلب هذا التحليل ضرورة استخدام الحاسب الإلكتروني للمساعدة في حل المشاكل الكبيرة والمعقدة التي يحتاج حلها يدوياً إلى وقت طويل.

وبالرغم من جميع هذه الإنتقادات، إلا أن أسلوب البرمجة الخطية يُعتبر من الأساليب المهمة في التحليل الإقتصادي حيث يساعد على إتخاذ القرارات الإدارية السليمة ويوفر الموارد الإقتصادية المتاحة ويستخدمها على أفضل وجه في ضوء الهدف المراد تحقيقه.

2- البرنامج الخطي:

2-1- مفهوم البرنامج الخطي:

هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين تهدف للبحث عن أمثلية الإستخدام عن طريق دالة رياضية تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أي أن قيمة أس المتغيرات هي

واحد، في وجود مجموعة من القيود تكون في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى أيضا.

والمقصود بكلمة "الأمثلية" هو الوصول إلى أعظم قيمة أو أدنى قيمة للدالة الاقتصادية حسب الحالة، في وجود مجموعة من القيود، أما كلمة "خطي" فتعني أن المتغيرات التي تتكون منها دالة الهدف والقيود هي متغيرات من الدرجة الأولى.

2-2- مكونات البرنامج الخطي:

يتكون البرنامج الخطي من ثلاثة مكونات هي:

دالة الهدف: تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية، وهي تعبّر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه، إما التعظيم (الإنتاج، الأرباح، ...)، أو التقليل (التكاليف، الخسائر،...)، وتكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

القيود: هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن توجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الإعتبار. ويتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

شرط عدم السالبية: ويعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر، لكونها ترتبط بكميات مادية، والكميات المادية لا يمكن أن تساوي قيم سالبة. وفي حالات إستثنائية أين لا يشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل.

2-3- كتابة البرنامج الخطي:

يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\text{Max (Min) } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0,\dots, x_n\geq 0 \end{cases}$$

حيث:

S/C: ترمز إلى:**s**ous **c**ontraintes، أي تحت القيود، وتشير إلى الوصول إلى أعظم قيمة لدالة الهدف أو إلى أدنى قيمة لها في حدود الطاقات المتاحة المعبّر عنها بمعادلات أو متباينات (القيود).

Max: هي إختصار لكلمة Maximisation، أي التعظيم، ومفادها جعل الدالة Z عند أعظم قيمة لها.

Min: هي إختصار لكلمة Minimisation، أي التقليل، ومفادها جعل الدالة Z عند أدنى قيمة لها.

$X_1, X_2, \dots, X_n$: هي متغيرات البرنامج الخطي والمطلوب إيجاد قيمها عند حل البرنامج. ويُشترط في هذه المتغيرات أن تكون قيمها غير سالبة كما يدل عليه السطر الأخير من البرنامج الخطي.

$c_1, c_2, \dots, c_n$: معاملات دالة الهدف أو الدالة الإقتصادية، ويُمكن لهذه المعاملات أن تأخذ أية قيمة.

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$: معاملات القيود. ويُمكن أن تأخذ هذه المعاملات أية قيمة.

$b_1, b_2, \dots, b_m$: شعاع الثوابت، ويُشترط أن تكون قيمه موجبة.

2-4- صيغ البرامج الخطية:

هناك ثلاثة صيغ للبرامج الخطية:

أ- الصيغة القانونية: هناك نوعان حسب حالة داله الهدف:

حالة التعظيم: في هذه الحالة يكون البرنامج الخطي في صيغته القانونية عندما تكون:

- دالة الهدف في حالة التعظيم؛
- التشكيلة الخطية لكافة القيود في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- كل المتغيرات غير سالبة.

حالة التقليل: في هذه الحالة يكون البرنامج الخطي في صيغته القانونية عندما تكون:

- دالة الهدف في حالة التقليل؛
- التشكيلة الخطية لكافة القيود في حالة أكبر أو يساوي عددا ثابتا موجبا؛
- كل المتغيرات غير سالبة.

ب- الصيغة المختلطة: وهي الحالة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في حالة التقليل وتكون القيود مختلطة حيث تحتوي على متراجحات "أكبر من أو يساوي" و "أقل من أو يساوي" و معادلات أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

ج- الصيغة النموذجية: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في حالة التقليل، وجميع القيود عبارة عن معادلات، وجميع المتغيرات غير سالبة.

2-5- بناء (صياغة) البرامج الخطية:

ويُقصد ببناء أو صياغة البرنامج الخطي تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية إلى مسألة مصاغة في قالب أو نموذج رياضي واضح يُعبّر عن جميع العلاقات الإقتصادية والإدارية للمشكلة. ويتكون النموذج الرياضي من عدد من المتغيرات ودالة هدف تكون إما في حالة التعظيم أو التقليل، وعدد من القيود تكون إما في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا.

ولكتابة البرنامج الخطي ينبغي أولاً تحديد المتغيرات، ثم نقوم بإعداد جدول مساعد يحتوي على جميع عناصر المسألة من المتغيرات، القيود، قيم الثوابت والأرباح أو التكاليف الوحدوية. وسنحاول توضيح بعض هذه الجوانب وغيرها في كتابة البرامج الخطية من خلال المثالين 1 و2.

<u>مثال 1:</u>

تقوم إحدى المؤسسات بإنتاج أبواب ونوافذ المنازل، حيث تستعمل في إنتاجهما نوعين من عوامل الإنتاج: ساعات العمل ورأس المال. يتطلب إنتاج باب واحد ساعة عمل واحدة ووحدتين من رأس المال، في حين أن إنتاج نافذة واحدة يتطلب 3 ساعات عمل ووحدتين من رأس المال.

وتتوفر المؤسسة كحد أقصى على 7 ساعات عمل و9 وحدات من رأس المال.

وتحقق المؤسسة من إنتاج وبيع وحدة واحدة من كل من الأبواب والنوافذ 5 وحدات نقدية و7 وحدات نقدية على التوالي.

<u>المطلوب:</u> أكتب البرنامج الخطي الذي يُعظم ربح المؤسسة؟

<u>الحل:</u>

تحديد المتغيرات (المجاهيل): تتضمن المسألة نوعين من المنتجات: الأبواب والنوافذ، ونوعين من عوامل الإنتاج: ساعات العمل ورأس المال. ولتحديد أي الأنواع يتم إعتبارها متغيرات ننظر إلى معلومية مقادير كل نوع في المسألة، فما لم يتم تحديد مقدار له يتم إعتباره المتغير. ونلاحظ أن المسألة توفر معطيات حول مقادير عوامل الإنتاج، لكنها لا توفر معطيات حول مقادير المنتجات وبالتالي يتم إعتبار هذه الأخيرة متغيرات، وبما أنه لدينا نوعين من المنتجات: الأبواب والنوافذ، إذاً نرمز للأبواب بـ X_1 وللنوافذ بـ X_2.

ويتم إعداد الجدول المساعد لكتابة البرنامج الخطي كما يلي:

المنتجات / عوامل الإنتاج	المقادير من عوامل الإنتاج لإنتاج وحدة واحدة من		المقادير القصوى
	الأبواب (X_1)	النوافذ (X_2)	
ساعات العمل	1	2	7 ساعات عمل
رأس المال	3	2	9 وحدات
الربح الوحدوي	5	7	

ومن خلال الجدول يُمكن كتابة البرنامج الخطي كما يلي:

دالة الهدف: تهدف المؤسسة وفقاً لمعطيات المسألة لتعظيم أرباحها من وراء إنتاج وبيع الأبواب والنوافذ، حيث يبلغ الربح من إنتاج وبيع وحدة واحدة من الأبواب 5 وحدات نقدية، والربح المتحقق من إنتاج وبيع وحدة واحدة من النوافذ يبلغ 7 وحدات نقدية، وبالتالي تُكتب دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 7X_2$$

القيود: حددنا سابقاً متغيرات البرنامج الخطي والتي تعبّر عن المنتجات نظراً لمجهولية مقاديرها في المسألة، أما بالنسبة لعوامل الإنتاج المعلومة مقاديرها فيتم إعتبارها قيودا وبالتالي فإن البرنامج الخطي يتضمن قيدين: قيد ساعات العمل وقيد رأس المال. ويتم كتابة الطرف الأيسر لكل قيد من خلال ضرب القيم (المعاملات) الموجودة في سطر كل عامل إنتاج في المتغيرة المقابلة لها في الجدول. أما الطرف الأيمن من كل قيد فيتضمن المقدار المتاح من عامل الإنتاج. وبما أن المقادير من كل عامل إنتاج هي مقادير قصوى وبالتالي لا يُمكن إستخدام كميات أكبر، فإن الإشارة "أكبر من يساوي" مرفوضة. وهو نفس الحال مع الإشارة "يساوي"، حيث أن المؤسسة يُمكن أن تصل إلى أعظم قيمة لدالة الهدف باستخدام كميات أقل من المتاح من عوامل الإنتاج، وبالتالي فإن إشارة القيد الصحيحة هي "أقل من أو يساوي".

شرط عدم السالبية: بما أن الأبواب والنوافذ هي كميات مادية فلا يُمكن لها أن تأخذ قيم سالبة، بمعنى لا يُمكن القول بأن المؤسسة قامت بإنتاج ناقص خمسة أبواب أو نوافذ.

وفي الأخير، يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\text{Max } Z = 5x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1+2x_2 \le 7 \\ 3x_1+2x_2 \le 9 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

ويُمكن تفسير العلاقات الخطية التي ظهرت في كل من دالة الهدف ومتباينات القيود إقتصادياً كما يلي:

دالة الهدف: العلاقة الخطية في دالة الهدف تفترض أن الربح يتزايد كلما زاد حجم المبيعات من الأبواب والنوافذ، أو أن المؤسسة يُمكنها إنتاج أية كمية وبيعها بنفس السعر الذي تُباع به الوحدة الواحدة من الأبواب والنوافذ.

متباينات القيود: وتعني الخطية فيها أن ما يتم إستخدامه من عوامل الإنتاج لإنتاج وحدة واحدة من الأبواب أو النوافذ ثابت، سواء زاد حجم الإنتاج أم قل وهو ما يعني عدم إحتمال تحقيق وفورات في حالة الإنتاج الكبير.

<u>مثال 2:</u>

تقوم إحدى المؤسسات بإنتاج وبيع نوعين من المنتجات، وتستخدم لهذا الغرض نوعين من المواد الأولية. يتطلب إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول وحدة واحدة من المادة الأولية الأولى فقط، في حين يتطلب إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني وحدة واحدة من المادة الأولية الأولى ووحدتين من المادة الأولية الثانية.

تلقت المؤسسة طلبية من أحد الزبائن لشراء 4 وحدات من المنتج الأول و6 وحدات من المنتج الثاني. فإذا علمت أن تكلفة الوحدة الواحدة من المادة الأولية الأولى والمادة الأولية الثاني هي وحدة نقدية واحدة وثلاثة وحدات نقدية على التوالي، وأن النوع الثاني من المنتجات سريع التلف والمؤسسة لا تملك إمكانية تخزينه، أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تقليل التكلفة التي تتحملها المؤسسة؟

<u>الحل:</u>

تحديد المتغيرات (المجاهيل): تتضمن المسألة نوعين من المنتجات ونوعين من المواد الأولية. ولتحديد أي الأنواع يتم إعتبارها متغيرات ننظر إلى معلومية مقادير كل نوع في المسألة، فما لم يتم تحديد مقدار له فهو المتغير. ونلاحظ أن المسألة توفر معطيات حول مقادير المنتجات (2 و6 وحدات)، لكنها لا توفر معطيات حول مقادير المواد الأولية وبالتالي يتم إعتبار هذه الأخيرة متغيرات، وبما أنه لدينا نوعين من المواد الأولية: فنرمز للنوع الأول بـ X_1 والنوع الثاني بـ X_2.

ويتم إعداد الجدول المساعد لكتابة البرنامج الخطي كما يلي:

المواد الأولية / المنتجات	المقادير من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج		المقادير الدنيا
	المادة الأولية الأولى (X_1)	المادة الأولية الثانية (X_2)	
النوع الأول من المنتجات	0	2	2
النوع الثاني من المنتجات	1	2	6
التكلفة الوحدوية	1	3	

ومن خلال الجدول يُمكن كتابة البرنامج الخطي كما يلي:

دالة الهدف: تهدف المؤسسة إلى تقليل إلى أقصى حد تكلفة المادتين الأوليتين المستعملتين في إنتاج كل من المنتج الأول والمنتج الثاني، حيث تبلغ تكلفة الوحدة الواحدة من المادة الأولية الأولى وحدة نقدية واحدة، في حين تبلغ تكلفة الوحدة الواحدة من المادة الأولية الثانية ثلاثة وحدات نقدية. وتُكتب دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Min } Z = X_1 + 3X_2$$

القيود: حددنا سابقاً متغيرات البرنامج الخطي والتي تعبّر عن المواد الأولية لمجهولية مقاديرها في المسألة، أما بالنسبة للمنتجات المعلومة مقاديرها فيتم إعتبارها قيودا وبالتالي فإن البرنامج الخطي يتضمن قيدين: قيد المنتج الأول وقيد المنتج الثاني. ويتم كتابة الطرف الأيسر من كل قيد من خلال ضرب القيم (المعاملات) الموجودة في سطر كل منتج في المتغيرة المقابلة لها في الجدول. أما الطرف الأيمن من كل قيد فيتضمن مقدار طلبية الزبون من كل منتج. ونظرا لأن مقدار ما طلبه الزبون من المنتج الأول هو وحدتين، فالمؤسسة عليها أن تفي بهذه الطلبية وبالتالي تكون إشارة قيد المنتج الأول "أكبر من أو يساوي"، وهي إشارة تضمن الوفاء بطلبية الزبون، حيث أن إستخدام الإشارة "أقل من أو يساوي" يشير إلى إحتمال إنتاج كمية أقل من طلبية الزبون من المنتج الأول، كما أن إستخدام الإشارة "يساوي" يعني أن المؤسسة عليها إنتاج بالضبط ما طلبه الزبون من المنتج الأول، في حين أنه يُمكن الوصول بدالة الهدف إلى أدنى قيمة لها بإنتاج كميات أكبر. وما ينطبق على القيد الأول من المفترض أنه ينطبق أيضاً على القيد الثاني، إلّا أن ميزة سرعة تلف المنتج الثاني وعدم توفر المؤسسة على إمكانية تخزينه يفرض عليها أن تنتج بالضبط ما طلبه الزبون من هذا المنتج، وبالتالي فإشارة قيد المنتج الثاني المناسبة هي "يساوي".

شرط عدم السالبية: بما أن المادة الأولية الأولى والمادة الأولية الثانية هي كميات مادية فلا يُمكن لها أن تأخذ قيم سالبة.

وفي الأخير، يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\text{Min } Z = x_1+3x_2$$
$$s/c\begin{cases} x_2 \geq 2 \\ x_1+2x_2 = 6 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

وللإفادة أكثر نضيف المثال رقم 3.

مثال رقم 3:

تقوم إحدى المؤسسات من خلال 3 مصانع بإنتاج 3 أنواع من الإطارات: إطارات مخصصة للدرجات، إطارات مخصصة للسيارات وإطارات مخصصة للشاحنات. المصنع الأول ينتج يومياً 5 إطارات المخصصة للدرجات، 4 إطارات المخصصة للسيارات وإطار واحد المخصص للشاحنات. المصنع الثاني ينتج يومياً 6 إطارات المخصصة للدرجات، 3 إطارات المخصصة للسيارات وإطارين المخصصين للشاحنات. حجم الطلب الشهري على أنواع الإطارات الثلاثة هي 250 إطاراً، 125 إطاراً و70 إطاراً على التوالي. كلفة التشغيل اليومية لكل من المصنع الأول والمصنع الثاني هي 250 وحدة نقدية و350 وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب: أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تحديد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل مصنع خلال الشهر للوفاء بحجم الطلبيات بأقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

المصانع / الإطارات	عدد الوحدات المنتجة يومياً من مختلف أنواع الإطارات في كل مصنع		كمية الطلب الشهرية (وحدة)
	أيام التشغيل في المصنع الأول (X_1)	أيام التشغيل في المصنع الثاني (X_2)	
المخصصة للدراجات	5	6	250
المخصصة للسيارات	4	3	150
المخصصة للشاحنات	1	2	70
تكلفة تشغيل المصنع	250	350	

$$\text{Min } Z = 250X_1+350X_2$$

$$s/c\begin{cases} 5X_1+6X_2 \geq 250 \\ 4X_1+3X_2 \geq 150 \\ X_1+2X_2 \geq 70 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

3- حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية:

بالرغم من إتصاف أسلوب الحل بالطريقة البيانية بالسهولة والوضوح، إلّا أنه يُعتبر مفيداً وصالحاً لحل البرامج الخطية التي تحتوي فقط على متغيرتين.

3-1- خطوات حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية:

يتم الحل حسب الطريقة البيانية باتباع الخطوات التالية:

- تحويل القيود من متباينات إلى معادلات؛

- نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لاستخراج قيمة المتغير الآخر، ثم نكرر نفس العملية مع المتغير الآخر، وبهذا يُصبح لدينا نقطتين لكل معادلة، وبواساطتهما يُمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة؛

- على معلم متعامد نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات المتحصل عليها في الخطوة السابقة؛

- تحديد منطقة الحلول الممكنة: بعد رسم جميع المستقيمات التي تمثل القيود يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة Region of feasible solutions والتي تُسمى بالمنطقة المحدبة Convex set. ومنطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "أقل من أو يساوي" توجد أسفل المستقيم، في حين أن منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "أكبر من أو يساوي" توجد فوق المستقيم، أما منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "يساوي" فهي تقع على المستقيم نفسه. وفي حالة وجود قيدين أو أكثر، فإن منطقة الحلول الممكنة هي تلك المنطقة التي تُحقق جميع القيود، وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس أو الزوايا أو نقاط التطرف Extreme points، وتقع جميعها على تقاطعات المستقيمات الممثلة لمنطقة الحلول الممكنة. ويُمكن لمنطقة الحلول الممكنة أن تكون عبارة عن مستقيم.

ملاحظة: في حالة أخذ معاملات المتغيرات في القيود لإشارة سالبة، فإن منطقة الحلول الممكنة بالنسبة للقيد تتحدد كما يلي:

إشارة معامل المتغيرة في القيد	إشارة القيد	منطقة الحلول الممكنة بالنسبة للقيد
إشارة معامل المتغيرة الأولى سالبة	أقل من أو يساوي	أسفل المستقيم
	أكبر من أو يساوي	فوق المستقيم
إشارة معامل المتغيرة الثانية سالبة، أو كلا إشارتي معاملي المتغيرتين سالبتين	أقل من أو يساوي	فوق المستقيم
	أكبر من أو يساوي	أسفل المستقيم

إن تحديد منطقة الحلول الممكنة تحدد لنا الحلول التالية:

- الحلول غير الممكنة (Infeasible solution): وهي جميع النقاط خارج منطقة الحلول الممكنة؛
- الحلول الممكنة (Feasible solution): وهي أية نقطة تقع في منطقة الحلول الممكنة؛
- الحلول الأساسية الممكنة (Basic feasible solution): وهي أية نقطة تقع عند أحد زوايا منطقة الحلول الممكنة؛
- الحل الأمثل (Optimal solution): وهي واحدة أو أكثر من الحلول الأساسية الممكنة التي تحقق أعظم قيمة لدالة هدف في حالة التعظيم، أو أدنى قيمة لها في حالة التقليل.

وبعد تحديد منطقة الحلول الممكنة، يُمكن إستخدام طريقتين لإيجاد نقطة الحل الأمثل:

أ- الطريقة الأولى:

يتم في هذه الطريقة إيجاد نقطة الحل الأمثل باتباع الخطوات التالية:

- نجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ونرسم مستقيمها على المعلم، ويكفي لرسم هذا المستقيم أن نحدد نقطة واحدة فقط نظرا لأنه يمر حتما من نقطة المبدأ. ويُطلق على هذا المستقيم بالمستقيم Δ؛

- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إلى الأعلى إتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة (حيث أن أحد هذه الرؤوس تمثل نقطة الحل الأمثل)، والنقطة التي تحقق القيمة المثلى لدالة الهدف هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ في حالة التعظيم، وأول نقطة في حالة التقليل.

- عند الوصول إلى نقطة الحل الأمثل، وبعملية الإسقاط، نجد قيم متغيرات البرنامج الخطي. وبتعويض هذه القيم في دالة الهدف نجد قيمة هذه الأخيرة.

ملاحظة: في حالة دالة هدف تتضمن متغيرات إشارة معاملاتها سالبة، فإن هناك بعض التفاصيل التي يجب توضيحها لإيجاد نقطة الحل الأمثل كما هو موضح في الجدول أدناه.

إشارة معامل المتغيرة في دالة الهدف	حالة دالة الهدف	نقطة الحل الأمثل في حالة:	
		منطقة الحلول الممكنة فوق المستقيم Δ	منطقة الحلول الممكنة تحت المستقيم Δ
إشارة معامل X_1 سالبة	التعظيم	آخر رأس	أول رأس
	التقليل	أول رأس	آخر رأس
إشارة معامل X_2 سالبة	التعظيم	أول رأس	آخر رأس
	التقليل	آخر رأس	أول رأس

وينبغي التنبيه إلى أنه في حالة كلا معاملي المتغيرتين في دالة الهدف إشارتهما سالبة، ففي هذه الحالة يتم الصعود بمستقيم دالة الهدف نحو الأعلى حتى الوصول إلى نقطة الحل الأمثل. ويكمن الإختلاف بين هذه الحالة والحالة التي يكون فيها كلا معاملي المتغيرتين يحملان إشارة موجبة هو أن نقطة الحل الأمثل تتمثل في أول رأس نصل إليه في حالة التعظيم، وآخر رأس نصل إليه في حالة التقليل.

والجدول السابق يبين طريقة إيجاد نقطة الحل الأمثل في حالة منطقة الحلول الممكنة تقع فوق أو تحت مستقيم دالة الهدف. أما إذا كان مستقيم دالة الهدف يقطع منطقة الحلول الممكنة، وهي حالة يُمكن أن تحدث عندما تكون إشارة معامل إحدى المتغيرتين في دالة الهدف سالبة. فالجدول التالي يبين طريقة معالجة هذه الحالة.

إشارة معامل المتغيرة في دالة الهدف	حالة دالة الهدف	إتجاه تحريك مستقيم Δ	نقطة الحل الأمثل
إشارة معامل X_1 سالبة	التعظيم	نحو الأعلى	آخر رأس
	التقليل	نحو الأسفل	آخر رأس
إشارة معامل X_2 سالبة	التعظيم	نحو الأسفل	آخر رأس
	التقليل	نحو الأعلى	آخر رأس

وينبغي التنبيه هنا أنه في حالة كلا معاملي المتغيرتين في دالة الهدف إشارتهما سالبة، فيتم الوصول إلى نقطة الحل الأمثل بالصعود نحو منطقة الحلول الممكنة، كما في الحالة التي يكون فيها كلا معاملي المتغيرتين في دالة

الهدف إشارتهما موجبة. ويكمن الإختلاف في نقطة الحل الأمثل، حيث تتمثل هذه النقطة في أول رأس نصل إليه في حالة التعظيم، وآخر رأس نصل إليه في حالة التقليل.

ب- الطريقة الثانية:

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد الربح أو التكلفة المتحققة حسب الحالة عند كل رأس من رؤوس منطقة الحلول الممكنة، والرأس التي يحقق أعلى ربح أو أقل تكلفة يُعتبر نقطة الحل الأمثل.

فإذا إفترضنا أن منطقة الحلول الممكنة عبارة عن مضلع متكون من أربعة رؤوس A-B-C-D، فيتم حساب الربح أو التكلفة كما يلي:

الرأس أو نقطة التطرف	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف (.Max أو .Min)
A	(a_1,a_2)	Z_a
B	(b_2,b_2)	Z_b
C	(c_3,c_3)	Z_c
D	(d_3,d_3)	Z_d

ونقطة الحل الأمثل هي التي تقابل أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم أو أدنى قيمة لها في حالة التقليل.

مثال 4:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي (المتحصل عليه من المثال 1):

$$\text{Max } Z = 5x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} X_1+2X_2 \leq 7 \\ 3X_1+2X_2 \leq 9 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية؟

الحل:

سنحاول إيجاد حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقتين الموضحتين أعلاه.

الطريقة الأولى:

المستقيم 1	
$x_1+2x_2 = 7$	
X_1	X_2
0	3.5
7	0

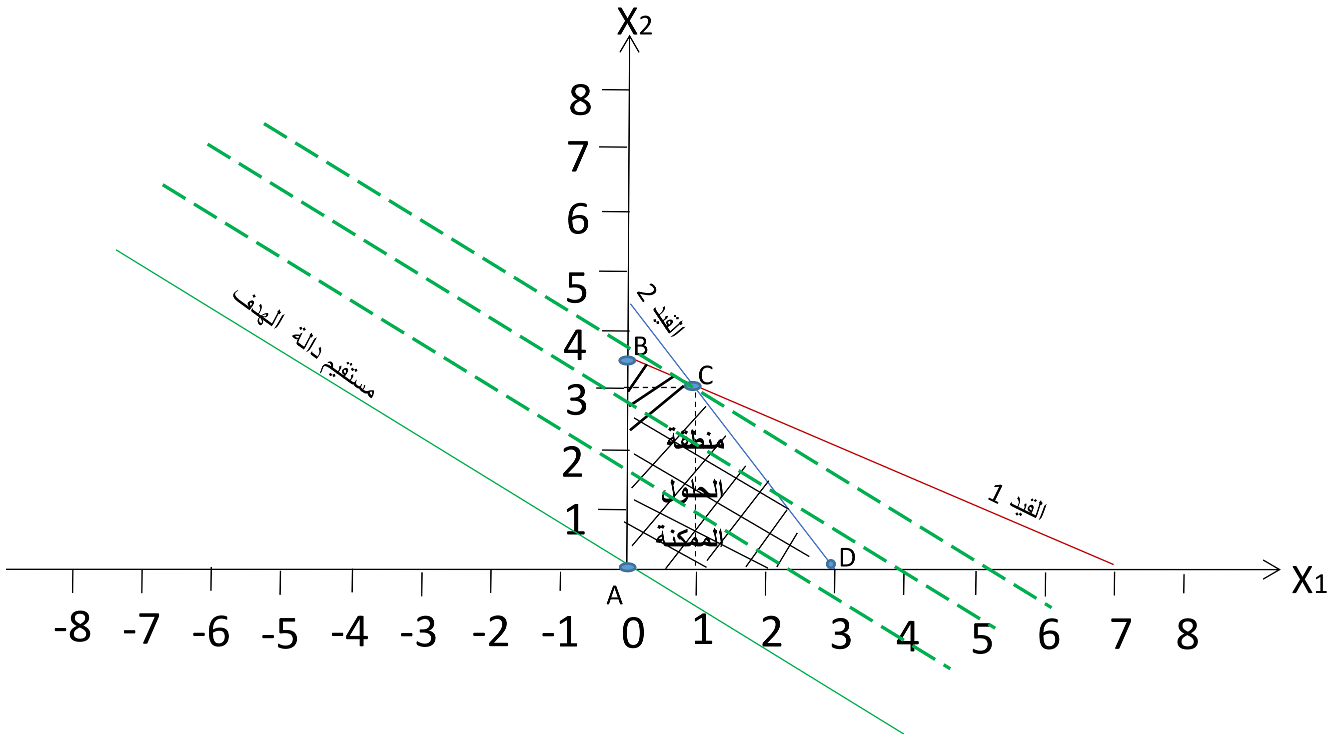
المستقيم 2	
$3x_1+2x_2 = 9$	
X_1	X_2
0	4.5
3	0

المستقيم Δ	
$5x_1+7x_2= 0$	
X_1	X_2
0	0
-7	5

تمثيل المستقيم 1: على المعلم نربط بين النقطة 7 على المحور الأفقي والنقطة 3.5 على المحور العمودي.

تمثيل المستقيم 2: على المعلم نربط بين النقطة 3 على المحور الأفقي والنقطة 4.5 على المحور العمودي.

تمثيل المستقيم Δ: على المعلم نربط بين نقطة المبدأ ونقطة التقاطع بين القيمتين 7- (على المحور الافقي) و5 (على المحور العمودي).



بعد تمثيل المستقيمين الممثلين للقيدين على المعلم، يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والمتمثلة في المضلع A-B-C-D. يتم تحريك مستقيم دالة الهدف نحو الأعلى (الخطوط الخضراء المتقطعة تعني الصعود التدريجي بدالة الهدف)، وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم، فإن عملية الصعود تستمر حتى الوصول إلى آخر رأس في منطقة الحلول الممكنة، ويتمثل هذا الرأس في النقطة C. وبعملية الإسقاط نجد:

$$.X_1 = 1, X_2 = 3$$

وبتعويض هاتين القيمتين في دالة الهدف نجد:

$$Max\ Z = 5(1) + 7(3) = 26 \text{ وحدة نقدية}$$

إذا، تصل المؤسسة إلى أعظم ربح يُمكن تحقيقيه في ظل الموارد المتوفرة المحدودة (ساعات العمل ورأس المال) عند 26 وحدة نقدية بإنتاج باب واحد و 3 نوافذ.

<u>الطريقة الثانية:</u>

بعد تمثيل المستقيمات الممثلة للقيود ومستقيم Δ الممثل لدالة الهدف، وبعد تحديد منطقة الحلول الممكنة والرؤوس المشكلة لها (كما تحصلنا عليه سابقاً)، نقوم بتعويض إحداثيات كل رأس أو نقطة في دالة الهدف كما يلي:

النقطة	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف
A	(0,0)	0
B	(0,7/2)	24.5
C	(1,3)	26
D	(3,0)	15

وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم، فإن النقطة التي تعطينا أكبر قيمة هي نقطة الحل الأمثل. ونجد أن النقطة C هي النقطة التي تُعطي أكبر قيمة لدالة الهدف حيث تبلغ 26 وحدة نقدية وبالتالي هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل.

مثال 5:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي (المتحصل عليه من المثال 2):

$$\text{Min } Z = x_1+3x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_2 \geq 2 \\ x_1+2x_2 = 6 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية؟

الحل:

الطريقة الأولى:

المستقيم 1
$x_2 = 2$

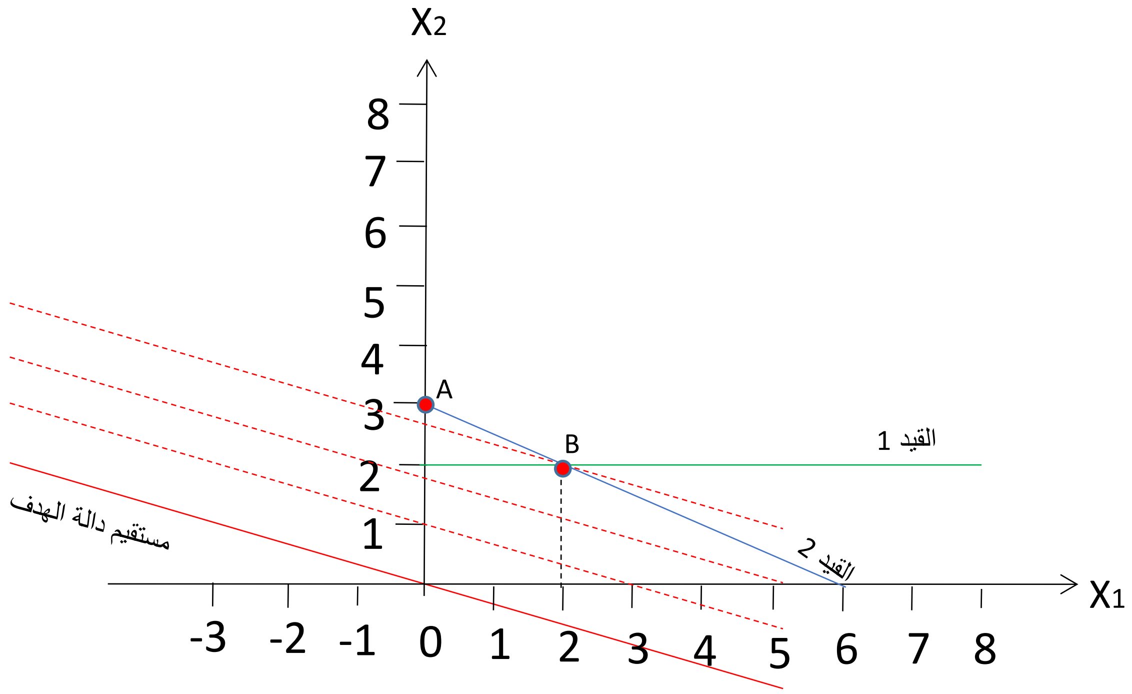
المستقيم 2	
$x_1+2x_2 = 6$	
X_1	X_2
0	3
6	0

المستقيم Δ	
$x_1+3x_2 = 0$	
X_1	X_2
0	0
-3	1

تمثيل المستقيم 1: المستقيم يتمثل في خط أفقي، حيث توجد نقطة واحدة فقط على المحور العمودي.

تمثيل المستقيم 2: على المعلم نربط بين النقطة 6 على المحور الأفقي والنقطة 3 على المحور العمودي.

تمثيل المستقيم Δ: على المعلم نربط بين نقطة المبدأ ونقطة التقاطع بين القيمتين -3 (على المحور الافقي) و1 (على المحور العمودي).



بعد تمثيل المستقيمين الممثلين للقيدين على المعلم يُلاحظ أنه نظراً لأن القيد الثاني إشارته "يساوي"، فإنه لن تتشكل لنا منطقة حلول ممكنة كما في المثال رقم 2. فبأخذ المستقيم الذي يمثل القيد الأول والمستقيم الذي يمثل القيد الثاني، فإن منطقة الحلول الممكنة التي تحقق القيدين معا هي عبارة عن خط المستقيم A–B. وبتحريك مستقيم دالة الهدف إلى الأعلى نصل إلى أول رأس عند النقطة B (لأن دالة الهدف في حالة التقليل)، وبعملية الإسقاط نجد:

$$X_1 = 2, X_2 = 2$$

وبتعويض هاتين القيمتين في دالة الهدف نجد:

$$Min\ Z = 1(2) + 3(2) = 8 \text{ وحدة نقدية}$$

الطريقة الثانية:

يتبين من خلال الشكل السابق أن منطقة الحلول الممكنة تتمثل في الخط A-B، وتتمثل نقطة الحل الأمثل في أحد هذه النقاط. يتم تعويض إحداثيات كل نقطة في دالة الهدف كما يلي:

النقطة أو الزاوية	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف
A	(0,3)	9
B	(2,2)	6

وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإن النقطة التي تعطينا أقل قيمة هي نقطة الحل الأمثل. ويُلاحظ أن النقطة B تعطينا أقل قيمة لدالة الهدف حيث تبلغ 6 وحدات نقدية، وبالتالي هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل.

ونظراً لبعض التفاصيل الدقيقة لإيجاد منطقة الحلول الممكنة ونقطة الحل الأمثل في حالة أخذ معاملات المتغيرات إشارات سالبة في القيود ودالة الهدف، سنضيف مثال آخر (المثال 6 أدناه) يعالج بعض هذه التفاصيل.

مثال 6:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = -x_1 + 2x_2$$

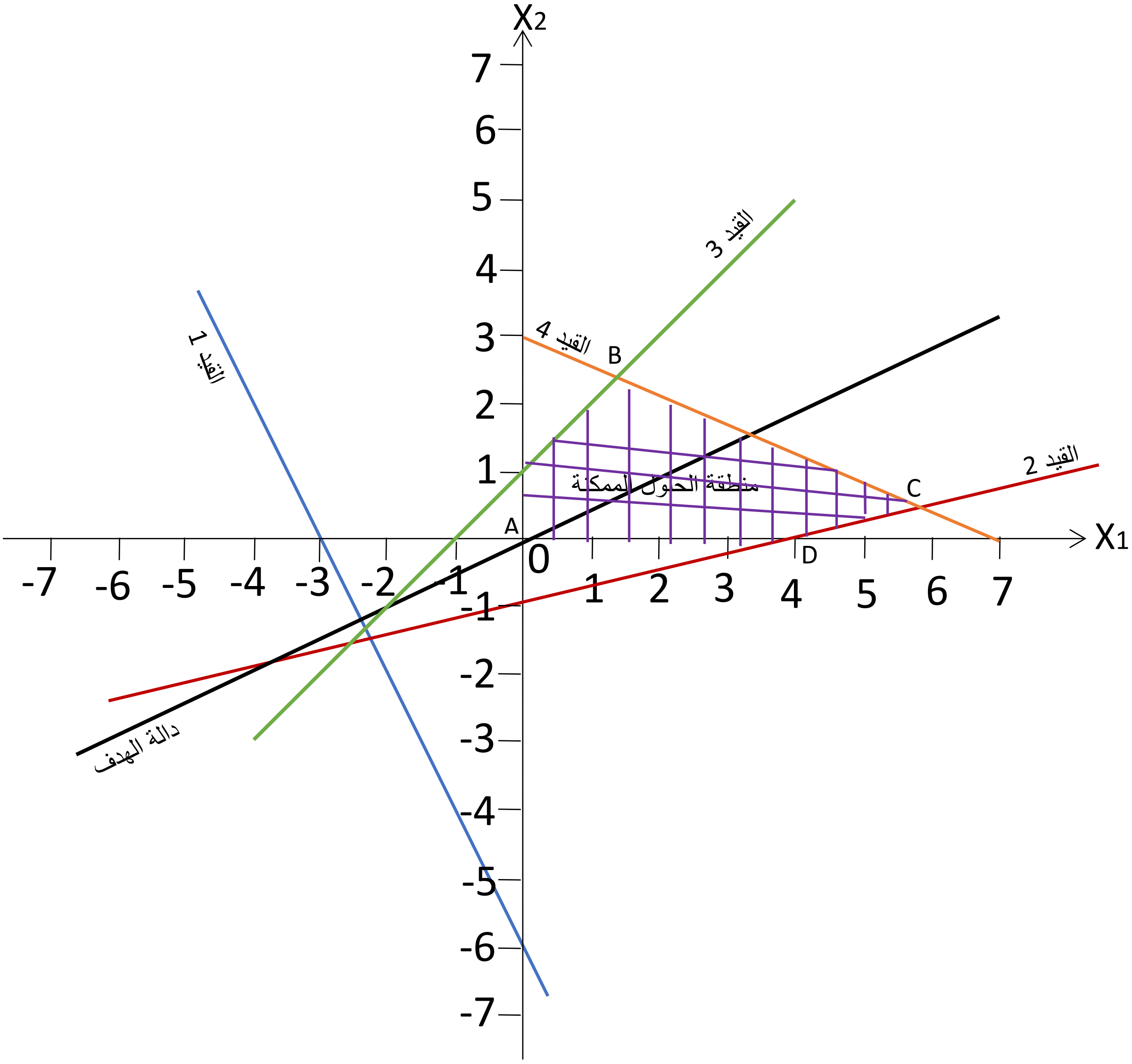
$$s/c \begin{cases} -2X_1 - X_2 \le 6 \\ X_1 - 4X_2 \le 4 \\ -X_1 + X_2 \le 1 \\ 3X_1 + 7X_2 \le 21 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية؟

الحل:

الطريقة الأولى:

المستقيم Δ		المستقيم 4		المستقيم 3		المستقيم 2		المستقيم 1	
$-x_1+2x_2 = 0$		$3x_1+7x_2 = 21$		$-x_1+x_2 = 1$		$x_1-4x_2 = 4$		$-2x_1-x_2 = 6$	
X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
0	0	0	3	0	1	0	-1	0	-6
2	1	7	0	-1	0	4	0	-3	0



بعد تمثيل المستقيات الممثلين للقيود الأربعة على المعلم، يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والمتمثلة في المضلع A-B-C-D. وبما أن مستقيم Δ يقطع منطقة الحلول الممكنة، ودالة الهدف في حالة التعظيم، وإشارة معامل المتغيرة X1 في دالة الهدف سالبة، فإنه يتم تحريك مستقيم Δ نحو الأعلى حتى الوصول إلى آخر رأس. ويتمثل هذا الرأس في النقطة B. وبعملية الإسقاط نجد:

$$X_1 = \frac{7}{5}, X_2 = \frac{12}{5}.$$

وبتعويض هاتين القيمتين في دالة الهدف نجد:

$$Max\ Z = -1\left(\frac{7}{5}\right) + 2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{17}{5}$$

<u>الطريقة الثانية:</u>

بعد تمثيل المستقيمات الممثلة للقيود ومستقيم Δ الممثل لدالة الهدف، وبعد تحديد منطقة الحلول الممكنة والرؤوس المشكلة لها (كما تحصلنا عليه سابقاً)، نقوم بتعويض إحداثيات كل رأس أو نقطة في دالة الهدف كما يلي:

النقطة	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف
A	(0,0)	0
B	(7/5,12/5)	17/5
C	(112/19,9/19)	-5
D	(4,0)	-4

وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم، فإن النقطة التي تعطينا أكبر قيمة هي نقطة الحل الأمثل. ونجد أن النقطة B هي النقطة التي تُعطي أكبر قيمة لدالة الهدف حيث تبلغ 17/5، وبالتالي هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل.

3-2- حالات خاصة:

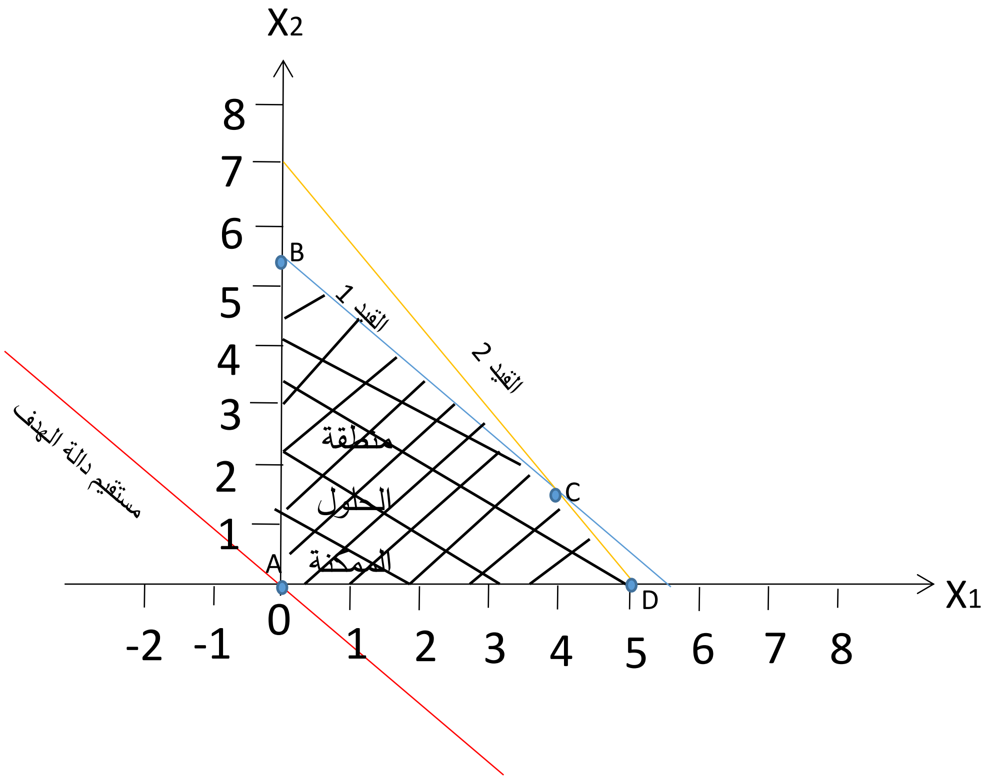
عند حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية تواجهنا في بعض الأحيان العديد من الحالات غير العادية:

حالة تعدد الحلول: تحدث هذه الحالة عند تحريك مستقيم Δ نحو الأعلى ونصل إلى رأسين على الأقل في آن واحد، بحيث يكونا آخر رأسين في حالة التعظيم، أو أول رأسين في حالة التقليل. وينبغي الإشارة إلى أن الوصول إلى رأسين على الأقل في نفس الوقت لا يعني أن عدد الحلول هو بعدد الرؤوس، بل إننا أمام حالة مالانهائية الحلول، حيث إن كل نقطة من النقاط على المستقيم الرابط بين هذه الرؤوس تعطينا قيم مختلفة للمتغيرات، لكنها كلها تعطينا نفس قيمة دالة الهدف.

وباستخدام الطريقة الثانية في الحل بالطريقة البيانية، فإننا نقع أمام حالة تعدد الحلول عندما نعوض إحداثيات النقاط على المستقيم الرابط بين الرأسين على الأقل الذين يصلاهما مستقيم Δ في آن واحد في دالة الهدف وتعطينا كلها نفس القيمة الكبرى في حالة التعظيم أو نفس القيمة الصغرى في حالة التقليل.

مثال 7:

على إفتراض أنه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين إشارتهما أقل من أو يساوي"، ممثلين على المعلم أدناه، ودالة الهدف التالية: $Max\ Z = X_1 + X_2$



باستخدام الطريقة الأولى، عندما نحرك مستقيم Δ نحو الأعلى فإننا سنصل إلى أعلى رأسين B و C في نفس الوقت وهو ما معناه أن جميع النقاط الوقعة على المستقيم B–C هي حلول مثلى. فإذا عوضنا قيمتا المتغيرتين عند النقطة B وهي $X_1 = 0, X_2 = 5.5$ في دالة الهدف فإن هذه الأخيرة ستكون قيمتها 5.5 وحدة نقدية، وأيضاً فإن تعويض قيمتا المتغيرتين عند النقطة C وهي $X_1 = 4, X_2 = 1.5$ في دالة الهدف ستعطينا نفس القيمة وهي 5.5 وحدة نقدية.

وباستخدام الطريقة الثانية، إذا حسبنا قيمة دالة الهدف عند جميع الرؤوس A، B، C و D، فإننا سنجد القيم التالية: 0، 5.5، 5.5 و 5 على التوالي، وبالتالي فإن أعلى قيمة لدالة الهدف تكون عند الرأسين B و C، وهو ما يشير إلى وجود حالة تعدد الحلول، حيث أن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الرابط بين النقطتين B و C تعطينا كلها نفس قيمة دالة الهدف وهي 5.5.

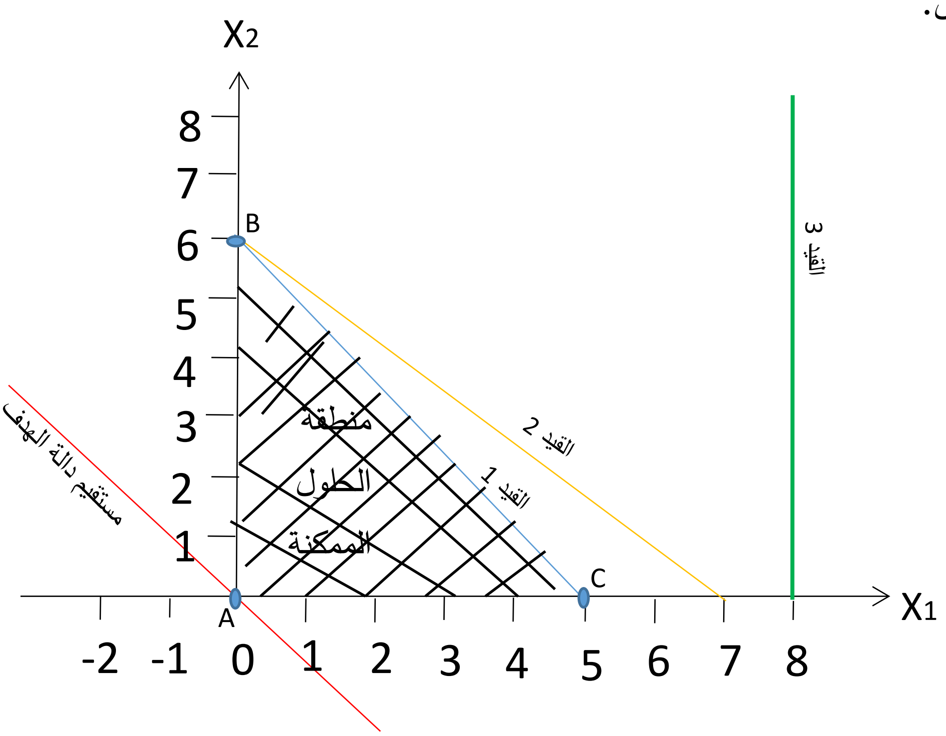
<u>**حالة القيود الفائضة:**</u> وتتمثل هذه الحالة في إمكانية وجود قيد (أو أكثر) لا يؤثر في تحديد منطقة الحلول الممكنة، ويُسمى في هذه الحالة بـ "قيد فائض".

<u>**مثال 8**</u>: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وبتمثيل القيود ودالة الهدف على المعلم أدناه، وباعتماد إحدى الطريقتين، نجد أن نقطة الحل الأمثل هي النقطة B، وإحداثياتها هي $X_2 = 6$ و $X_1 = 0$، وقيمة دالة الهدف تبلغ 6 وحدات نقدية. ويُلاحظ أن هناك قيدين فائضين القيد الثاني والقيد الثالث، حيث أنهما لا يؤثران على منطقة الحل الممكنة، وحذف هذين القيدين سوف لن يغيرا من نقطة الحل الأمثل.



حالة لا نهائية الدالة الاقتصادية (دالة الهدف): تحدث مثل هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول مفتوحة، كما يُمكن أن تحدث سواء كانت دالة الهدف في حالة التعظيم أو التقليل.

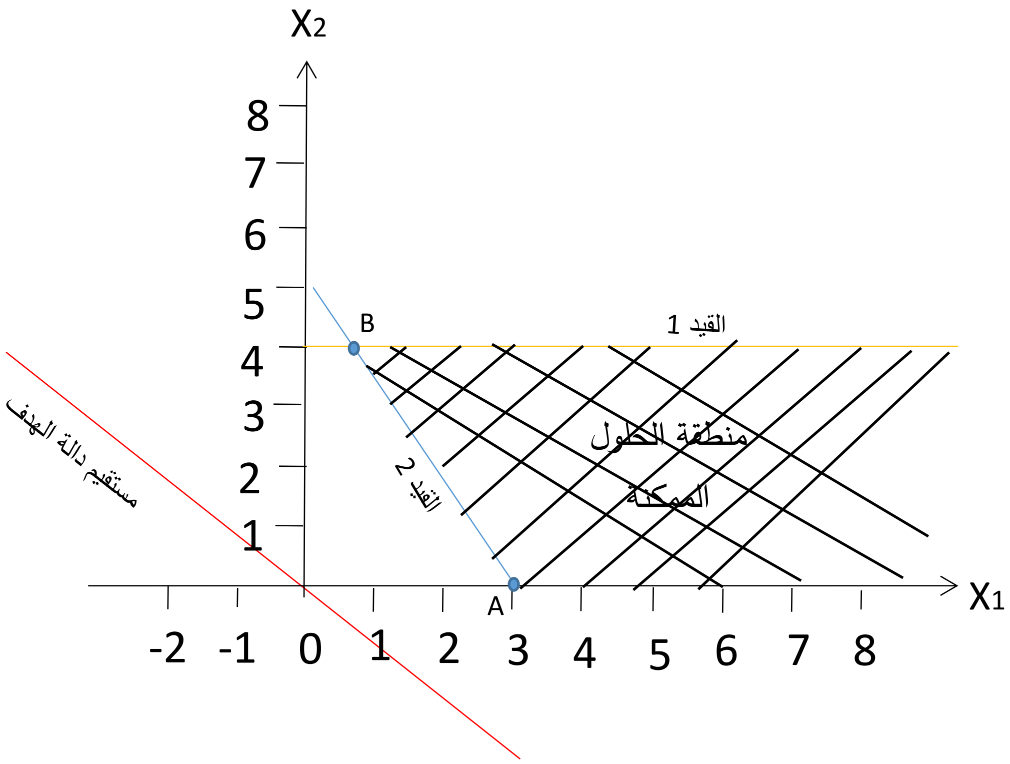
مثال 9:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 10x_1+20x_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 5x_1+3x_2 \geq 15 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

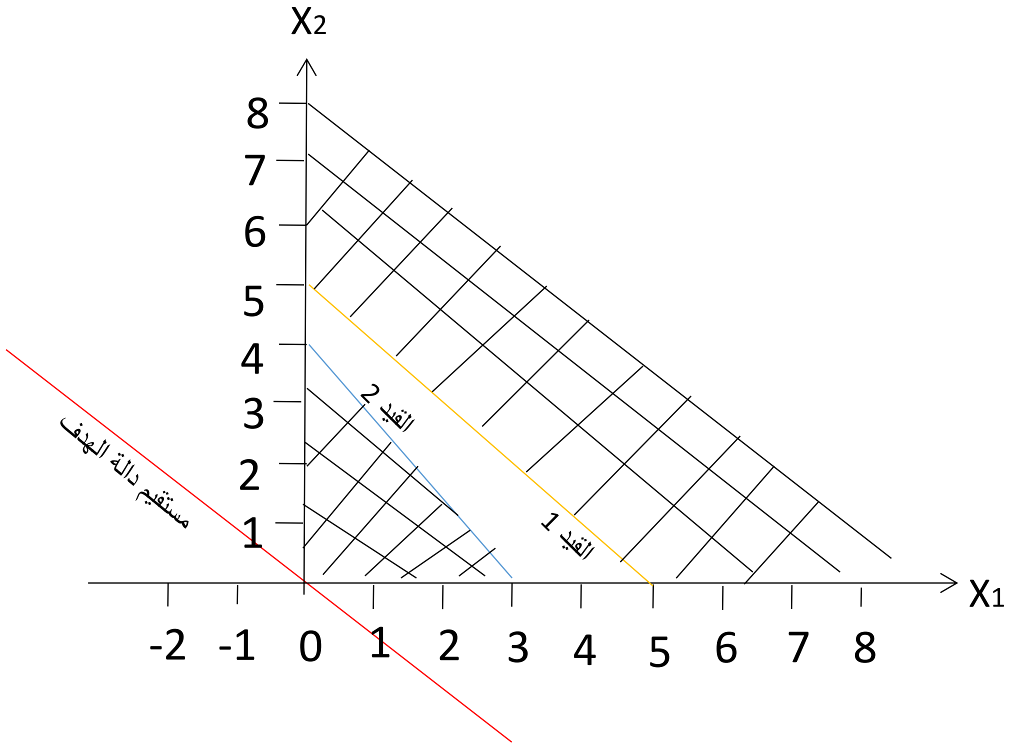
وبتمثيل القيدين ودالة الهدف على المعلم أدناه يُلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي منطقة مفتوحة، وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم فلا يُمكن الوصول إلى آخر رأس عند التحرك بمستقيم دالة الهدف نحو الأعلى. لكن لو إفترضنا أن دالة الهدف في حالة التقليل، ففي هذه الحالة يُمكن إيجاد نقطة الحل الأمثل وهي أول نقطة نصلها والمتمثلة في النقطة A.



حالة إستحالة الحل: تحدث هذه الحالة عندما لا يُمكن تحديد منطقة حلول ممكنة تحقق جميع قيود االبرنامج الخطي في آن واحد.

مثال 10:

على إفتراض أنه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين أحدهما إشارته "أكبر من أو يساوي" والآخر إشارته "أقل من أو يساوي"، ودالة هدف في حالة التعظيم أو التقليل والممثلين على المعلم أدناه. ويُلاحظ أنه لا يُمكن تحديد منطقة حلول ممكنة تحقق القيدين معا، وبالتالي فالحل مستحيل.


X2
8
7
6
5
4
3
2
1
X1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
القيد 2
القيد 1
مستقيم دالة الهدف

4- حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس Simplex Method:

أُبتكرت طريقة السمبلكس من طرف الرياضي الأمريكي George B. Dantzig سنة 1947. وتُستخدم هذه الطريقة لحل جميع البرامج الخطية القابلة للحل مهما كان عدد المتغيرات التي تتكون منها. فالطريقة البيانية، كما أشرنا سابقاً، تُستخدم فقط لحل البرامج الخطية التي تحتوي على متغيرتين، أما طريقة السمبلكس فهي طريقة عامة وذات إمكانيات هائلة.

وهناك مجموعة من المزايا التي تتمتع بها طريقة السمبلكس في معالجة المشاكل الخطية ومنها:

- تعتمد إجراءات نظامية محددة وسهلة؛
- تجعل إمكانية الوصول إلى الحل الأمثل واضحا؛
- إتباعها أسلوب تحسين الحل الأولي مما يحقق إمكانية الوصول إلى حل أفضل.

4-1- خطوات حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس:

تمر عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس بعدة خطوات حتى الوصول إلى نقطة الحل الأمثل كما يلي:

الخطوة الأولى: تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات (التحول الى الصيغة النموذجية أو القياسية):

تتطلب عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس تحويل هذه البرامج إلى الصيغة القياسية أو النموذجية، حيث لا يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس إلا بعد الحصول على هذه الصيغة. ويتميز النموذج القياسي بالصفات التالية:

- دالة الهدف تكون في حالة التعظيم أو التقليل؛
- جميع قيود البرنامج الخطي تكون في شكل معادلات؛
- جميع الثوابت (الطرف الأيمن من القيود) تكون قيمها غير سالبة؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

ويتم تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية (القياسية) كما يلي:

- نظيف متغيرة مكملة، وتُسمى أيضاً بمتغيرة وهمية أو متغيرة راكدة Slack variable، إلى الطرف الأيسر من القيد نرمز لها بـ S_j حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، علماً أن قيمة هذه المتغيرة أكبر من أو تساوي الصفر. وتتحدد قيمة المتغيرة المكملة لكل قيد حسب درجة إستغلال الطرف الأيمن من القيد من طرف المتغيرات الحقيقية للبرنامج الخطي، ففي حالة إستغلال كامل الطرف الأيمن من القيد، فإن قيمة المتغيرة المكملة في الحل الأمثل ستكون معدومة، أما في حالة عدم إستغلال كامل كمية الطرف الأيمن من القيد، ففي هذه الحالة سوف تكون قيمة المتغيرة المكملة غير معدومة؛
- ينبغي إضافة المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بربح وحدوي قيمته صفر، وبالتالي فالمتغيرات المكملة ليس لها تأثير على دالة الهدف.

لنفترض برنامج خطي يتكون من قيدين إشارتهما من نوع "أقل من أو يساوي"، ودالة هدف في حالة التعظيم. يتم تحويل هذا البرنامج إلى صيغته القياسية بإضافة متغيرة مكملة إلى القيد الأول نرمز لها بـ "S_1"، ومتغيرة مكملة أخرى إلى القيد الثاني نرمز لها بـ "S_2". ويُلاحظ أنه كلما تم إضافة متغيرة مكملة يتصاعد ترتيبها. وبعد إضافة المتغيرات المكملة إلى القيود، يتم إضافتها إلى دالة الهدف لكن بمعاملات صفرية.

$$\text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n$$
$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots, x_n\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n$$
$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+S_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+S_L \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots, x_n\ge 0, S_1\ge 0, S_2\ge 0,\dots,, S_k\ge 0 \end{cases}$$

<u>الخطوة الثانية: كتابة الحل الأساسي رقم 1:</u>

يُكتب جدول الحل الأساسي رقم 1 كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	C_1	C_2	…	C_n	0	0	…	0	b_i
		X_1	X_2	…	X_n	S_1	S_2	…	S_k	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	...	…	…	0	…	…	…
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	bm
	Zj	$Z_1=\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\times C_i^B$	$Z_2=\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\times C_i^B$	…	$Z_n=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\times C_i^B$ (j=1,2,…,n)	0	0	…	0	
	Cj-Zj	C_1-Z_1	C_2-Z_2	…	C_n-Z_n	0	0	…	0	$Z=\sum_{i=1}^{m} b_iC_i^B$

حيث:

X_i^B: **المتغيرات الأساسية:** يتم إعتبار المتغيرات المكملة متغيرات أساسية في جدول الحل الأساسي رقم واحد، ومع الإستمرار في الحل تتغير هذه المتغيرات (تخرج متغيرات أساسية وتدخل متغيرات غير أساسية مكانها لتصبح متغيرات أساسية).

$a_{11},\dots,a_{mn}$: معدلات التعويض (Substitution rates): وهي تشير إلى التغير قي قيمة المتغيرات الأساسية عندما يتم إدخال وحدة واحدة من متغيرة غير أساسية إلى الأساس. وتشير الإشارة الموجبة لـ a لانخفاض قيمة المتغيرات غير الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس. أما الإشارة السالبة لـ a فتشير لزيادة قيمة المتغيرات الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس.

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

C_i^B: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

bi: قيم الطرف الأيمن من القيود.

Zj: مقدار إنخفاض أو إرتفاع الربح (التكلفة) عند إدخال وحدة واحدة من المتغيرة إلى الأساس.

Cj-Zj: مقدار صافي الربح (صافي التكلفة) المتحقق من إدخال وحدة واحدة من المتغيرة j إلى الأساس.

وبما ان جميع القيود إشارتها أقل من أو يساوي، وبالتالي تم إضافة لكل قيد متغيرة مكملة، فإن عدد المتغيرات المكملة k يساوي عدد متغيرات الأساس m، لأن جميع المتغيرات المكملة تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأساسي رقم 1. ونفس الحالة يُمكن أن تحدث عندما تكون جميع القيود عبارة عن معادلات، حيث يتم إضافة لكل قيد متغيرة إصطناعية، وهذه المتغيرات تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأمثل (سنعالج موضوع المتغيرات الإصطناعية لاحقاً).

الخطوة الثالثة: الأمثلية:

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع عناصر السطر الأخير من جدول السمبلكس، أي Cj-Zj، سالبة. وعند تحقق الأمثلية، يتم إستخراج قيم الحل الأمثل كما يلي:

– قيم المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات الأساسية X_i^B تساوي القيم المقابلة لها في عمود الثوابت b_i؛

– قيم بقية المتغيرات، أي المتغيرات غير الأساسية، تساوي الصفر؛

– قيمة دالة الهدف هي عبارة عن قيمة Z في السطر الأخير.

وإذا لم يتحقق الحل الأمثل فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة: البحث عن الحلول الأساسية الموالية:

في حالة عدم تحقق الأمثلية، يتم كتابة الحل الأساسي الموالي كما يلي:

البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

عمود الإرتكاز يُقابل أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير Cj-Zj، والمتغيرة التي تمثل هذا العمود هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس. وفي حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس (وحود قيمتين كبيرتين متساويتين على الأقل)، فإنه يتم إختيار إحداهما.

البحث عن سطر الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:

نقسم كل قيمة من قيم b_i في جدول السمبلكس غير الأمثل على القيمة (الموجبة فقط) المقابلة لها في عمود الإرتكاز، والسطر التي تنتمي إليه أصغر قيمة موجبة هو سطر الإرتكاز (في حالة قيمة من قيم bi تساوي الصفر، فإن السطر الذي تنتمي إليه قيمة bi هذه هو سطر الإرتكاز)، والمتغيرة التي تقع في سطر الإرتكاز والموجودة في عمود متغيرات الأساس X_i^B هي المتغيرة التي تخرج من الأساس.

ويُمكن أن نُصادف حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس (تساوي أصغر قيمتين موجبتين على الأقل من حصائل قسمة قيم bi على القيم المقابلة لها في عمود الإرتكاز)، وهي حالة سنتطرق إليها عند تناول الحالات الخاصة التي يُمكن مصادفتها عند حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس.

عنصر الإرتكاز:

هو نقطة تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز.

ويتم إعداد جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

– يتم إستبدال المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس وذلك في العمود الذي يحتوي على متغيرات الأساس X_i^B؛

– يتم تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود إلى قيم معدومة؛

– يتم تحويل سطر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

– يتم حساب باقي العناصر على النحو التالي: العنصر المرشح للتغيير نطرح منه حاصل ضرب العنصرين المقابلين له في كل من سطر الارتكاز وعمود الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز.

فإذا افترضنا أن A في الجدول التالي هي عنصر الارتكاز:

A	B
C	D

فإن عملية التحويل تكون كما يلي:

1	$\frac{B}{A}$
0	$D-(\frac{BxC}{A})$

وبعد الانتهاء من إعداد جدول الحل الأساسي الموالي، نعود مرة أخرى إلى الخطوة رقم 3.

مثال 11:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي (تم حل هذا البرنامج الخطي سابقاً بالطريقة البيانية):

$$\text{Max } Z = 5x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} X_1+2X_2 \leq 7 \\ 3X_1+2X_2 \leq 9 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

التحول إلى الصيغة القياسية:

– القيد الأول إشارته أقل من أو يساوي: نظيف متغيرة مكملة S_1.

– القيد الثاني إشارته أكبر من أو يساوي: نظيف متغيرة مكملة S_2.

نظيف المتغيرتين المكملتين إلى دالة الهدف بمعامل صفري.

ويُكتب البرنامج الخطي في صيغته القياسية كما يلي:

$$\text{Max } Z = 5X_1+7X_2+0S_1+0S_2$$

$$s/c \begin{cases} X_1+2X_2+S_1 = 7 \\ 3X_1+2X_2+S_2 = 9 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأساسي رقم 1

C_i^B	X_i^B \ Cj	5	7	0	0	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	1	2	1	0	7	7/2
0	S_2	3	2	0	1	9	9/2
	Zj	0	0	0	0		
	Cj-Zj	5	7	0	0	Z=0	

يُلاحظ أن متغيرات الأساس في جدول الحل الأساسي الأول تتمثل في المتغيرتين المكملتين.

وبعد كتابة جدول الحل الأساسي رقم 1، يُلاحظ أن هذا الجدول غير أمثل نظرا لوجود قيم موجبة في السطر الأخير $C_j - Z_j$، وبالتالي ينبغي الإنتقال لجدول الحل الأساسي رقم 2. وتتمثل خطوات الإنتقال فيما يلي:

من جدول الحل الأساسي رقم 1:

– تحديد عمود الإرتكاز: عمود الإرتكاز يقابل أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير $C_j - Z_j$ وهي 7، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي X_2.

– تحديد سطر الإرتكاز: نقسم كل قيمة لـ b_i على القيمة الموجبة المقابلة لها في عمود الإرتكاز (النسب المتحصل عليها تم وضعها في العمود الأخير تحت مسمى "النسبة")، وسطر الإرتكاز يقابل أقل قيمة موجبة من حصائل القسمة وهي $\frac{7}{2}$، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي S_1.

– تحديد نقطة الإرتكاز: تتحدد عند تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز وهي 2.

ويُكتب جدول الحل الأساسي رقم 2 كما يلي:

– نستبدل المتغيرة S_1 بالمتغيرة X_2 في العمود X_i^B، ويتبع هذا الإستبدال تغيير المعامل في العمود C_i^B من 0 إلى 7؛

– تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي: نقطة الإرتكاز تتحول إلى 1 وباقي عناصر العمود تتحول إلى أصفار؛

– قسمة جميع عناصر سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز، بما فيها قيمة bi.

– يتم تحويل باقي قيم الخلايا كما يلي:

الخلية (1،2): $3-\left(\frac{1\times 2}{2}\right)=\mathbf{2}$

الخلية (3،2): $1-\left(\frac{1\times 2}{2}\right)=\mathbf{-1}$

الخلية (4،2): $1-\left(\frac{0\times 2}{2}\right)=\mathbf{1}$

b_2: $9-\left(\frac{7\times 2}{2}\right)=\mathbf{2}$

ثم نحسب قيم Z_j و $C_j - Z_j$.

جدول الحل الأساسي رقم 2

C_i^B	Cj / X_i^B	5	7	0	0	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2		
7	X_2	1/2	1	1/2	0	7/2	7
0	S_2	2	0	-1	1	2	1
	Zj	7/2	7	7/2	0		
	Cj-Zj	3/2	0	-7/2	0	Z=49/2	

ويُلاحظ أن جدول الحل الاساسي رقم 2 هو حل غير أمثل لوجود قيمة موجبة، وبالتالي ينبغي الإنتقال لجدول الحل الأساسي رقم 3 بنفس خطوات الإنتقال من جدول الحل الأساسي رقم 1 إلى جدول الحل الأساسي رقم 2 كما يلي:

من جدول الحل الأساسي رقم 2:

- تحديد عمود الإرتكاز: عمود الإرتكاز يقابل أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير $C_j - Z_j$ وهي 3/2 (القيمة الموجبة الوحيدة في الجدول)، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي X_1.
- تحديد سطر الإرتكاز: نقسم كل قيمة لـ b_i على القيمة الموجبة المقابلة لها في عمود الإرتكاز، وسطر الإرتكاز يقابل أقل قيمة موجبة من حصائل القسمة وهي 1، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي S_2.
- تحديد نقطة الإرتكاز: تتحدد عند تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز وهي 2.

ويُكتب جدول الحل الأساسي رقم 3 كما يلي:

- نستبدل المتغيرة S_2 بالمتغيرة X_1 في العمود X_i^B، ويتبع هذا الإستبدال تغيير المعامل في العمود C_i^B من 0 إلى 5؛
- تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي: نقطة الإرتكاز تتحول إلى 1 وباقي عناصر العمود تتحول إلى أصفار؛
- قسمة جميع عناصر سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز، بما فيها قيمة bi.
- يتم تحويل باقي قيم الخلايا كما يلي:

الخلية (2،1): $1 - \left(\frac{0\times\frac{1}{2}}{2}\right) = \mathbf{1}$

الخلية (3،1): $\frac{1}{2} - \left(\frac{(-1)\times\frac{1}{2}}{2}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

الخلية (4،1): $0 - \left(\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}\right) = -\mathbf{\frac{1}{4}}$

b_1: $\frac{7}{2} - \left(\frac{2\times\frac{1}{2}}{2}\right) = \mathbf{3}$

ثم نحسب قيم Z_j و $C_j - Z_j$.

جدول الحل الأساسي رقم 3

C_i^B	Cj / X_i^B	5	7	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	
7	X_2	0	1	3/4	-1/4	3
5	X_1	1	0	-1/2	1/2	1
	Zj	5	7	11/4	3/4	
	Cj-Zj	0	0	-11/4	-3/4	Z=26

يُلاحظ أن جميع قيم السطر Cj-Zj في جدول الحل الأساسي رقم 3 أصبحت كلها سالبة أو معدومة، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. إذا، القيم المثلى للبرنامج الخطي هي كما يلي:

$$X_1 = 1, X_2 = 3, S_1 = 0, S_2 = 0, Max\ Z = 26$$ وحدة نقدية

4-2- طريقة M الكبيرة Big-M Technique:

يتم إستخدام طريقة M الكبيرة عندما تكون إشارة القيود من نوع "أكبر من أو يساوي" أو "يساوي"، حيث يتم إستخدام، بالإضافة إلى المتغيرات المكملة، متغيرات تُدعى بالمتغيرات الإصطناعية Artificial variables لتحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية أو القياسية كما يلي:

في حالة قيد " أكبر من أو يساوي":

- نطرح متغيرة مكملة نرمز لها بـ S_j حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، وهذه العملية تجعل طرفي القيد متساويين. وقيمة المتغيرة المكملة في هذه الحالة تعني الزيادة عن ما هو مطلوب (قيمة الطرف الأيمن من القيد). فمثلا يُمكن لمؤسسة ما أن تنتج أكثر مما طلبه زبون من منتج معين، وقيمة الفرق هي قيمة المتغيرة المكملة.
- يتم الإستعانة بمتغيرات إصطناعية نرمز لها بـ R_j يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي 1+ حيث "j" هو ترتيب المتغيرة. وهذه العملية تحقق لنا إمكانية البدء في حل ممكن موجب، حيث ترفض طريقة السمبلكس البدء بحل سالب؛
- ينبغي إضافة المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بمعاملات تساوي الصفر، وإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى نفس الدالة مع معاملات يُفترض أن تكون موجبة وكبيرة جداً يُرمز إليها بـ "M"، ونكون أمام حالتين:
  - **في حالة التعظيم:** يكون معامل "M" بإشارة سالبة. وتشير "M" هنا إلى ربح المتغيرة الإصطناعية في دالة الهدف، والغاية من وضع إشارة سالبة هو ضمان خروج المتغيرات الإصطناعية من الحل الأمثل.
  - **في حالة التقليل:** يكون معامل "M" بإشارة موجبة. وتشير "M" هنا إلى تكلفة المتغيرة الإصطناعية في دالة الهدف، والغاية من وضع إشارة موجبة هو ضمان خروج المتغيرات الإصطناعية من الحل الأمثل.

في حالة قيد "يساوي":

- يتم الإستعانة بمتغيرات إصطناعية نرمز لها بـــ R_j يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي 1+ حيث "j" هو ترتيب المتغيرة؛
- ينبغي إدخال المتغيرات الإصطناعية إلى دالة الهدف مع معاملات يُفترض أن تكون موجبة وكبيرة جداً يُرمز إليها بـ "M"، ونكون أمام حالتين:

– **في حالة التعظيم:** يكون معامل "M" بإشارة سالبة. وتشير "M" هنا إلى ربح المتغيرة الإصطناعية في دالة الهدف، والغاية من وضع إشارة سالبة هو ضمان خروج المتغيرات الإصطناعية من الحل الأمثل.

– **في حالة التقليل:** يكون معامل "M" بإشارة موجبة. وتشير "M" هنا إلى تكلفة المتغيرة الإصطناعية في دالة الهدف، والغاية من وضع إشارة موجبة هو ضمان خروج المتغيرات الإصطناعية من الحل الأمثل.

وهناك بعض الخصائص التي تتميز بها المتغيرات الإصطناعية:

– أنها تدخل مزيج الحل الأولي (وهذه هي الغاية الرئيسية من إستخدامها)، ويجب التخلص منها بأسرع وقت ممكن؛

– قيمتها الأولية هي قيمة الطرف الأيمن من القيد. فعلى سبيل المثال إذا كان الطرف الأيمن من القيد هو عبارة عن الكمية المطلوبة من منتوج ما تُنتجه المؤسسة، فإن المتغيرة الإصطناعية تمثل إنتاجاً وهمياً قيمته قيمة هذه الكمية، وهذا يعني أن المتغيرة الإصطناعية هي متغيرة وهمية وليست حقيقية؛

– إن مساهمة المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف مساهمة مكلفة جداً، حيث تمثل كلفة عالية جداً في حالة التقليل، وخسارة كبيرة جداً في حالة التعظيم، وبأخذ بعين الإعتبار العنصر السابق، فإن إنتاج المتغيرة الإصطناعية سيؤدي إلى خسارة كبيرة إذا كان الهدف هو تعظيم الأرباح، أو زيادة كبيرة في التكاليف إذا كان الهدف هو تخفيض التكاليف.

وبعد تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة القياسية، نكتب جدول الحل الأساسي رقم 1، ولا تختلف هذه العملية على ما تم شرحه سابقاً، إلا أنه في حالة وجود المتغيرات الإصطناعية، فهذه الأخيرة هي التي يتم إعتبارها كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأساسي الأول.

كما أن هناك بعد الإختلافات عندما تكون دالة الهدف في حالة التقليل:

– يتم الوصول إلى الحل الأمثل عندما تصبح جميع قيم السطر الأخير من جدول السمبلكس Cj-Zj موجبة أو معدومة على عكس حالة التعظيم؛

– في حالة الحل غير أمثل، فإن الإختلاف الوحيد عند الإنتقال من جدول حل أساسي غير أمثل إلى الجدول الموالي يكمن في طريقة إختيار المتغيرة التي ستدخل إلى الأساس، فعلى عكس حالة التعظيم، فإنه يتم تحديد هذه المتغيرة على أساس أكبر قيمة سالبة من بين القيم السالبة في السطر الأخير Cj-Zj، وتبقى جميع الخطوات التالية هي نفسها.

مثال 12:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z=3X_1+10X_2$$

$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2\geq 10\\ 2X_1+7X_2\geq 14\\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0\end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة السمبلكس؟

الحل:

التحول إلى الصيغة القياسية:

– القيد الأول إشارته أكبر من أو يساوي: نطرح متغيرة مكملة S_1 ونظيف متغيرة إصطناعية R_1.

– القيد الثاني إشارته أكبر من أو يساوي: نطرح متغيرة مكملة S_2 ونظيف متغيرة إصطناعية R_2.

نظيف المتغيرتين المكملتين إلى دالة الهدف بمعامل صفري، أما المتغيرتين الإصطناعيتين فيتم إضافتهما بمعامل $+M$ لأن دالة الهدف في حالة التقليل.

ويُكتب البرنامج الخطي في صيغته القياسية كما يلي:

$$\text{Min } Z=3X_1+10X_2+0S_1+0S_2+MR_1+MR_2$$

$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2-S_1+R_1=10\\ 2X_1+7X_2-S_2+R_2=14\\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ R_1\geq 0,\ R_2\geq 0\end{cases}$$

جدول الحل الأساسي رقم 1

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	M	M	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
M	R_1	5	6	-1	0	1	0	10	5/3
M	R_2	2	7	0	-1	0	1	14	2
	Zj	7M	13M	-M	-M	M	M		
	Cj-Zj	3-7M	10-13M	M	M	0	0	Z=24M	

يُلاحظ أن متغيرات الأساس في جدول الحل الأساسي الأول تتمثل في المتغيرتين الإصطناعيتين.

وبعد كتابة جدول الحل الأساسي رقم 1، يُلاحظ أن هذا الحل غير أمثل لوجود قيم سالبة في السطر الأخير $C_j - Z_j$ وبالتالي ننتقل لجدول الحل الأساسي رقم 2. وتتمثل خطوات الإنتقال فيما يلي:

من جدول الحل الأساسي رقم 1:

– تحديد عمود الإرتكاز: عمود الإرتكاز يقابل أكبر قيمة سالبة من بين القيم السالبة الموجودة في السطر الأخير $C_j - Z_j$ وهي $10-13M$ (حيث قلنا سابقاً أن M هي قيمة موجبة كبيرة جداً، وإدخال الإشارة سالبة تحولها إلى قيمة سالبة صغيرة جداً)، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي X_2.

تحديد سطر الإرتكاز: نقسم كل قيمة لـ b_i على القيمة الموجبة المقابلة لها في عمود الإرتكاز، وسطر الإرتكاز يقابل أقل قيمة موجبة من حصائل القسمة وهي $\frac{5}{3}$، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي R_1.

– تحديد نقطة الإرتكاز: تتحدد عند تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز وهي 6.

ويُكتب جدول الحل الأساسي رقم 2 كما يلي:

– نستبدل المتغيرة R_1 بالمتغيرة X_2 في العمود X_i^B، ويتبع هذا الإستبدال تغيير المعامل في العمود C_i^B من M إلى 10؛

– تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي: نقطة الإرتكاز تتحول إلى1 وباقي عناصر العمود تتحول إلى أصفار؛

- قسمة جميع عناصر سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز، بما فيها قيمة bi.
- يتم تحويل باقي العناصر كما يلي:

الخلية (1،2): $2-\left(\frac{5\times6}{7}\right)=-\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{6}}$

الخلية (3،2): $0-\left(\frac{(-1)\times7}{6}\right)=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$

الخلية (4،2): $-1-\left(\frac{0\times7}{6}\right)=-\mathbf{1}$

الخلية (5،2): $0-\left(\frac{1\times7}{6}\right)=-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$

الخلية (6،2): $1-\left(\frac{0\times7}{6}\right)=\mathbf{1}$

b2: $14-\left(\frac{10\times7}{6}\right)=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

ثم نحسب قيم Z_j و C_j-Z_j،

جدول الحل الأساسي رقم 2

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	M	M	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
10	X_2	5/6	1	-1/6	0	1/6	0	5/3	-
M	R_2	-23/6	0	7/6	-1	-7/6	1	7/3	2
	Zj	25/3-(23/6)M	10	(7/6)M-5/3	-M	5/3-(7/6)M	M		
	Cj-Zj	(23/6)M-16/3	0	5/3-(7/6)M	M	(13/6)M-5/3	0	Z=(7/3M)+5/3	

ويُلاحظ أن جدول الحل الاساسي رقم 2 هو حل غير أمثل لوجود قيمة سالبة وهي 5/3-(7/6)M، وبالتالي ننتقل لجدول الحل الأساسي رقم 3 كما يلي:

من جدول الحل الأساسي رقم 2:

- تحديد عمود الإرتكاز: عمود الإرتكاز يقابل أكبر قيمة سالبة من بين القيم السالبة الموجودة في السطر الأخير C_j-Z_j وهي $5/3-(7/6)M$، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي S_1.
- تحديد سطر الإرتكاز: نقسم كل قيمة لـ b_i على القيمة الموجبة المقابلة لها في عمود الإرتكاز، وسطر الإرتكاز يقابل أقل قيمة موجبة من حصائل القسمة وهي 2، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي R_2.
- تحديد نقطة الإرتكاز: تتحدد عند تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز وهي 7/6.

ويُكتب جدول الحل الأساسي رقم 3 كما يلي:

- نستبدل المتغيرة R_2 بالمتغيرة S_1 في العمود X_i^B، ويتبع هذا الإستبدال تغيير المعامل في العمود C_i^B من M إلى 0؛
- تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي: نقطة الإرتكاز تتحول إلى1 وباقي عناصر العمود تتحول إلى أصفار؛
- قسمة جميع عناصر سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز، بما فيها قيمة bi.
- يتم تحويل باقي العناصر كما يلي:

الخلية (1،1): $\frac{5}{6}-\left(\frac{\left(-\frac{23}{6}\right)\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$

الخلية (2،1): $1-\left(\frac{0\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=\mathbf{1}$

الخلية (4،1): $0-\left(\frac{(-1)\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$

الخلية (5،1): $\frac{1}{6}-\left(\frac{\left(-\frac{7}{6}\right)\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=\mathbf{0}$

الخلية (6،1): $0-\left(\frac{1\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$

b_1: $\frac{5}{3}-\left(\frac{\frac{7}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{6}}\right)=\mathbf{2}$

ثم نحسب قيم Z_j و C_j-Z_j.

جدول الحل الأساسي رقم 3

C_i^B	Cj / X_i^B	3	10	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

يُلاحظ أن جميع قيم السطر Cj-Zj في جدول الحل الأساسي رقم 3 أصبحت كلها موجبة أو معدومة، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. القيم المثلى للبرنامج الخطي تتمثل فيما يلي:

$$X_1=0, X_2=2, S_1=2, S_2=0, Min\ Z=20$$ وحدة نقدية

ملاحظات فيما يخص تحديد عمود الإرتكاز في حالة وجود M:

– عند وجود قيمتين سالبتين (أو أكثر) في الصف الأخير C_j-Z_j الأولى سالبة (مهما كانت قيمتها) والأخرى M– فإن عمود الإرتكاز يقابل M– لأن إدخال الإشارة السالبة على M يحولها إلى قيمة سالبة صغيرة جداً.

– في حالة وجود قيمة من الشكل التالي: M–L، فهذا يعني أن القيمة موجبة مهما تكن قيمة L.

4–3– طريقة المرحلتين (ذات الوجهين) Two phase method:

يتم إستخدام طريقة المرحلتين (ذات الوجهين) لاستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في البرامج الخطية والحصول على الحل الأمثل. ويتم حل البرامج الخطية باستعمال هذه الطريقة على مرحلتين:

المرحلة الأولى:

يتم إعادة صياغة دالة الهدف حيث تحتوي فقط على المتغيرات الإصطناعية، وهذا يعني إستبعاد المتغيرات الحقيقية والمكملة. وتكون معاملات المتغيرات الإصطناعية +1 إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل، و–1 إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، كما يلي:

$$Min\ Z=R_1+R_2+\cdots+R_3$$
$$Max\ Z=-R_1-R_2-\cdots-R_3$$

وبعدها يتم حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس بطريقة عادية حتى الوصول إلى الحل الأمثل، وعند بلوغ هذه المرحلة يتم حذف المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأمثل، ويتم الإنتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

في هذه المرحلة يتم وضع دالة الهدف في صيغتها الحقيقية، كما يلي:

$$Min\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots$$
$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots$$

ثم نكمل الحل بطريقة السمبلكس حتى الوصول إلى الحل الأمثل

مثال 13:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي (نفس البرنامج الخطي الوارد في المثال رقم 12):

$$Min\ Z=3X_1+10X_2$$
$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2\geq 10\\2X_1+7X_2\geq 14\\X_1\geq 0,\ X_2\geq 0\end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة المرحلتين؟

الحل:

التحول إلى الصيغة القياسية:

$$Min\ Z=3X_1+10X_2+0S_1+0S_2+MR_1+MR_2$$
$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2-S_1+R_1=10\\2X_1+7X_2-S_2+R_2=14\\X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ R_1\geq 0,\ R_2\geq 0\end{cases}$$

المرحلة الأولى:

نحذف المتغيرات الحقيقية والمكملة من دالة الهدف في البرنامج الخطي في صيغته القياسية كما يلي:

$$Min\ Z=R_1+R_2$$
$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2-S_1+R_1=10\\2X_1+7X_2-S_2+R_2=14\\X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ R_1\geq 0,\ R_2\geq\end{cases}$$

يُلاحظ أن معاملات R_1 وR_2 هي 1+ لأن دالة الهدف في حالة التقليل. وبما أن دالة الهدف تخلو من المتغيرات الحقيقية والمكملة، فإن معاملات هذه المتغيرات في جدول السمبلكس في السطر C_j تكون معدومة.

ويتم حل البرنامج الخطي المتحصل عليه في المرحلة الأولى كما يلي:[1]

[1] تم وضع جميع الجداول بشكل تسلسلي لأن خطوات الإنتقال من جدول إلى جدول تم شرحها سابقاً، وبالتالي لا داعي لإعادة الشرح.

C_i^B	X_i^B \ Cj	0	0	0	0	1	1	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
1	R_1	5	6	-1	0	1	0	10	5/3
1	R_2	2	7	0	-1	0	1	14	2
	Zj	7	13	-1	-1	1	1		
	Cj-Zj	-7	-13	1	1	0	0	Z=24	
0	X_2	5/6	1	-1/6	0	1/6	0	5/3	-
1	R_2	-23/6	0	7/6	-1	-7/6	1	7/3	2
	Zj	-23/6	0	7/6	-1	-7/6	1		
	Cj-Zj	23/6	0	-7/6	1	13/6	0	Z=7/3	
0	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2	
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2	
	Zj	0	0	0	0	0	0		
	Cj-Zj	0	0	0	0	1	1	Z=0	

بما أن جميع قيم السطر $C_j - Z_j$ أصبحت موجبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وننتقل إلى المرحلة الثانية التي يتحول فيها جدول الحل الأمثل (الأخير) إلى الجدول الأول.

المرحلة الثانية:

من الجدول الحل الأمثل المتحصل عليه في المرحلة الأولى نحذف أعمدة المتغيرات الإصطناعية ونضع معاملات المتغيرات الحقيقية والمكملة من دالة الهدف في البرنامج الخطي في صيغته القياسية كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	2
	Zj	20/7	10	0	-10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	Z=20

يُلاحظ من الجدول أن جميع قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي فالحل أمثل. إذا القيم المثلى للبرنامج الخطي هي:

$$X_1 = 0, X_2 = 3, S_1 = 2,\ S_2 = 0, Min\ Z = 20$$ وحدة نقدية

مثال 14:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z=2X_1+3X_2$$

$$s/c \begin{cases} X_1+2X_2 \leq 18 \\ 3X_1+X_2=10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة المرحلتين؟

الحل:

$$Max\ Z=2X_1+3X_2+0S_1-MR_1$$

$$s/c \begin{cases} X_1+2X_2+S_1=18 \\ 3X_1+X_2+R_1=10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, S_1 \geq 0, R_1 \geq 0 \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$\text{Max } Z = -R_1$$

$$s/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 + S_1 = 18 \\ 3X_1 + X_2 + R_1 = 10 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ R_1 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ Cj	0	0	0	-1	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	R_1		
0	S_1	1	2	1	0	18	18
-1	R_1	3	1	0	1	10	10/3
	Zj	-3	-1	0	-1		
	Cj-Zj	3	1	0	0	Z=-10	
0	S_1	0	5/3	1	-1/3	44/3	
0	X_1	1	1/3	0	1/3	10/3	
	Zj	0	0	0	0		
	Cj-Zj	0	0	0	-1	Z=0	

بما أن جميع قيم السطر $C_j - Z_j$ أصبحت سالبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وننتقل إلى المرحلة الثانية التي يتحول فيها جدول الحل الأمثل (الأخير) إلى الجدول الأول.

المرحلة الثانية:

من جدول الحل الأمثل المتحصل عليه في المرحلة الأولى نحذف عمود المتغيرة الإصطناعية ونضع معاملات المتغيرات الحقيقية والمكملة من دالة الهدف في البرنامج الخطي في صيغته القياسية كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	2	3	0	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1		
0	S_1	0	5/3	1	44/3	44/5
2	X_1	1	1/3	0	10/3	10
	Zj	2	2/3	0		
	Cj-Zj	0	7/3	0	Z=20/3	
3	X_2	0	1	3/5	44/5	
2	X_1	1	0	-1/5	2/5	
	Zj	2	3	7/5		
	Cj-Zj	0	0	-7/5	Z=136/5	

يُلاحظ أن جدول الحل الأساسي رقم 1 ليس حلاً أمثلاً، حيث يحتوي السطر $C_j - Z_j$ على قيمة موجبة، لهذا أكملنا الحل ووجدنا أن جدول الحل الأساسي رقم 2 هو جدول الحل الأمثل، حيث أصبحت جميع قيم $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة. إذا القيم المثلى للبرنامج الخطي هي:

$$X_1 = \frac{2}{5}, X_2 = \frac{44}{5}, S_1 = 0, Max\ Z = \frac{136}{5}$$ وحدة نقدية

4-4- طريقة السمبلكس المعدّلة Revised Simplex Method:

من بين ما يؤخذ على طريقة السمبلكس الإعتيادية التي تناولناها سابقاً أنها تتضمن الكثير من العمليات الحسابية عند الإنتقال من جدول حل أساسي إلى جدول حل أساسي موالي، وهو ما يستغرق وقتاً لإجراء مثل هذه العمليات، ويستغرق الأمر وقتاً أطول كلما زاد عدد القيود أو المتغيرات. ويُمكن إستخدام طريقة السمبلكس المعدّلة، التي طورها

كل من Dantzig، Orden وWolfe في بداية الخمسينيات من القرن العشرين، لتجاوز مثل هذه المشكلة، حيث أن من بين مميزات هذه الطريقة أنها لا تتطلب إجراء جميع العمليات الحسابية في كل محاولة كما في طريقة السمبلكس الإعتيادية بالرغم من أنها تتبع نفس العمليات التي تُجرى عند الحل بهذه الطريقة، كما أن عدد المحاولات بصفة عامة عند الحل بطريقة السمبلكس المعدّلة أقل من عدد المحاولات عند الحل بطريقة السمبلكس الإعتيادية، بالإضافة إلى أنها تهدف إلى تحسين دقة النتائج.

وتستعمل طريقة السمبلكس المعدّلة المعاملات الأصلية للبرنامج الخطي، بينما طريقة السمبلكس الإعتيادية تحول هذه المعاملات مع كل محاولة، وينتج عن هذا ربح المساحة عند تخزين المعاملات في ذاكرة الحاسوب.

ويتم الحل بطريقة السمبلكس المعدّلة حسب الخطوات التالية:

أ- تحديد المتجهات العمودية التي تمثل أعمدة مختلف المتغيرات في البرنامج الخطي (المتغيرات الحقيقية، المكملة والإصطناعية)، ونرمز لكل عمود بـ P_j، حيث j هو ترتيب المتغيرة في البرنامج الخطي في صيغته القياسية. ويتم أيضاً تحديد العمود b الذي يحتوي على قيم الثوابت؛

ب- إيجاد المصفوفة $B = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_k]$، حيث يُمثل كل P عمود قيم متغيرة الأساس، وk هو عدد متغيرات الأساس؛

ج- حساب معكوس المصفوفة B، أي B^{-1}؛

د- حساب مضروب السمبلكس (Simplex multiplier): ويُحسب حسب العلاقة التالية: $\Pi = C_B B^{-1}$، حيث تشير C_B إلى قيم معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف. وتكون Π عبارة عن مصفوفة تتكون من صف واحد وk عمود، حيث k هو عدد متغيرات الأساس؛

هـ- حساب القيم $\overline{C}_j$ للمتغيرات غير الأساسية حسب العلاقة التالية: $\overline{C}_j = C_j - \Pi P_j$، حيث C_j تشير إلى قيم المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف. ويكون الحل أمثل عندما تكون جميع قيم $\overline{C}_j$ سالبة أو معدومة إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، وموجبة أو معدومة إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل؛

و- في حالة الحل غير أمثل:

و-1- المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي المتغيرة التي تقابل أكبر قيمة موجبة لـ $\overline{C}_j$ إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، أو أكبر قيمة سالبة إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل؛

و-2- المتغيرة التي تخرج من الأساس يتم تحديدها كما يلي:

- نحسب قيم عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس وفق الصيغة التالية: $\overline{P}_j = B^{-1} P_j$، حيث j هو ترتيب المتغيرة التي ستدخل إلى الأساس؛
- نحسب قيم عمود الثوابت $\overline{b}$ حسب العلاقة التالية: $\overline{b} = B^{-1} b$؛
- نقسم كل قيمة لـ $\overline{b}$ على القيمة المقابلة لها في العمود $\overline{P}_j$ (نقسم على القيم الموجبة فقط)، والمتغيرة التي تخرج من الأساس هي المتغيرة التي تقابل أقل قيمة موجبة من حواصل القسمة.

ز- نكرر الخطوة 2 وما بعدها؛

ح- عند الوصول إلى الحل الأمثل يتم الحصول على قيم متغيرات البرنامج الخطي باستخدام العلاقة التالية: $\bar{b} = B^{-1}b$، واعتبار قيم المتغيرات خارج الأساس معدومة، أما قيمة دالة الهدف فيتم الحصول عليها باستخدام العلاقة التالية: $Max\ (Min)\ Z = \Pi b$.

وسيتم شرح الخطوات أعلاه من خلال حل المثال رقم 14 أعلاه.

لدينا:

$$Max\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 - MR_1$$

$$s/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 + S_1 = 18 \\ 3X_1 + X_2 + R_1 = 10 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ R_1 \geq 0 \end{cases}$$

المتجهات العمودية لمتغيرات البرنامج الخطي وقيم الثوابت هي كما يلي:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B:

$$B = [P_3 \quad P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة B:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مضروب السمبلكس:

$$\Pi = C_B B^{-1} = [0 \quad -M] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -M]$$

حساب قيم $\bar{C}_j$ للمتغيرات خارج الأساس:

$$\bar{C}_1 = C_1 - \Pi P_1 = 2 - [0 \quad -M] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 - [-3M] = \mathbf{2 + 3M}$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \Pi P_2 = 3 - [0 \quad -M] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 - [-M] = \mathbf{3 + M}$$

بما أن دالة الهدف في حالة التعظيم فالحل غير أمثل، وأكبر قيمة موجبة هي $\bar{C}_1$، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي X_1.

تحديد المتغيرة التي ستخرج من الأساس:

حساب قيم عمود المتغيرة X_1:

$$\bar{P}_1 = B^{-1} P_1 \Rightarrow \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حساب قيم الثوابت:

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تقسيم قيم عمود الثوابت على قيم عمود المتغيرة X_1:

النسبة	$\overline{P}_1$	$\bar{b}$
18	1	18
10/3	3	10

أقل نسبة موجبة هي $10/3$، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي R_1.

نعيد تشكيل المصفوفة B:

$$B = [P_3 \quad P_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة B:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

مضروب السمبلكس:

$$\Pi = C_B B^{-1} = [0 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

حساب قيم $\overline{C}_j$ للمتغيرات غير الأساسية:

$$\overline{C}_2 = C_2 - \Pi P_2 = 3 - \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{4}{3}$$

بما أن قيمة $\overline{C}_2$ موجبة فإن المتغيرة X_2 تدخل إلى الأساس.

تحديد المتغيرة التي ستخرج من الأساس:

حساب قيم عمود المتغيرة X_2:

$$\overline{P}_2 = B^{-1} P_2 \Rightarrow \overline{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حساب قيم الثوابت:

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

تقسيم قيم عمود الثوابت على قيم عمود المتغيرة X_2:

النسبة	$\overline{P}_2$	$\bar{b}$
44/5	5/3	44/3
10	1/3	10/3

أقل نسبة موجبة هي 44/5، وبالتالي فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي S_1.

نعيد تشكيل المصفوفة B:

$$B = [P_2 \quad P_1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة B:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

مضروب السمبلكس:

$$\Pi = C_B B^{-1} = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

حساب قيم $\bar{C}_j$ للمتغيرات غير الأساسية:

$$\bar{C}_3 = C_3 - \Pi P_3 = 0 - \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \end{bmatrix} = -\frac{7}{5}$$

بما أن قيمة $\bar{C}_3$ سالبة فالحل أمثل.

قيمتا X_1 و X_2:

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

أي:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

قيمة دالة الهدف:

$$Max\ Z = \Pi b = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{136}{5}$$

إذا:

$$X_1 = \frac{2}{5}, X_2 = \frac{44}{5}, S_1 = 0, Max\ Z = \frac{136}{5}$$

4-5- حالات خاصة:

عند حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس تصادفنا أحيانا بعض الحالات والمشاكل الخاصة، وسنتطرق إلى مثل هذه الحالات كما يلي:

أ- عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات:

في بعض الأحيان يُمكن للمتغيرات أن تأخذ قيما أقل من أو تساوي الصفر، إلا أن الحل بطريقة السمبلكس يشترط أن تكون جميع المتغيرات أكبر من أو تساوي الصفر، ويتم معالجة مثل هذه الإشكالية كما يلي:

أ.**1**. إذا كانت إشارة إحدى المتغيرات "أقل من أو تساوي الصفر"، أي $X_j \leq 0$: في هذه الحالة يتم إفتراض أن $X_j = -X'_j$، حيث أن $X'_j \geq 0$، وبعدها يتم تعويض X_j في البرنامج الأصلي وفق الإفتراض، ثم نقوم بحل البرنامج الخطي بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل، وبعد ذلك نحول المتغيرة X'_j إلى أصلها وفق الإفتراض.

مثال 15:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 6X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 11 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 15 \\ X_1 \leq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

يُلاحظ أن إشارة المتغيرة X_1 أقل من أو تساوي الصفر، ومنه:

نفترض أن: $X_1 = -X'_1$ ثم نعوضها في البرنامج الخطي الأصلي كما يلي:

$$\text{Max } Z = -2X'_1 + 6X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} -X'_1 + 3X_2 \leq 11 \\ -2X'_1 + 5X_2 \leq 15 \\ X'_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعند حل البرنامج الخطي في صيغته الجديدة بطريقة السمبلكس سنجد أن $X'_1 = 10$، ومنه:

$$X_1 = -X'_1 = -10$$

أ.**2**. إذا كانت إحدى المتغيرات حرة، أي $X_j \in (-\infty, +\infty)$: في هذه الحالة يتم إفتراض أن $X_j = X'_j - X''_j$، حيث $X'_j \geq 0$ و $X''_j \geq 0$، ثم يتم تعويض المتغيرة وفق الإفتراض في البرنامج الخطي الأصلي، وبعدها نقوم بحل البرنامج الخطي بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل، وبعد ذلك نقوم بإيجاد قيمة المتغيرة الأصلية وفق الإفتراض.

مثال 16:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 6X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 11 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 15 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \forall \end{cases}$$

نُلاحظ أن المتغيرة X_2 متغيرة حرة.

نفترض أن: $X_2 = X'_2 - X''_2$

وبعد التعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج التالي:

$$\text{Max Z} = 2X_1 + 6(X_2' - X_2'')$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3(X_2' - X_2'') \leq 15 \\ 3X_1 + 5(X_2' - X_2'') \leq 11 \\ X_1 \geq 0, X_2' \geq 0, X_2'' \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{Max Z} = 2X_1 + 6X_2' - 6X_2''$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2' - 3X_2'' \leq 15 \\ 3X_1 + 5X_2' - 5X_2'' \leq 11 \\ X_1 \geq 0, X_2' \geq 0, X_2'' \geq 0 \end{cases}$$

وعند حل البرنامج الخطي في صيغته الجديدة بطريقة السمبلكس سنجد أن $X_2' = \frac{11}{5}, X_2'' = 0$، ومنه:

$$X_2 = X_2' - X_2'' = \frac{11}{5} - 0 = \frac{11}{5}$$

<u>ب- قيمة الطرف الأيمن من القيد سالبة:</u>

عند حل أي برنامج خطي بطريقة السمبلكس، إذا كانت قيمة الطرف الأيمن من القيد سالبة، ففي هذه الحالة ينبغي معالجة هذه المشكلة قبل البدء في حل البرنامج الخطي كما يلي:

في حالة القيد يساوي:

لنفترض القيد التالي:

$$-2X_1 + 7X_2 = -30$$

يتم التخلص من القيمة السالبة للطرف الأيمن من القيد بضرب طرفي القيد بالإشارة السالبة كما يلي:

$$2X_1 - 7X_2 = 30$$

حالة القيد عبارة عن متراجحة "أقل من أو يساوي" أو "أكبر من أو يساوي":

في هذه الحالة يتم ضرب طرفي القيد بالإشارة السالبة مع تغيير إشارة القيد إلى أكبر من أو يساوي إذا كانت إشارة القيد الأصلي أقل من أو يساوي، وإلى أقل من أو يساوي إذا كانت إشارة القيد الأصلي أكبر من أو يساوي.

لنفترض القيد التالي:

$$X_1 - 5X_2 \geq -45$$

يتم التخلص من القيمة السالبة للطرف الأيمن من القيد بضرب طرفي القيد بالإشارة السالبة وتغيير إشارة القيد كما يلي:

$$-X_1 + 5X_2 \leq 45$$

<u>ج- إنعدام وجود حل أمثل:</u>

إذا وصلنا إلى الحالة التي يكون فيها الحل أمثل، أي جميع قيم السطر $C_j - Z_j$ تكون سالبة أو معدومة في حالة التعظيم، أو موجبة أو معدومة في حالة التقليل، وتبقى على الأقل متغيرة إصطناعية في عمود المتغيرات الأساسية، فهذا معناه إستحالة الحل.

<u>مثال 17:</u>

لنفترض أن الجدول الحل الأساسي التالي هو الجدول الأخير عند حل برنامج خطي في حالة التقليل حيث جميع عناصر $C_j - Z_j$ أصبحت كلها سالبة أومعدومة.

C_i^B	X_i^B \ Cj	5	2	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	
2	X_2	1/3	1	-2/3	2/3	0	9
M	R_2	1	0	1/3	-1/3	1	11
	Zj	-M+2/3	2	-1/3M-4/3	1/3M+4/3	M	
	Cj-Zj	M+13/3	0	1/3M+4/3	2/3M-4/3	0	Z=-11M+18

يُلاحظ أن جميع قيم السطر $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة، وهذا يشير إلى أن الجدول هو جدول حل أمثل لأن دالة الهدف في حالة التقليل، إلّا أنه يُلاحظ أيضاً أن هناك متغيرة إصطناعية R_2 مازالت داخل الأساس، وهو ما يعني إستحالة الوصول لحل أمثل.

د-عدم محدودية الحل:

يتم الوقوع في حالة عدم محدودية الحل عندما تكون جميع قيم عمود الإرتكاز سالبة أو معدومة، حيث لا يُمكن تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس لأنه لا ينتج لنا أصغر قيمة موجبة من حصائل قسمة قيم b_i على القيم المقابلة لها في عمود الإرتكاز. وحدوث هذه الحالة في الحياة العملية يشير إلى أن هناك خلل في صياغة البرنامج الخطي لأنه لا يُمكن تصور إرتفاع الأرباح أو إنخفاض التكاليف إلى ما لا نهاية.

مثال 18:

لنفترض أن الجدول التالي هو جدول حل أساسي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	1	0	0	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2		
3	X_1	1	3/4	-2/3	0	8	-12
0	S_2	0	1/4	0	1	6	∞
	Zj	3	9/4	-2	0		
	Cj-Zj	0	-5/4	2	0	Z=24	

يُلاحظ أن الجدول ليس حلاً أمثلاً لأن السطر $C_j - Z_j$ يحتوي على قيمة موجبة وبالتالي يجب الإستمرار في الحل. أكبر قيمة موجبة في السطر $C_j - Z_j$ هي 2 وبالتالي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي S_1، وعند قسمة قيم b_i على عناصر عمود الإرتكاز لا نتحصل على نسب موجبة، فالنسبة الأولى سالبة، والنسبة الثانية غير محدودة، وبالتالي لا يُمكن تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس وبالتالي فالحل غير محدود.

هـ- ما لا نهائية الحلول المثلى:

تحدث هذه الحالة إذا أخذت على الأقل متغيرة من متغيرات خارج الأساس قيمة معدومة في السطر $C_j - Z_j$ من جدول الحل الأمثل، حيث يؤدي هذا إلى حالة ما لا نهائية الحلول المثلى، بمعنى أنه يُمكن الحصول على نفس قيمة دالة الهدف بأكثر من تشكيلة من متغيرات الأساس. ومثل هذه الحالة تتيح للإدارة إختيارات غير محدودة عند عملية إتخاذ القرار.

مثال 19:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له كما يلي:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

$$s/c \begin{cases} 7X_1 + 5X_2 \leq 35 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	Cj / X_i^B	1	1	0	0	bi
		X1	X2	S1	S2	
1	X1	1	0	1/2	-5/4	15/4
1	X2	0	1	-1/2	7/4	7/4
	Zj	1	1	0	1/2	
	Cj-Zj	0	0	0	-1/2	Z=11/2

وقيم الحل المثلى هي:

$$X_1 = \frac{15}{4}, X_2 = \frac{7}{4}, S_1 = 0,\ S_2 = 0, Max\ Z = \frac{11}{2}$$ وحدة نقدية

ويُلاحظ أن المتغيرة غير الأساسية S_1 قيمتها في السطر $C_j - Z_j$ صفر، وبالتالي فنحن أمام حالة ما لا نهائية الحلول المثلى. ويُمكن توضيح كيفية إيجاد حل أمثل جديد بدون تغيير في دالة الهدف من خلال إدخال المتغيرة S_1 إلى الأساس كما يلي:

C_i^B	Cj / X_i^B	1	1	0	0	bi
		X1	X2	S1	S2	
0	S1	2	0	1	-5/2	15/2
1	X2	1	1	0	1/2	11/2
	Zj	1	1	0	1/2	
	Cj-Zj	0	0	0	-1/2	Z=11/2

وهذا الجدول هو جدول حل أمثل، ونقطة الحل الأمثل الجديدة هي:

$$X_1 = 0, X_2 = \frac{11}{2}, S_1 = \frac{15}{2},\ S_2 = 0, Max\ Z = \frac{11}{2}$$ وحدة نقدية

ويُلاحظ بقاء نفس قيمة دالة الهدف. كما يُلاحظ أيضاً أن المتغيرة خارج الأساس X_1 قيمتها في السطر الأخير $C_j - Z_j$ صفر، وبالتالي يُمكن أن تدخل إلى الأساس بدون تغير في قيمة دالة الهدف.

و- الإنحلال (دورانية الحل) (Degeneracy):

تحدث هذه الحالة عندما يكون في أحد جداول الحل الأساسي عدد المتغيرات داخل الأساس التي قيمتها أكبر من الصفر أقل من عدد القيود، وفي هذه الحالة يكون الحل عبارة عن حل منحل، وهي تحدث عندما يُتاح لنا الإختيار بين أكثر من متغيرة مرشحة للخروج من الأساس (وجود أصغر قيمتين موجبتين أو أكثر متساويتين من حصائل قسمة عمود الثوابت bi على عناصر عمود الإرتكاز)، ويتم إختيار واحدة منهما بشكل عشوائي. وعند الوقوع في حالة الإنحلال فإنه لا يوجد ضمان لتحسين قيمة دالة الهدف عند الإستمرار في الحل، بل يُمكن الدخول في دوامة من الدورات (الجداول) بدون أن يؤثر ذلك على قيمة دالة الهدف. وفي بعض الأحيان يُمكن لحالة الإنحلال أن

تكون مؤقتة، بمعنى لا تستمر في الدورات اللاحقة، ولا يُمكن معرفة هل الحالة مؤقتة أو دائمة إلا بالإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

مثال 20:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z=6X_1+8X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases}3X_1+4X_2 \le 12\\ 2X_1+3X_2 \le 9\\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0\end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ Cj	6	8	0	0	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	3	4	1	0	12	3
0	S_2	2	3	0	1	9	3
	Zj	0	0	0	0		
	Cj-Zj	6	8	0	0	Z=0	
0	S_1	1/3	0	1	-4/3	0	0
8	X_2	2/3	1	0	1/3	3	9/2
	Zj	16/3	8	0	8/3		
	Cj-Zj	2/3	0	0	-8/3	Z=24	
6	X_1	1	0	3	-4	0	
8	X_2	0	1	-2	3	3	
	Zj	6	8	2	0		
	Cj-Zj	0	0	-2	0	Z=24	

يُلاحظ من الجدول الحل الأساسي رقم 1 أن هناك متغيرتين مرشحتين للخروج من الأساس هما S_1 وS_2 لتساوي حاصل قسمة قيمة bi على القيمة المقابلة لها في عمود الإرتكاز، وهو ما يعني أننا نواجه حالة الحل المنحل. وفي هذه الحالة نختار أحدهما بشكل عشوائي. وعند كتابة جدول الحل الأساسي رقم 2 (إخترنا إخراج المتغيرة S_2)، يُلاحظ أن قيمة المتغيرة داخل الأساس S_1 معدومة. وبما أن جدول الحل الأساسي رقم 2 غير أمثل، فقد إنتقلنا إلى جدول الحل الأساسي رقم 3، حيث يُعتبر هذا الجدول حلاً أمثلاً، وقيمة المتغيرة داخل الأساس X_1 معدومة. ويُلاحظ من جدول الحل الأساسي رقم 3 بقاء نفس قيمة دالة الهدف الواردة في جدول الحل الأساسي رقم 2، كما يُلاحظ أيضاً أننا أمام حالة ما لا نهاية الحلول المثلى لأن المتغيرة خارج الأساس S_2 قيمتها معدومة في السطر الأخير $C_j - Z_j$.

5- المسألة الثنائية:

تتوفر كل مشكلة يُمكن صياغتها تحت شكل برنامج خطي على نموذجان: الأول يُطلق عليه بالنموذج الأولي (الأصلي) والذي يتم صياغته من خلال معطيات المشكلة المطروحة (كما رأينا سابقاً في المثالين 1 و2)، والثاني عبارة عن مشكلة مناظرة للمشكلة الأولى يُطلق عليه بالنموذج الثنائي أو المقابل والذي يتم الحصول عليه بتحويل النموذج الأولي.

ومن مميزات النموذج المقابل أو الثنائي:

- يساعد في بعض الأحيان على التوصل إلى الحل الأمثل بشكل أسرع من إستخدام البرنامج الخطي الأولي، وذلك بتقليص خطوات الحل؛
- التخلص من القيم السالبة في الطرف الأيمن من القيود إن وُجدت في البرنامج الخطي الأولي؛
- في حالة وجود قيمة سالبة لأحد المتغيرات الأساسية في النموذج الثنائي، فإنه يمكن إيجاد الحل الأمثل له، في حين لا يُمكن إيجاد الحل في هذه الحالة إذا كان النموذج أولي؛
- يساعد على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية أو تحليل الحساسية؛

5-1- خطوات تحويل برنامج خطي أولي إلى برنامج خطي مقابل:

يتم تحويل برنامج خطي أولي إلى برنامج خطي مقابل حسب الخطوات التالية:

أ- قلب صيغة دالة الهدف: إذا كانت صيغة دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي هي .Min، فإنها تتحول إلى .Max في البرنامج الخطي المقابل، وإذا كانت صيغتها هي .Max فإنها تتحول إلى .Min؛

ب- إذا كانت متغيرات البرنامج الخطي الأولي هي $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$، فإن متغيرات البرنامج الخطي المقابل هي $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$، حيث m هو عدد قيود البرنامج الخطي الأولي؛

ج- قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي المقابل؛

د- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الخطي الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الخطي المقابل حسب نفس الترتيب؛

ه- معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي المقابل بنفس الترتيب؛

و- في حالة إشارة القيد i في البرنامج الخطي الأولي "أكبر من أو تساوي" ودالة الهدف في حالة التعظيم، يتم تحويل إشارة القيد إلى "أقل من أو تساوي" من خلال ضرب طرفي المتراجحة بالإشارة سالب، وبهذا تكون إشارة المتغيرة i في البرنامج الخطي المقابل "أكبر من أو تساوي".

ز- في حالة إشارة القيد i في البرنامج الخطي الأولي"أقل من أو تساوي" ودالة الهدف في حالة التقليل، يتم تحويل إشارة القيد إلى "أكبر من أو تساوي" من خلال ضرب طرفي المتراجحة بالإشارة سالب، وبهذا تكون إشارة المتغيرة i في البرنامج الخطي المقابل "أكبر من أو تساوي"؛

ح- في حالة قيد i عبارة عن معادلة: يتم تحويل القيد إلى متراجحتين مختلفتين في الإشارة، ويتم تحويل أحد هذين القيدين وفقاً للخطوة 7 أو الخطوة 8.

ط- إذا كانت المتغيرة i في البرنامج الخطي الأولي حرة، فإن القيد i في البرنامج الخطي المقابل يكون عبارة عن معادلة؛

ي- إذا كانت إشارة المتغيرة في البرنامج الخطي الأولي سالبة، فإن إشارة القيد i في البرنامج الخطي المقابل تكون "أقل من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل، و"أكبر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم.

ملاحظات:

- فيما يخص الخطوة رقم 9، يُمكن الإستغناء عن القيد الذي لا ينسجم مع الصيغة القانونية لبرنامج خطي حسب دالة الهدف، بمعنى أنه يُمكن الإستغناء عن المتراجحة "أكبر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، أو المتراجحة "أقل من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل؛
- يُمكن الإستغناء عن عملية التحويل في الخطوتين 7 و8، وبهذا تكون إشارة المتغيرة i في البرنامج الخطي المقابل "أقل من أو تساوي"؛
- يُمكن الإستغناء عن عملية التحويل في الخطوة 9، وبهذا تكون إشارة المتغيرة i في البرنامج الخطي المقابل حرة؛

مثال 21:

أوجد البرنامج الخطي المقابل للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Min } Z=2x_1+5x_2+4x_3$$

$$s/c \begin{cases} 5X_1+X_2+2X_3 \leq 10 \\ X_1+3X_2+3X_3 \geq 5 \\ 3X_1+X_2+2X_3=8 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 \forall \end{cases}$$

الحل:

بما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإشارات القيود يجب أن تكون كلها "أكبر من أو تساوي". وتتم عملية تحويل القيود التي لا تحمل هذه الإشارة كما يلي:

القيد الأول: نحول إشارة القيد إلى "أكبر من أو تساوي" بضرب طرفي المتراجحة بالإشارة سالب كما يلي:

$$-5X_1 - X_2 - 2X_3 \geq -10$$

القيد الثالث: يتم أولاً تحويل القيد إلى متراجحتين مختلفتين في الإشارة كما يلي:

$$3X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8$$
$$3X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 8$$

وبعدها يتم تحويل إشارة المتراجحة الأولى إلى "أكبر من أو تساوي" بضرب طرفيها بالإشارة سالب كما يلي:

$$-3X_1 - X_2 - 2X_3 \geq -8$$

ونتحصل على البرنامج الخطي الأولي بعد التحويل والبرنامج الخطي المقابل كما يلي:

$$\text{Min } Z=2X_1+5X_2+4X_3$$
$$s/c\begin{cases}-5X_1-X_2-2X_3\geq -10\\ X_1+3X_2+3X_3\geq 5\\ -3X_1-X_2-2X_3\geq -8\\ 3X_1+X_2+2X_3\geq 8\\ X_1\geq 0,\ X_2\leq 0,\ X_3\ \forall\end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z=-10Y_1+5Y_2-8Y_2+8Y_4$$
$$s/c\begin{cases}-5Y_1+Y_2-3Y_3+3Y_4\leq 2\\ -Y_1+3Y_2-Y_3+Y_4\geq 5\\ -2Y_1+3Y_2-2Y_3+2Y_4=4\\ Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0,\ Y_3\geq 0,\ Y_4\geq 0\end{cases}$$

ويُلاحظ أن عدد قيود البرنامج الخطي المقابل هو بعدد متغيرات البرنامج الخطي الأولي، وعدد متغيرات البرنامج الخطي المقابل هو بعدد قيود البرنامج الخطي الأولي.

كما يُمكن تحويل البرنامج الخطي الأولي إلى البرنامج الخطي المقابل كما يلي:

$$\text{Max } Z=10Y_1+5Y_2+8Y_3$$
$$s/c\begin{cases}5Y_1+Y_2+3Y_3\leq 2\\ Y_1+3Y_2+Y_3\geq 5\\ 2Y_1+3Y_2+2Y_3=4\\ Y_1\leq 0,\ Y_2\geq 0,\ Y_3\ \forall\end{cases}$$

نظريات:

نظرية 1: ثنائية البرنامج الخطي المقابل هي البرنامج الخطي الأولي.

نظرية 2: إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي غير محدود، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون مستحيل.

نظرية 3: إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي مستحيل، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون غير محدود أو مستحيل.

5-2- العلاقة بين الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي والحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل:

تتمثل العلاقة بين الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي والحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل فيما يلي:

1- قيمة المتغيرة الحقيقية i في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة أو الإصطناعية التي تم إدخالها للقيد i في البرنامج الخطي المقابل في السطر الأخير $C_j - Z_j$ من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل (بالقيمة المطلقة). وفي حالة المتغيرات الإصطناعية يجب أولاً طرح القيمة الموجودة في السطر الأخير من M- في حالة التعظيم، ومن M في حالة التقليل.

2- قيمة المتغيرة المكملة i (إن وُجدت) في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية i في السطر الأخير $C_j - Z_j$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل (بالقيمة المطلقة).

3- قيمة دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل تكون متساوية.

مثال 22:

ليكن لديك البرنامج الخطي الأولي والبرنامج الخطي المقابل له وجدول الحل الأمثل لكليهما كما يلي:

البرنامج الخطي المقابل

$$\text{Min } Z = 7Y_1 + 9Y_2$$
$$s/c \begin{cases} Y_1 + 3Y_2 \geq 5 \\ 2Y_1 + 2Y_2 \geq 7 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الخطي الأولي

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 7X_2$$
$$s/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 7 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل

C_i^B	Y_i^B \ Cj	7	9	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	S_1	S_2	
9	Y_2	0	1	-1/2	1/4	3/4
7	Y_1	1	0	1/2	-3/4	11/4
	Zj	7	9	-1	-3	
	Cj-Zj	0	0	1	3	Z=26

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي

C_i^B	X_i^B \ Cj	5	7	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	
7	X_2	0	1	3/4	-1/4	3
5	X_1	1	0	-1/2	1/2	1
	Zj	5	7	11/4	3/4	
	Cj-Zj	0	0	-11/4	-3/4	Z=26

المطلوب: حدد العلاقة بين جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل؟

الحل:

من خلال جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل يُمكن إستخراج قيم الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي كما يلي :

- قيمة المتغيرة الحقيقية الأولى X_1 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة الأولى S_1 في السطر الأخير $C_j - Z_j$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_1 = |S_1|_{(C_j - Z_j)} = |1| = 1$$

- قيمة المتغيرة الحقيقية الثانية X_2 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة الثانية S_2 في السطر الأخير $C_j - Z_j$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_2 = |S_2|_{(C_j - Z_j)} = |3| = 3$$

- قيمة المتغيرة المكملة S_1 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية Y_1 في السطر الأخير $C_j - Z_j$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$S_1 = |Y_1|_{(C_j - Z_j)} = 0$$

- قيمة المتغيرة المكملة S_2 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية Y_2 في السطر الأخير $C_j - Z_j$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$S_2 = |Y_2|_{(C_j - Z_j)} = 0$$

– قيمة دالة الهدف في كلا الحلين متساوية، أي:

$$Max\ Z = Min\ Z = 26 \text{ وحدة نقدية}$$

كذلك يُمكن إستخراج القيم المثلى للبرنامج الخطي المقابل من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي كما يلي:

$$Y_1 = |S_1|_{(C_j - Z_j)} = \left|-\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$$
$$Y_2 = |S_2|_{(C_j - Z_j)} = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$
$$S_1 = |X_1|_{(C_j - Z_j)} = 0$$
$$S_2 = |X_2|_{(C_j - Z_j)} = 0$$

5-3- أسعار الظل Shadow prices:

يعرّف سعر الظل بأنه مقدار التغير في دالة الهدف الناجم عن تغير الطرف الأيمن من القيد بوحدة واحدة بشرط بقاء باقي معطيات البرنامج الخطي بدون تغير. ويُمكن الحصول على أسعار الظل بطريقتين:

– من القيم الموجودة في الصف الأخير $C_j - Z_j$ من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تحت المتغيرات المكملة أو الإصطناعية؛

– من العمود الذي يحتوي على قيم المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل.

وينبغي الإشارة إلى أن هناك مدى محدد يبقى فيه مفعول أسعار الظل، وهو ما سنتناوله لاحقا عند التطرق إلى تحليل حساسية التغير في قيم الطرف الأيمن من القيود.

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي التالي (دالة الهدف في حالة التعظيم) يُمكن تحديد أسعار الظل كما يلي:

C_i^B	Cj / X_i^B	5	7	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	
7	X_2	0	1	3/4	-1/4	3
5	X_1	1	0	-1/2	1/2	1
	Zj	5	7	11/4	3/4	
	Cj-Zj	0	0	-11/4	-3/4	Z=26

سعر ظل القيد الأول

سعر ظل القيد الثاني

سعر ظل القيد رقم 1 (إشارته أقل من أو تساوي): قيمته هي $\frac{11}{4}$ (يتم أخذ القيمة بقيمتها المطلقة لأن قيمتها في الجدول هي قيمة سالبة)، وهي قيمة تقع في الخلية $C_3 - Z_3$ في عمود المتغيرة S_1. وهذه القيمة تعني أن زيادة الكمية من ساعات العمل بوحدة واحدة ستؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي بـ $\frac{11}{4}$ وحدة نقدية، وإنخفاضها بوحدة واحدة سيؤدي إلى إنخفاض قيمة الربح الكلي بـ $\frac{11}{4}$ وحدة نقدية.

ويُمكن تفسير سعر ظل القيد رقم 1 بدراسة معاملات العمود S_1 كما يلي:

زيادة ساعات العمل بوحدة وحدة ستؤدي إلى إنخفاض الكمية المنتجة من X_1 بـ $\frac{1}{2}$ (قيمة سالبة في الجدول)، وارتفاع الكمية المنتجة من X_2 بـ $\frac{3}{4}$ (قيمة موجبة في الجدول). ويؤثر هذين التغيرين على الربح كما يلي:

$$\left(-\frac{1}{2}\times 5\right)+\left(\frac{3}{4}\times 7\right)=\frac{11}{4}$$

وهذه القيمة تمثل الزيادة في الربح عندما تزيد ساعات العمل بوحدة واحدة، وهي تعادل سعر ظل القيد رقم 1.

سعر ظل القيد رقم 2 (إشارته أقل من أو يساوي): قيمته هي $\frac{3}{4}$ (يتم أخذ القيمة بقيمتها المطلقة لأن قيمتها في الجدول هي قيمة سالبة)، وهي قيمة تقع في الخلية $C_4 - Z_4$ في عمود المتغيرة S_2. وهذه القيمة تعني أن زيادة الكمية من رأس المال بوحدة واحدة ستؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي بـ $\frac{3}{4}$ وحدة نقدية، وانخفاضها بوحدة واحدة سيؤدي إلى إنخفاض قيمة الربح الكلي بـ $\frac{3}{4}$ وحدة نقدية؛

ويُمكن تفسير سعر ظل القيد رقم 2 بدراسة معاملات العمود S_2 كما يلي:

زيادة كمية رأس المال بوحدة وحدة ستؤدي إلى إرتفاع الكمية المنتجة من X_1 بـ $\frac{1}{2}$ (قيمة موجبة في الجدول)، وانخفاض الكمية المنتجة من X_2 بـ $\frac{1}{4}$ (قيمة سالبة في الجدول). ويؤثر هذين التغيرين على الربح كما يلي:

$$\left(\frac{1}{2}\times 5\right)+\left(-\frac{1}{4}\times 7\right)=\frac{3}{4}$$

وهذه القيمة تمثل الزيادة في الربح عندما تزيد كمية رأس المال بوحدة واحدة، وهي تعادل سعر ظل القيد رقم 2.

ويُمكن إستخراج نفس أسعار الظل من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل كما يلي:

C_i^B	Y_i^B \ Cj	7	9	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	S_1	S_2	
9	Y_2	0	1	-1/2	1/4	3/4
7	Y_1	1	0	1/2	-3/4	11/4
	Zj	7	9	-1	-3	
	Cj-Zj	0	0	1	3	Z=26

سعر ظل القيد الثاني

سعر ظل القيد الأول

سعر ظل القيد رقم 1: قيمته هي قيمة المتغيرة الأساسية Y_1 في عمود b_i وهي $11/4$.

سعر ظل القيد رقم 2: قيمته هي قيمة المتغيرة الأساسية Y_2 في عمود b_i وهي $3/4$.

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي التالي (دالة الهدف في حالة التقليل) يُمكن تحديد أسعار الظل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

سعر ظل القيد الأول

سعر ظل القيد الثاني

سعر ظل القيد رقم 1 (إشارته أكبر من أو يساوي): قيمته هي 0، وهي قيمة تقع في الخلية $C_3 - Z_3$ في عمود المتغيرة S_1. هذه القيمة تعني أن زيادة أو إنخفاض الطرف الأيمن من القيد بوحدة واحدة لن يؤدي إلى تغير في قيمة دالة الهدف؛

ويُمكن تفسير سعر ظل القيد رقم 1 بدراسة معاملات العمود S_1 (بعد ضربها في -1)، أو معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_1 كما يلي:

- زيادة الطرف الأيمن من القيد الأول بوحدة وحدة لن تؤثر على كمية X_1 لأنها متغيرة خارج الأساس، وأيضا لن تؤثر على كمية X_2 (وهي متغيرة أساس) لأن معاملها في العمود يساوي 0.
- التكلفة الكلية (قيمة دالة الهدف) لن تتغير لأن $0 = (10 \times 0)$، وهذه القيمة تعادل سعر ظل القيد رقم 1.

<u>ملاحظة:</u> عندما تكون متغيرة مكملة داخل الأساس، فإن سعر ظل القيد الذي تنتمي له المتغيرة تكون دائما قيمته 0.

سعر ظل القيد رقم 2 (إشارته أكبر من أو يساوي): قيمته هي $\frac{10}{7}$، وهي قيمة تقع في الخلية $C_4 - Z_4$ في عمود المتغيرة S_2. هذه القيمة تعني أن زيادة الطرف الأيمن من القيد الثاني بوحدة واحدة ستؤدي إلى إرتفاع قيمة التكلفة الكلية بـ $\frac{10}{7}$ وحدة نقدية، وانخفاضه بوحدة واحدة سيؤدي إلى إنخفاض قيمة التكلفة الكلية بـ $\frac{10}{7}$ وحدة نقدية؛

ويُمكن تفسير سعر ظل القيد رقم 2 بدراسة معاملات العمود S_2 (بعد ضربها في -1)، أو معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_2 كما يلي:

زيادة الطرف الأيمن من القيد الثاني بوحدة واحدة ستؤدي إلى زيادة كمية X_2 بـ $\frac{1}{7}$، في حين لن تتأثر كمية X_1 لأنها متغيرة خارج الأساس. وسترتفع أيضا قيمة S_1 بـ $\frac{6}{7}$. ويؤثر هذا التغير على التكلفة الكلية كما يلي:

$$\left(\frac{1}{7} \times 10\right) = \frac{10}{7}$$

وهذه القيمة تمثل الزيادة في التكلفة عندما تزيد قيمة الطرف الأيمن من القيد الثاني بوحدة واحدة، وهي تعادل سعر ظل القيد، مع العلم أن قيمة دالة الهدف لن تتأثر بإرتفاع أو إنخفاض قيمة S_1 لأن معاملها في دالة الهدف يساوي 0.

ويُمكن إستخراج قيم أسعار الظل من الخلايا في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل الموجودة في أعمدة المتغيرات الإصطناعية بطرح القيمة الموجودة في الخلية من M كما يلي:

سعر ظل القيد رقم 1: $M - (M) = 0$

سعر ظل القيد رقم 2: $M - \left(M - \frac{10}{7}\right) = \frac{10}{7}$

وفي حالة دالة الهدف في حالة التعظيم فإننا نطرح القيمة من $-M$.

وتكمن أهمية هذه الملاحظة في حالة كان القيد عبارة عن معادلة، حيث يتم إضافة متغيرة إصطناعية فقط لهذ القيد عند تحويل البرنامج الخطي الأولي إلى الصيغة القياسية.

ويُمكن إستخراج نفس أسعار الظل من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل كما يلي:

C_i^B	Cj / Y_i^B	10	14	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	S_1	S_2	
0	S_1	23/7	0	1	-2/7	1/7
14	Y_2	6/7	1	0	1/7	10/7
	Zj	12	14	0	2	
	Cj-Zj	-2	0	0	-2	Z=20

سعر ظل القيد الثاني

سعر ظل القيد رقم 1: يُلاحظ أن Y_1 هي متغيرة غير أساسية وبالتالي فقيمتها تساوي 0، ومنه فإن سعر ظل القيد الأول هو 0.

سعر ظل القيد رقم 2: قيمته هي قيمة المتغيرة الأساسية Y_2 في عمود b_i وهي 10/7.

ومن بين فوائد أسعار الظل أنها تساعد الإدارة في عملية إتخاذ القرارات. فمن مثالنا السابق، يُلاحظ أن زيادة ساعات العمل أو رأس المال يؤديان كلاهما لزيادة الربح الكلي، إلا أن الإدارة يُمكن أن تعطي الأولية لزيادة ساعات العمل نظراً لأن وحدة إضافية من هذا المورد يؤدي إلى زيادة الربح الكلي بـ 11/4 وحدة نقدية، في حين أن زيادة وأس المال بوحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة الربح الكلي بـ 3/4 وحدة نقدية. وإذا إفترضنا أن سعر ظل القيد الأول يساوي الصفر، أي وجود فائض من ساعات العمل، فالإدارة هنا يُمكنها أن توجه هذا الفائض إلى إستخدمات أخرى، لأن أية زيادة في ساعات العمل سوف لن تؤدي إلى زيادة الربح.

ملاحظات:

- في حالة قيمة سعر ظل القيد تختلف عن الصفر، يؤثر أيّ تغير في قيمة الطرف الأيمن من القيد (إذا كان ضمن المجال المسموح به كما سنرى لاحقاً في تحليل الحساسية) على قيمة دالة الهدف وقيم المتغيرات الأساسية التي قيم معاملاتها في عمود المتغيرة المكملة أو الإصطناعية (العمود الذي على أساسه تم إستخراج قيمة سعر ظل القيد) تختلف عن الصفر. وقيمة دالة الهدف ستتأثر فقط بتغير قيم المتغيرات الحقيقية الأساسية، لأن قيمة معاملات المتغيرات المكملة الأساسية (وغير الأساسية) في دالة الهدف تساوي الصفر.
- في حالة قيمة سعر ظل القيد تساوي الصفر، يؤثر أيّ تغير في قيمة الطرف الأيمن من القيد (إذا كان ضمن المجال المسموح به) فقط على قيم المتغيرات الأساسية التي قيم معاملاتها في عمود المتغيرة المكملة أو الإصطناعية (العمود الذي على أساسه تم إستخراج قيمة سعر ظل القيد) تختلف عن الصفر، في حين لن تتأثر قيمة دالة الهدف.

والجدول التالي يُجمل كيفية إيجاد قيمة سعر الظل حسب إشارة القيد وحالة دالة الهدف. كما يبين العلاقة بين الطرف الأيمن من القيد وقيمة دالة الهدف، وكذلك طريقة تفسير سعر الظل.

<table>
<tr><th>إشارة القيد</th><th>حالة دالة الهدف</th><th>سعر الظل</th><th>العلاقة بين الطرف الأيمن من القيد ودالة الهدف</th><th>تفسير سعر الظل بدراسة:</th></tr>
<tr><td rowspan="2">أقل من أو تساوي</td><td>التعظيم</td><td>نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير C_j-Z_j بالقيمة المطلقة ونتحصل على:
سعر ظل ذو قيمة موجبة</td><td>طردية</td><td rowspan="2">معاملات عمود المتغيرة المكملة</td></tr>
<tr><td>التقليل</td><td>نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير C_j-Z_j بعد ضربها في -1 ونتحصل على:
سعر ظل ذو قيمة سالبة</td><td>عكسية</td></tr>
<tr><td rowspan="2">أكبر من أو تساوي</td><td>التعظيم</td><td>نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير C_j-Z_j، أو نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر C_j-Z_j من $-M$ ونتحصل على:
سعر ظل ذو قيمة سالبة</td><td>عكسية</td><td rowspan="2">معاملات عمود المتغيرة المكملة (بعد ضربها في -1) أو معاملات المتغيرة الإصطناعية</td></tr>
<tr><td>التقليل</td><td>نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير C_j-Z_j، أو نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر C_j-Z_j من M ونتحصل على:
سعر ظل ذو قيمة موجبة</td><td>طردية</td></tr>
<tr><td rowspan="2">تساوي</td><td>التعظيم</td><td rowspan="2">نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر الأخير C_j-Z_j من $-M$ في حالة التعظيم، أو من M في حالة التقليل ونتحصل على:
سعر ظل ذو قيمة موجبة أو قيمة سالبة</td><td rowspan="2">طردية في حالة إشارة موجبة لسعر الظل وعكسية في حالة إشارة سالبة لسعر الظل.</td><td rowspan="2">معاملات المتغيرة الإصطناعية</td></tr>
<tr><td>التقليل</td></tr>
</table>

أما فيما يخص إستخراج أسعار الظل لمختلف قيود البرنامج الأولي باستخدام جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل، يُمكن تلخيصها فيما يلي:

إشارة المتغيرة Yi في البرنامج الخطي المقابل	سعر ظل القيد i في البرنامج الخطي الأولي
أكبر من أو تساوي الصفر	قيمة المتغيرة Yi في عمود الثوابت bi **(سعر ظل ذو قيمة موجبة)**
أقل من أو تساوي الصفر	قيمة المتغيرة Yi في عمود الثوابت bi بعد ضربها في -1 **(سعر ظل ذو قيمة سالبة)**
حرة	الفرق بين القيمتين $Y_i^{`}$ و $Y_i^{``}$ في عمود الثوابت **(سعر ظل ذو قيمة موجبة أو قيمة سالبة)**

مثال 23:

أوجد أسعار ظل قيود البرنامج الخطي الأولي التالي باستخدام البرنامج الخطي المقابل:

$$\text{Min } Z=10x_1+6x_2+3x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2X_1+X_2+4X_3 \leq 10 \\ X_1+3X_2+X_3 \geq 2 \\ 3X_1+2X_2+X_3=7 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3\ \forall \end{cases}$$

البرنامج الخطي المقابل:

$$\text{Max } Z=10+2Y_2+7Y_3$$

$$s/c \begin{cases} 2Y_1+Y_2+3Y_3 \leq 10 \\ Y_1+3Y_2+2Y_3 \geq 6 \\ 4Y_1+Y_2+Y_3 = 3 \\ Y_1 \leq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3\ \forall \end{cases}$$

والجدول التالي يُمثل جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل:

C_i^B	Y_i^B \ Cj	-10	2	7	-7	0	0	-M	-M	b_i
		Y_1	Y_2	$Y_3^{`}$	$Y_3^{``}$	S_1	S_2	R_1	R_2	
0	S_2	0	-12/5	0	0	7/10	1	-1	-1/10	7/10
-10	Y_1	1	-1/5	0	0	1/10	0	0	-3/10	1/10
7	$Y_3^{`}$	0	1/5	1	-1	2/5	0	0	-1/5	17/5
	Zj	-10	17/5	7	-7	14/5	0	0	8/5	
	Cj-Zj	0	-7/5	0	0	-9/5	0	-M	-M-8/5	Z=114/5

ويُمكن إستخراج أسعار ظل قيود البرنامج الخطي الأولي كما يلي:

- سعر ظل القيد 1 هو قيمة Y_1 في عمود الثوابت بعض ضربها في -1، أي: $-\frac{1}{10}$
- سعر ظل القيد 2 هو قيمة Y_2 في عمود الثوابت. وبما أن Y_2 متغيرة خارج الأساس فقيمتها تساوي الصفر وهي قيمة سعر الظل.
- سعر ظل القيد 3 هو قيمة الفرق بين $Y_3^{`}$ و $Y_3^{``}$ في عمود الثوابت، أي: $\frac{17}{5}-0=\mathbf{\frac{17}{5}}$

5-4- التفسير الإقتصادي للبرنامج الخطي المقابل:

يحتوي البرنامج الخطي المقابل على معلومات إقتصادية مهمة للإدارة. ويعتمد التفسير الإقتصادي للمسألة المقابلة على التفسير الإقتصادي للمسألة الأولية. ولشرح التفسير الإقتصادي للبرنامج الخطي المقابل سنستخدم كل من البرنامج الخطي المقابل للبرنامج الخطي الأولي المتحصل عليه من المثال 1، والبرنامج الخطي المقابل للبرنامج الخطي الأولي المتحصل عليه من المثال 3.

توصلنا سابقاً من المثال رقم 1 إلى البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1+7X_2$$
$$s/c\begin{cases} X_1+2X_2 \le 7 \\ 3X_1+2X_2 \le 9 \\ X_1\ge 0,\ X_2\ge 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي يعطينا فقط قيم X_1 وX_2 وقيمة دالة الهدف والوحدات غير المستغلة من ساعات العمل ورأس المال S_1 وS_2 على التوالي ولكنه لا يعطينا كلفة إنتاج كل من X_1 وX_2 والتكلفة الكلية للإنتاج. ويُمكن الحصول على هذين الأخيرين كما يلي:

البرنامج الخطي المقابل هو كما يلي:

$$\text{Min } Z = 7Y_1+9Y_2$$
$$s/c\begin{cases} Y_1+3Y_2 \ge 5 \\ 2Y_1+2Y_2 \ge 7 \\ Y_1\ge 0,\ Y_2\ge 0 \end{cases}$$

لنفترض أن:

Y_1: سعر الوحدة الواحدة من ساعات العمل.

Y_2: سعر الوحدة الواحدة من رأس المال.

تفسير دالة الهدف:

$7Y_1$: تكلفة ساعات العمل (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من ساعات العمل في كمية ساعات العمل المتوفرة)؛

$9Y_2$: تكلفة رأس المال (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من رأس المال في كمية رأس المال المتوفرة)؛

مجموع $7Y_1$ و$9Y_2$ يُمثل التكلفة الكلية.

وبالنظر لكون دالة هدف البرنامج الخطي المقابل في حالة التقليل، فالهدف إذا هو تحقيق أقل كلفة للعملية الإنتاجية بتوفر 7 ساعات عمل و9 وحدات من رأس المال، مع تحقيق نفس الأرباح المتحققة عند حل البرنامج الخطي الأولي.

تفسير القيود:

القيد الأول:

Y_1: تكلفة ساعات العمل اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من X_1؛

$3Y_2$: تكلفة رأس المال اللازم لإنتاج وحدة واحدة من X_1؛

مجموع Y_1 و$3Y_2$ يُمثل التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من X_1.

وهذا القيد يمثل التكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة من X_1 (باب واحد). وحسب ما يبينه القيد، فإن تكلفة إنتاج وحدة واحدة من X_1 لا يجب أن تقل عن قيمة الربح الوحدوي المتحقق من إنتاج وبيع وحدة واحدة منها.

القيد الثاني:

$2Y_1$: تكلفة ساعات العمل اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من X_1؛

$2Y_2$: تكلفة رأس المال اللازم لإنتاج وحدة واحدة من X_1؛

مجموع $2Y_1$ و$2Y_2$ تمثل التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من X_1.

هذا القيد يمثل التكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة من X_2 (نافذة واحدة). وحسب ما يبينه القيد، فإن تكلفة إنتاج وحدة واحدة من X_2 لا يجب أن تقل عن قيمة الربح الوحدوي المتحقق من إنتاج وبيع وحدة واحدة منها.

تحصلنا من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل على:

$Y_1 = \frac{11}{4}$: هذا يعني أن ساعة عمل واحدة تكلّف $11/4$ وحدة نقدية، وهي في نفس الوقت سعر ظل عنصر ساعات العمل. ويُمكن للمؤسسة أن تزيد من ساعات العمل المستخدمة في إنتاج X_1 وX_2 طالما كان سعر ظل عنصر ساعات العمل أكبر من المبلغ المدفوع للحصول على وحدة واحدة من هذا العنصر.

$Y_2 = \frac{3}{4}$: هذا يعني أن وحدة واحدة من رأس المال تكلّف $3/4$ وحدة نقدية، وهي في نفس الوقت سعر ظل عنصر رأس المال. ويُمكن للمؤسسة أن تزيد من رأس المال المستخدم في إنتاج X_1 وX_2 طالما كان سعر ظل عنصر رأس المال أكبر من المبلغ المدفوع للحصول على وحدة واحدة من هذا العنصر.

توصلنا سابقاً من المثال رقم 3 إلى البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Min } Z = 250X_1+350X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 5X_1+6X_2 \geq 250 \\ 4X_1+3X_2 \geq 150 \\ X_1+2X_2 \geq 70 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الخطي المقابل هو كما يلي:

$$\text{Max } Z = 250Y_1+150\,Y_2+70\,Y_3$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 5Y_1+4Y_2+Y_3 \leq 250 \\ 6Y_1+3Y_2+2Y_3 \leq 350 \\ Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0,\ Y_3\geq 0 \end{cases}$$

لنفترض أن:

Y_1: قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للدراجات.

Y_2: قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للسيارات.

Y_3: قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للشاحنات.

تفسير دالة الهدف:

$250Y_1$: حاصل ضرب قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للدراجات في حجم الطلب الشهري من نفس النوع من الإطارات.

$150Y_2$: حاصل ضرب قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للسيارات في حجم الطلب الشهري من نفس النوع من الإطارات.

$70Y_3$: حاصل ضرب قيمة إنتاج الوحدة الواحدة من الإطارات المخصصة للشاحنات في حجم الطلب الشهري من نفس النوع من الإطارات.

مجموع $250Y_1$، $150Y_2$ و $70Y_3$ يُمثل قيمة الإنتاج الكلية من الإطارات الثلاثة التي يجب أن تكون أكبر ما يُمكن.

<u>تفسير القيود:</u>

<u>القيد الأول:</u>

$5Y_1$: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للدراجات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الأول من نفس النوع من الإطارات.

$4Y_2$: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للسيارات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الأول من نفس النوع من الإطارات.

Y_3: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للشاحنات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الأول من نفس النوع من الإطارات.

مجموع $5Y_1$، $4Y_2$ و Y_3 يمثل قيمة الإنتاج الكلية في المصنع الأول. وحسب ما تشير إليه إشارة القيد فإن هذه القيمة لا يجب أن تزيد عن تكلفة التشغيل في المصنع.

<u>القيد الثاني:</u>

$6Y_1$: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للدراجات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الثاني من نفس النوع من الإطارات.

$3Y_2$: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للسيارات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الثاني من نفس النوع من الإطارات.

$2Y_3$: حاصل ضرب قيمة إنتاج وحدة واحدة من الإطارات المخصصة للشاحنات في الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الثاني من نفس النوع من الإطارات.

مجموع $6Y_1$، $3Y_2$ و $2Y_3$ يمثل قيمة الإنتاج الكلية في المصنع الثاني. وحسب ما تشير إليه إشارة القيد فإن هذه القيمة لا يجب أن تزيد عن تكلفة التشغيل في المصنع.

<u>5-5- طريقة السمبلكس المقابلة The dual simplex method:</u>

في بعض الأحيان يُمكن أن تكون قيم المتغيرات الأساسية في عمود الثوابت b_i في جدول السمبلكس سالبة وهذا ما يتعارض مع شرط عدم سالبية المتغيرات، وهنا يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس المقابلة لمعالجة هذه الحالة. وطريقة السمبلكس المقابلة لا تختلف كثيراً عن طريقة السمبلكس الإعتيادية التي تناولناها سابقاً، والإختلاف يكمن فقط في تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس والمتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

ويُمكن إستخدام طريقة السمبلكس المقابلة لمعالجة الحالات التالية والتي تكون فيها قيمة على الأقل من قيم المتغيرات الأساسية سالبة (والتي تعني وجود حل غير ممكن):

– إيجاد الحل الأمثل بدون إستخدام المتغيرات الإصطناعية؛

– عدم إمكانية تحديد عمود الإرتكاز عند جدول حل أساسي غير أمثل (شرط أن لا يكون الحل غير محدود)؛

– إيجاد القيم المثلى لبرنامج خطي أمثل لكن غير ممكن (عندما تكون جميع عناصر السطر $C_j - Z_j$ موجبة في حالة التقليل أو سالبة في حالة التعظيم، فهذا يعني أن الحل أمثل، لكن تكون هناك على الأقل قيمة من القيم الموجودة في العمود bi سالبة، فهذا يعني أن الحل غير ممكن).

ولا يُشترط لتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة تحويل البرامج الخطية الأولية إلى برامج خطية مقابلة، بل يُمكن إستخدامها مباشرة لحل البرامج الخطية الأولية.

وتتمثل خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة فيما يلي:

البحث عن صف الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:

صف الإرتكاز يقابل أكبر قيمة سالبة من بين القيم السالبة في عمود الثوابت bi، والمتغيرة التي توجد في عمود المتغيرات الأساسية في هذا الصف هي المتغيرة التي تخرج من الأساس. وفي حالة تساوي أكبر قيمتين سالبتين أو أكثر، يتم إختيار إحداهما.

البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

نقسم قيم السطر $C_j - Z_j$ فقط على القيم السالبة المقابلة لها في صف الإرتكاز، وعمود الإرتكاز هو العمود الذي يقابل أكبر قيمة من بين القيم المتحصل عليها من حاصل القسمة في حالة التقليل، أو أقل قيمة من بين القيم المتحصل عليها من حاصل القسمة في حالة التعظيم، والمتغيرة التي تمثل عمود الإرتكاز هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس (يتم تحديد أكبر قيمة أو أقل قيمة من بين جميع القيم سواء كانت سالبة أو موجبة).

وفي حالة تساوي أكبر قيمتين أو أكثر في حالة التقليل، أو تساوي أقل قيمتين أو أكثر في حالة التعظيم، يتم إختيار إحداهما.

ملاحظات:

– يكون الحل مستحيل عندما لا يُمكن تحديد عمود الإرتكاز، وبالتالي عدم إمكانية تحديد المتغيرة المرشحة للدخول إلى الأساس؛

– إذا كانت جميع قيم عمود الإرتكاز أقل من أو تساوي الصفر في حالة جدول حل أساسي غير أمثل متحصل عليه بالحل بطريقة السمبلكس الإعتيادية، فإن الحل يكون غير محدود، وبالتالي لا يتم تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة؛

– عند الإنطلاق في حل برنامج خطي بطريقة السمبلكس المقابلة، يُمكن مصادفة حل أساسي يتطلب تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية.

مثال 24:

ليكن لديك البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Max } Z=4X_1+7X_2$$

$$s/c\begin{cases}2X_1+X_2\leq 8\\3X_1+4X_2\leq 11\\X_1\geq 0,\ X_2\geq 0\end{cases}$$

ويُكتب البرنامج الخطي المقابل له كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2$$

$$s/c\begin{cases}2Y_1+3Y_2\geq 4\\Y_1+4Y_2\geq 7\\Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0\end{cases}$$

ولتجنب إستخدام المتغيرات الإصطناعية، نحول إشاراتي القيدين من "أكبر من تساوي" إلى "أقل من أو تساوي" بضرب طرفي القيدين بإشارة سالبة كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2$$

$$s/c\begin{cases}-2Y_1-3Y_2\leq -4\\-Y_1-4Y_2\leq -7\\Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0\end{cases}$$

نحول البرنامج الخطي المقابل إلى الصيغة القياسية ونقوم بحله كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2\ 0S_1+0S_2$$

$$s/c\begin{cases}-2Y_1-3Y_2+S_1=-4\\-Y_1-4Y_2+S_2=-7\\Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0\end{cases}$$

يُلاحظ أنّه في حالة تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية سيكون جدول الحل الأساسي الأول هو حل أمثل لأن دالة الهدف في حالة التقليل وجميع قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة، وفي نفس الوقت هو حل غير ممكن لأن المتغيرات الأساسية S_1 وS_2 تأخذ قيم سالبة. ولمعالجة هذه المشكلة يتم تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة كما يلي:

<u>البحث عن صف الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:</u>

من جدول الحل الأساسي الأول يُلاحظ أن أكبر قيمة سالبة من بين القيميتن السالبتين في العمود bi هي -7، وبالتالي فالصف الثاني هو صف الإرتكاز، والمتغيرة التي تخرج من الأساس هي S_2.

البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

نقسم قيم السطر $C_j - Z_j$ على القيم السالبة المقابلة لها في صف الإرتكاز كما يلي:

	Y_1	Y_2
قيمة المتغيرة في صف الإرتكاز	−1	−4
Cj−Zj	8	11
النسبة	−8	−11/4

وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فعمود الإرتكاز يقابل أكبر قيمة وهي 11/4−، وبالتالي فالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي Y_2.

عنصر الإرتكاز:

ويتحدد بتقاطع كل من صف الإرتكاز وعمود الإرتكاز.

وباقي العمليات هي نفسها التي تناولناها عند تطرقنا لطريقة السمبلكس الإعتيادية.

C_i^B	Y_i^B \ Cj	8	11	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	S_1	S_2	
0	S_1	-2	-3	1	0	-4
0	S_2	-1	-4	0	1	-7
	Zj	0	0	0	0	
	Cj-Zj	8	11	0	0	Z=0
0	S_1	-5/4	0	1	-3/4	5/4
11	Y_2	1/4	1	0	-1/4	7/4
	Zj	11/4	11	0	-11/4	
	Cj-Zj	21/4	0	0	11/4	Z=77/4

ويُلاحظ أن جميع قيم bi في جدول الحل الأساسي الثاني أصبحت كلها تتوفر فيها شرط عدم السالبية، كما أن جميع عناصر $C_j - Z_j$ كلها موجبة أو معدومة.

ونقطة الحل الأمثل هي: $Y_1 = 0, Y_2 = \frac{7}{4}, S_1 = \frac{5}{4}, S_2 = 0, Min\ Z = \frac{77}{4}$

6- تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الأمثلية):

بعد الوصول إلى الحل الأمثل لأي برنامج خطي يُعبّر عن نشاطات مشروع ما أو مصنع ما باستخدام طريقة السمبلكس، وكانت إدارة المشروع أو المصنع ترغب في إحداث بعض التغييرات على البرنامج الخطي كأن يكون على سبيل المثال زيادة في الموارد المتاحة مثل رأس المال، العمل والمواد الأولية، فإن مثل هذه التغييرات تؤدي إلى تغير البرنامج الخطي، مما يؤدي إلى ضرورة إعادة حله مرة أخرى. وبالنظر لكثرة التغيرات التي يُمكن أن تحدث، فإن عملية إعادة حل البرنامج الخطي يُمكن أن تكون مجهدة وتتطلب حسابات كثيرة، مما يؤدي إلى ضياع الوقت وإحتمال الوقوع في أخطاء حسابية. ولتجاوز مثل هذه المشكلة يتم إستخدام ما يُسمى بـ «تحليل الحساسية» أو «تحليل ما بعد الأمثلية»، والذي يدرس أثر التغيرات التي يُمكن أن تحدث في البرنامج الخطي، وذلك بالاعتماد على آخر جدول عند حله بطريقة السمبلكس (جدول الحل الأساسي الأمثل) دون اللجوء إلى إعادة حله مجدداً.

إذا، يستخدم أسلوب تحليل الحساسية جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي لتحديد المدى المسموح به في التغيرات التي تحدث في البرنامج الخطي والتي لا تؤثر على الحل الأمثل.

وسيتم دراسة العديد من أنواع التغيرات التي يُمكن أن تحدث على البرنامج الخطي:

- تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛
- تغير قيم الطرف الأيمن من القيود؛
- التغير في معاملات المتغيرات في القيود؛
- إضافة متغيرة جديدة؛
- إضافة قيد جديد.

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له (هذا المثال تم حله سابقاً):

$$\text{Min } Z=3X_1+10X_2$$
$$s/c\begin{cases}5X_1+6X_2\geq 10\\2X_1+7X_2\geq 14\\X_1\geq 0,\ X_2\geq 0\end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

6-1- تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

أ- تغير قيم معاملات المتغيرات خارج الأساس:

المتغيرة X_1 هي متغيرة خارج الأساس. فإذا إفترضنا أن قيمة معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_1 في دالة الهدف في السطر C_j ونعيد حساب قيم C_j-Z_j في السطر الأخير، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	**3+Δ**	10	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7+Δ	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

يبقى الجدول السابق حلاً أمثلاً إذا بقيت جميع قيم السطر الأخير Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل.

يُلاحظ أن السطر الأخير يحتوي على مجهولين M وΔ، إلا أننا قلنا سابقاً أن M هي قيمة موجبة كبيرة جداً، وبالتالي فإن قيمة الخلايا التي تحتوي على M تبقى موجبة. إذا يبقى الحل الأمثل إذا كانت قيمة C_1-Z_1 أكبر من أو تساوي الصفر، أي:

$$\frac{1}{7}+\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -\frac{1}{7}$$

أي:

$$\Delta\in\left[-\frac{1}{7};+\infty\right[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_1 في دالة الهدف أكبر من أو تساوي $-1/7$، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير.

وبعبارة أخرى:

$$C_1 \geq 3+\Delta \Rightarrow C_1 \geq 3-\frac{1}{7} \Rightarrow C_1 \geq \frac{20}{7}$$

أي:

$$C_1 \in \left[\frac{20}{7};+\infty\right[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة C_1 أكبر من أو تساوي $20/7$، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير.

لنفترض أن قيمة C_1 إرتفعت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1=0, X_2=2, S_1=2, S_2=0, Min\ Z=20$$

ويلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

لنفترض أن قيمة C_1 إنخفضت بوحدة واحدة (تغير خارج المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1=7, X_2=0, S_1=25, S_2=0, Min\ Z=14$$

ويلاحظ أن نقطة الحل الأمثل تغيرت. وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة معامل المتغيرة X_1 في دالة الهدف خارج المجال المسموح به، فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقاً من هذا الجدول.

ب- تغير قيم معاملات متغيرات الأساس:

المتغيرة X_2 هي متغيرة داخل الأساس. فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_2 في دالة الهدف في السطر C_j وأيضاً في العمود C_i^B، ونعيد حساب قيم السطر C_j-Z_j، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	Cj / X_i^B	3	**10+Δ**	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10+Δ	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7+2/7Δ	10+Δ	0	-10/7-1/7Δ	0	10/7+1/7Δ	
	Cj-Zj	1/7-2/7Δ	0	0	10/7+1/7Δ	M	M-10/7-1/7Δ	Z=20+2Δ

يبقى الجدول السابق حلاً أمثلاً إذا بقيت جميع قيم السطر C_j-Z_j أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل. وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر C_j-Z_j المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من

أو تساوي الصفر، أي الخليتين C_1-Z_1 و C_4-Z_4، مع إستبعاد الخلية C_6-Z_6 لأنها تبقى موجبة مهما كانت قيمة Δ، لأن قيمة M هي قيمة موجبة كبيرة جداً. إذاً يبقى الحل أمثلاً عندما:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{7}-\frac{2}{7}\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq \frac{1}{2} \\ \frac{10}{7}+\frac{1}{7}\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -10 \end{Bmatrix} \Rightarrow -10 \leq \Delta\leq \frac{1}{2}$$

أي:

$$\Delta_1\in \left[-10;\frac{1}{2}\right]$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف أكبر من أو تساوي $10-$ وأقل من أو تساوي $1/2$، فإن جدول الحل الأمثل يبقى أمثلاً.

وبعبارة أخرى:

$$10-10 \leq C_1 \leq 10+\frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq C_1 \leq \frac{21}{2}$$

أي:

$$C_2 \in \left[0;\frac{21}{2}\right]$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر من أو تساوي الصفر وأقل من أو تساوي $21/2$، فإن جدول الحل الأمثل يبقى أمثلاً.

وينبغي الإشارة إلى أنه حتى مع بقاء جدول الحل الأمثل أمثلاً في حالة كان التغير في قيمة معامل متغيرة أساسية في دالة الهدف ضمن المجال المسموح به، إلا أن قيمة دالة الهدف ستتغير، حيث تعتمد القيمة الجديدة على قيمة Δ.

لنفترض أن قيمة C_2 إنخفضت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = 0, X_2 = 2, S_1 = 2, S_2 = 0, Min\ Z = 18$$

ويُلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس وقيمها، إلا أن قيمة دالة الهدف تغيرت.

لنفترض أن قيمة C_2 إرتفعت بوحدتين (تغير خارج المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = 7, X_2 = 0, S_1 = 25, S_2 = 0, Min\ Z = 21$$

ويلاحظ تغير في المتغيرات داخل الأساس والمتغيرات خارج الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف. وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف خارج المجال المسموح به، فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقاً من هذا الجدول.

ملاحظات:

– عند دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكانت هذه الأخيرة في حالة التعظيم، فإن الحل يبقى أمثل كلما بقيت قيم السطر C_j-Z_j أقل من أو تساوي الصفر.

– عندما تتغير قيمة معامل المتغيرة (أساسية أو غير أساسية) في دالة الهدف بالقيمة Δ بالضبط، فسيكون الحل لا نهائي.

6-2- تغير قيم الطرف الأيمن من القيود:

يُمكن دراسة أثر تغير قيم الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل من خلال المثال التالي:

لنفترض أن قيمة b_1 تغيرت كما هو مُوضح في البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z=3x_1+10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1+6x_2 \geq 10+\Delta \\ 2x_1+7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يُكتب جدول الحل الاساسي الأول كما يلي:

C_i^B	Cj / X_i^B	3	10	0	0	M	M	b_i
		X1	X2	S1	S2	R1	R2	
M	R1	5	6	-1	0	1	0	10+**Δ**
M	R2	2	7	0	-1	0	1	14
	Zj	7M	13M	-M	-M	M	M	
	Cj-Zj	3-7M	10-13M	M	M	0	0	Z=24M

نعيد كتابة الجدول السابق كما يلي:

C_i^B	Cj / X_i^B	3	10	0	0	M	M	b_i+**Δ**
		X1	X2	S1	S2	R1	R2	
M	R1	5	6	-1	0	1	0	10+**1**
M	R2	2	7	0	-1	0	1	14+**0**
	Zj	7M	13M	-M	-M	M	M	
	Cj-Zj	3-7M	10-13M	M	M	0	0	Z=24M

يُلاحظ أن قيم معاملات العمود Δ لها نفس قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة S_1 (مضروبة في -1)، ونفس قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_1. وهذا يعني أن قيم العمود Δ في الجدول الأخير الأمثل ستكون نفسها قيم معاملات العمود S_1 (مضروبة في -1)، أو قيم معاملات العمود R_1 في نفس الجدول لأن جميع العمليات التي ستُجرى على صفوف الأعمدة الخاصة بالمتغيرتين S_1 وR_1 ستُجرى أيضاً على صفوف العمود Δ.

وبعبارة أخرى، بما أن التغير حصل في قيمة الطرف الأيمن من القيد رقم 1، وهو قيد إشارته أكبر من أو تساوي، وتم تحويله إلى معادلة بطرح متغيرة مكملة وإضافة متغيرة إصطناعية عند تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة القياسية، فإن دراسة أثر تغير الطرف الأيمن من القيد رقم 1 تتم باستخدام إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة S_1 (بعد ضربها في -1)، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_1.

يُعاد كتابة جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	Cj / X_i^B	3	10	0	0	M	M	b_i
		X1	X2	S1	S2	R1	R2	
10	X2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	**2+0Δ**
0	S1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	**2-Δ**
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

ولكي يبقى الحل أمثلاً وممكناً يجب أن تبقى $X_2 \geq 0$ و $S_1 \geq 0$، أي:

$$2-\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2$$

أي:

$$\Delta \in]-\infty; 2]$$

ويُلاحظ أن قيمة X_2 لن تصبح سالبة مهما كانت قيمة Δ.

وبالتالي القيم التي يمكن أن تأخذها b_1 هي:

$$b_1 \leq 10 + \Delta \Rightarrow b_1 \leq 10 + 2 \Rightarrow b_1 \leq 12$$

أي:

$$b_1 \in]-\infty; 12]$$

وأخذ Δ لقيم خارج المجال المسموح به سيُبقي على جدول الحل الأخير صفة جدول حل أمثل، لكنه سيصبح حل غير ممكن لأن قيمة متغيرة الأساس S_1 ستصبح سالبة، وهنا يُمكن تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة.

وينبغي الإشارة إلى أن أخذ Δ لقيم داخل المجال المسموح به (ماعدا الصفر الذي يعني عدم تغير الطرف الأيمن من القيد، وبالتالي بقاء نفس نقطة الحل الأمثل) لن يؤثر على متغيرات الأساس، وأيضاً لن يؤثر على قيمة X_2،لأن قيمة المعامل الموجود في عمود المتغيرة المكملة S_1 أو عمود المتغيرة الإصطناعية R_1 في صف متغيرة الأساس X_2 تساوي الصفر. ولن تتأثر أيضاً قيمة دالة الهدف لأن سعر ظل القيد رقم 1 يساوي الصفر. وستتأثر فقط قيمة S_1.

لنفترض أن قيمة الطرف الأيمن من القيد الأول إنخفضت بوحدتين (تغير داخل المجال). نقطة الحل الأمثل ستكون كما يلي:

$$X_1 = 0, X_2 = 2, S_1 = 4, S_2 = 0, Min\ Z = 20$$

ويلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس، لكن قيمة المتغيرة المكملة S_1 تغيرت من 2 إلى 4. ولم تتغير قيمة دالة الهدف لأن سعر ظل القيد الأول يساوي 0.

لنفترض أن قيمة الطرف الأيمن من القيد الأول إرتفعت بثلاثة وحدات (تغير خارج المجال). قيمة S_1 ستصبح سالبة (-1). وبتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة سنتحصل على نقطة الحل الأمثل التالية:

$$X_1 = \frac{7}{23}, X_2 = \frac{44}{23}, S_1 = 0, S_2 = 0, Min\ Z = \frac{461}{23}$$

ونجد هنا تغير في متغيرات الأساس وقيمة دالة الهدف.

لنفترض الآن أن قيمة b_2 تغيرت كما هو مُوضح في البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 + \Delta \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التغير حصل في قيمة الطرف الأيمن من القيد رقم 2. وبما أن هذا القيد إشارته أكبر من أو تساوي، فقد تم تحويله إلى معادلة بطرح متغيرة مكملة S_2 وإضافة متغيرة إصطناعية R_2 عند تحويل البرنامج الخطي إلى صيغته القياسية. وتتم دراسة أثر التغير في قيمة الطرف الأيمن من القيد رقم 2 بإستخدام إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة S_2 (بعد ضربها في -1)، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_2.

ويُعاد كتابة جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	**2+1/7Δ**
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	**2+6/7Δ**
	Zj	20/7	10	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	Z=**20+1/7Δ**

ولكي يبقى الحل أمثلاً وممكناً يجب أن تبقى $X_2 \geq 0$ و$S_1 \geq 0$، أي:

$$\left\{\begin{matrix} 2+\frac{1}{7}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -14 \\ 2+\frac{6}{7}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{7}{3} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \ \Delta \geq -\frac{7}{3}$$

أي:

$$\Delta \in \left[-\frac{7}{3}, +\infty\right[$$

وبالتالي القيم التي يمكن أن تأخذها b_2 هي:

$$b_2 \geq 14-\frac{7}{3} \Rightarrow b_1 \geq \frac{35}{3}$$

أي:

$$b_2 \in \left[\frac{35}{3}, +\infty\right[$$

ويُلاحظ أن أخذ Δ لقيم داخل المجال المسموح به (ماعدا الصفر الذي يعني عدم تغير الطرف الأيمن من القيد، وبالتالي بقاء نفس نقطة الحل الأمثل) لن يؤثر على متغيرات الأساس، لكن قيم هذه الأخيرة تتغير. وتتغير أيضاً قيمة دالة الهدف (لأن سعر ظل القيد رقم 2 يختلف عن الصفر).

وأخذ Δ لقيم خارج المجال المسموح به سيُبقي على جدول الحل الأخير صفة جدول حل أمثل، لكنه سيصبح حل غير ممكن، وهنا يُمكن تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة.

لنفترض أن قيمة الطرف الأيمن من القيد الثاني إنخفضت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1=0, X_2=\frac{13}{7}, S_1=\frac{8}{7}, S_2=0, Min\ Z=\frac{139}{7}$$

ويُلاحظ أن متغيرات الأساس بقيت نفسها، لكن تغيرت قيمها وقيمة دالة الهدف.

لنفترض أن قيمة الطرف الأيمن من القيد الثاني إنخفضت بأربعة وحدات (تغير خارج المجال). قيمة المتغيرة S_1 ستصبح سالبة (−10/7). وبتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة سنتحصل على نقطة الحل الأمثل التالية:

$$X_1=\frac{10}{23}, X_2=\frac{30}{23}, S_1=0, S_2=0, Min\ Z=\frac{330}{23}$$

ويُلاحظ تغير في متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

ويُوضح الجدول التالي طريقة إستخدام قيم معاملات أعمدة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية حسب حالة دالة الهدف وإشارة القيد لدراسة أثر تغير قيم الطرف الأيمن من القيود.

حالة دالة الهدف	إشارة القيد	طريقة إستخدام قيم معاملات أعمدة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية (التي تم على أساسها تحويل القيد إلى معادلة)
التعظيم	أقل من أو تساوي	قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة
	أكبر من أو تساوي	قيم عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في المعامل1−، أو قيم عمود المتغيرة الإصطناعية
	تساوي	قيم عمود المتغيرة الإصطناعية
التقليل	أقل من أو تساوي	قيم عمود المتغيرة المكملة
	أكبر من أو تساوي	قيم عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في المعامل 1−، أو قيم عمود المتغيرة الإصطناعية
	تساوي	قيم عمود المتغيرة الإصطناعية

<u>6−3− التغير في قيم معاملات المتغيرات في القيود:</u>

يمكن في بعض الأحيان بسبب التطورات التكنولوجية إستبدال الآلات القديمة بأخرى جديدة أكثر تطورا، أو يُمكن إحلال الآلات محل العمال، أو أيضاً إحلال العمالة الماهرة مكان العمالة الأقل مهارة، ...الخ. ومثل هذه التغيرات يُمكن أن تؤثر على ما تتطلبه المنتجات من عوامل الإنتاج الداخلة في عملية إنتاجها، وهو ما يؤدي إلى تغير في معاملات المتغيرات في القيود. وعند حدوث هذا لا بد من دراسة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

إذا السؤال المطروح هنا: ما هي الحدود الدنيا والحدود القصوى لمعاملات المتغيرات في القيود حتى يبقى الحل حلا أمثلا؟

<u>أ− معاملات المتغيرات الحقيقية داخل الأساس:</u>

<u>أ−1− في حالة قيد سعر ظله يساوي الصفر:</u>

يتم دراسة حساسية معاملات المتغيرات الحقيقية داخل الأساس للقيد الذي سعر ظله يساوي الصفر كما يلي:

في حالة قيد إشارته "أقل من أو يساوي":

− تُقسم قيمة المتغيرة المكملة (التي تمت إضافتها للقيد عند تحويل البرنامج الخطي إلى صيغته القياسية) في العمود bi في جدول الحل الأمثل على قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس، والقيمة المتحصل عليها تعبّر عن أقصى زيادة ممكنة في معامل المتغيرة الحقيقية داخل الأساس حتى يبقى الحل أمثلاً، ونرمز لها بـ Δa_{ij}^{*} ، أي:

$$\Delta a_{ij}^{*} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود bi}}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة داخل الأساس أقل من أو تساوي Δa^*_{ij}، فإن الحل يبقى أمثلاً.

– نجمع قيمة معامل المتغيرة داخل الأساس a_{ij} وقيمة أقصى زيادة ممكنة فيها Δa^*_{ij}، ولنتفرض أن حاصل الجمع هو w، أي:

$$w = a_{ij} + \Delta a^*_{ij}$$

يبقى الحل أمثلاً كلما كانت $a^*{}_{ij} \le w$

حيث $a^*{}_{ij}$ تمثل قيمة المعامل الجديد للمتغيرة داخل الأساس.

في حالة قيد إشارته "أكبر من أو يساوي":

– نُقسم قيمة المتغيرة المكملة (التي تم طرحها من القيد عند تحويل البرنامج الخطي إلى صيغته القياسية) في العمود bi في جدول الحل الأمثل على قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس، والقيمة المتحصل عليها تعبّر عن أقصى نقص في معامل المتغيرة الحقيقية داخل الأساس حتى يبقى الحل أمثلاً، ونرمز لها بـ Δa^*_{ij}، أي:

$$\Delta a^*_{ij} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود bi}}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة داخل الأساس أقل من أو تساوي Δa^*_{ij}، فإن الحل يبقى أمثلاً.

– نطرح قيمة أقصى نقص Δa^*_{ij} من قيمة معامل المتغيرة داخل الأساس a_{ij}، ولنتفرض أن حاصل الطرح هو w، أي:

$$w = a_{ij} - \Delta a^*_{ij}$$

يبقى الحل أمثلاً كلما كانت $a^*{}_{ij} \ge w$

حيث $a^*{}_{ij}$ تمثل قيمة المعامل الجديد للمتغيرة داخل الأساس.

__ملاحظة:__

جميع قيم الحل الأمثل تبقى نفسها ما عدا قيمة المتغيرة المكملة للقيد حيث تتغير بتغير w. فإذا أخذت $a^*{}_{ij}$ القيمة w، فإن قيمة المتغيرة المكملة ستساوي الصفر، وكلما إنخفضت قيمة w بواحد في حالة قيد إشارته أقل من أو يساوي، أو إرتفعت بواحد في حالة قيد إشارته أكبر من أو يساوي، سترتفع قيمة المتغيرة المكملة بقيمة المتغيرة داخل الأساس التي يُدرس حساسية معاملها. ويُلاحظ أيضاً أن المتغيرة المكملة يُمكن أن تكون خارج الأساس عندما $a^*{}_{ij} = w$ لأنه عند هذه القيمة ستكون هناك حالة التفكك.

__أ-2- في حالة قيد سعر ظله يختلف عن الصفر:__

أيّ تغير في قيمة معامل المتغيرة داخل الأساس في القيد يؤدي إلى تغير الحل الأمثل.

__ب- معاملات المتغيرات خارج الأساس:__

__ب-1- في حالة قيد سعر ظله يختلف عن الصفر:__

يتم دراسة حساسية معاملات المتغيرات الحقيقية خارج الأساس للقيد الذي سعر ظله يختلف عن الصفر كما يلي:

في حالة قيد إشارته "أقل من يساوي":

– نحسب قيمة أدنى زيادة ممكنة في معامل المتغيرة الحقيقية خارج الأساس ونرمز لها بـ Δa_{ij}^{*} كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^{*} = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية خارج الأساس في الصف } C_j\text{-}Z_j}{\text{سعر ظل القيد}}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة خارج الأساس أكبر من أو تساوي Δa_{ij}^{*}، فإن الحل يبقى أمثلاً.

– نجمع قيمة معامل المتغيرة خارج الأساس a_{ij} وقيمة أدنى زيادة ممكنة فيها Δa_{ij}^{*}، ولنتفرض أن حاصل الجمع هو w، أي:

$$w = a_{ij} + \Delta a_{ij}^{*}$$

يبقى الحل أمثلاً كلما كانت $a^{*}{}_{ij} \geq w$

حيث $a^{*}{}_{ij}$ تمثل قيمة المعامل الجديد للمتغيرة خارج الأساس.

في حالة قيد إشارته "أكبر من أو يساوي":

– نحسب قيمة أقصى زيادة ممكنة في معامل المتغيرة الحقيقية خارج الأساس ونرمز لها بـ Δa_{ij}^{*} كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^{*} = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية خارج الأساس في الصف } C_j\text{-}Z_j}{\text{سعر ظل القيد}}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة خارج الأساس أقل من أو تساوي Δa_{ij}^{*}، فإن الحل يبقى أمثلاً.

– نجمع قيمة معامل المتغيرة خارج الأساس a_{ij} وقيمة أقصى زيادة ممكنة فيها Δa_{ij}^{*}، ولنتفرض أن حاصل الجمع هو w، أي:

$$w = a_{ij} + \Delta a_{ij}^{*}$$

يبقى الحل أمثلاً كلما كانت $a^{*}{}_{ij} \leq w$

حيث $a^{*}{}_{ij}$ تمثل قيمة المعامل الجديد للمتغيرة خارج الأساس.

في حالة قيد إشارته "يساوي":

يتم دراسة حساسية قيمة معاملات المتغيرات خارج الأساس في حالة قيد إشارته "يساوي" إما على النحو الذي تناولناه في حالة قيد إشارته "أقل من أو يساوي" أو على النحو الذي تناولناه في حالة قيد إشارته "أكبر من أو يساوي" حسب حالة دالة الهدف وإشارة سعر ظل القيد كما يلي:

– دالة الهدف في حالة التعظيم وسعر ظل القيد إشارته موجبة أو دالة الهدف في حالة التقليل وسعر الظل القيد إشارته سالبة: دراسة حساسية قيمة المعاملات على نحو ما تم شرحه في حالة قيد إشارته أقل من أو يساوي؛

– دالة الهدف في حالة التعظيم وسعر ظل القيد إشارته سالبة أو دالة الهدف في حالة التقليل وسعر الظل القيد إشارته موجبة: دراسة حساسية قيمة المعاملات على نحو ما تم شرحه في حالة قيد أكبر من أو يساوي؛

ملاحظات:

- لا تتغير القيم المثلى للبرنامج الخطي عندما يبقى الحل أمثلاً؛
- أخذ معامل المتغيرة خارج الأساس للقيمة w سينتج لنا حالة ما لا نهاية الحلول المثلى.

ب-2- في حالة قيد سعر ظله يساوي الصفر:

أيّ تغير يحدث في قيمة معاملات المتغيرات خارج الأساس في القيود لا يؤثر على الحل الأمثل مهما كانت إشارة القيد.

ملاحظة عامة: جميع الحالات المتعلقة بدراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات داخل الأساس وخارج الأساس التي تم تناولها تبقى صحيحة في حالة أن جميع قيم المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل تكون أكبر من الصفر.

مثال 25:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي وجدول الحل الأمثل له كما يلي:

$$\text{Min } Z=3X_1+3/2X_2+2X_3$$

$$s/c \begin{cases} X_1+X_2+2X_3 \leq 15 \\ 3X_1+2X_2+X_3 \geq 10 \\ 2X_1+3X_2+2X_3 = 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	Cj / X_i^B	3	3/2	2	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	
0	S_1	0	0	7/5	1	1/5	-1/5	-1/5	53/5
3	X_1	1	0	-1/5	0	-3/5	3/5	-2/5	6/5
3/2	X_2	0	1	4/5	0	2/5	-2/5	3/5	16/5
	Zj	3	3/2	3/5	0	-6/5	6/5	-3/10	
	Cj-Zj	0	0	7/5	0	6/5	M-6/5	M+3/10	Z=42/5

سنحاول دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات حسب ترتيب هذه الأخيرة كما يلي:

المتغيرة X_1:

يُلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_1 هي متغيرة داخل الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{11}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة S1}}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية X1}} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{53}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_1 أقل من أو تساوي $\frac{53}{6}$، فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$w = a_{11} + \Delta a_{11}^* = 1 + \frac{53}{6} = \frac{59}{6}$$

إذا:

كلما كانت $a^*{}_{11} \leq \frac{59}{6}$، فإن الحل يبقى أمثلاً.

القيد الثاني: سعر ظله يساوي 6/5:

أيّ تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

القيد الثالث: سعر ظله يساوي 10/3−:

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_2:

يُلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_2 هي متغيرة داخل الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{12}^{*} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة S1}}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية X2}} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{53}{16}$$

$$w = a_{12} + \Delta a_{12} = 1 + \frac{53}{16} = \frac{69}{16}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 أقل من أو تساوي $\frac{69}{16}$ فإن الحل يبقى أمثلاً.

إذا:

كلما كانت $a^*{}_{12} \leq \frac{69}{16}$، فإن الحل يبقى أمثلاً.

القيد الثاني: سعر ظله يساوي 6/5:

أيّ تغير في معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

القيد الثالث: سعر ظله يساوي 10/3−:

أيّ تغير في معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_3:

يُلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_3 هي متغيرة خارج الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

الحل يبقى حلاً أمثلاً مهما تغيرت قيمة معامل المتغيرة.

القيد الثاني: سعر ظله يساوي 6/5:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أكبر أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{23}^{*}=\frac{Cj-Zj \text{ في الصف } X3 \text{ قيمة المتغيرة الحقيقية}}{\text{سعر ظل القيد}}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{7}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أقل من أو تساوي $\frac{7}{6}$ فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$w=a_{23}+\Delta a_{23}^{*}=1+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$$

إذا:

كلما كانت $a^{*}{}_{23}\leq\frac{13}{6}$، فإن الحل يبقى أمثلا.

<u>القيد الثالث: سعر ظله يساوي 10/3-:</u>

يتم دراسة حساسية معامل المتغيرة كما يلي، مع العلم أن القيد إشارته "يساوي"، ودالة الهدف في حالة التقليل:

$$\Delta a_{33}^{*}=\frac{Cj-Zj \text{ في الصف } X3 \text{ قيمة المتغيرة الحقيقية}}{\text{سعر ظل القيد}}=\frac{\frac{7}{5}}{-\frac{3}{10}}=-\frac{14}{3}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أكبر من أو تساوي $-\frac{14}{3}$، فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$w=a_{33}+\Delta a_{33}^{*}=2-\frac{14}{3}=-\frac{8}{3}$$

إذا:

كلما كانت $a^{*}{}_{33}\geq-\frac{8}{3}$، فإن الحل يبقى أمثلاً.

<u>6-4- إضافة متغيرة جديدة:</u>

عند إضافة متغيرة جديدة إلى البرنامج الخطي، فإننا ندرس تأثير هذا التغير على الحل الأمثل من خلال ضرب قيم معاملات عمود المتغيرة الجديدة في مصفوفة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية في جدول الحل الأمثل كما يلي:

في حالة قيد أقل من يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة؛

في حالة قيد أكبر من أو يساوي: نأخذ إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في 1-، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

في حالة قيد يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

ثم يتم حساب قيمة C_j-Z_j (السطر الأخير من جدول السمبلكس) في عمود المتغيرة المُضافة، وهنا نكون أمام حالتين:

قيمة C_j-Z_j سالبة: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة لا يؤثر على الحل الأمثل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن الحل سيصبح غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل؛

قيمة C_j-Z_j موجبة: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة سيجعل من الحل غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن إضافة المتغيرة الجديدة لن يؤثر على الحل الأمثل.

قيمة C_j-Z_j معدومة: سواء كانت دالة الهدف في حالة التعظيم أو التقليل، فإضافة متغيرة جديدة لن تؤثر على الحل الأمثل، لكن ستؤدي إلى الوقوع في حالة ما لا نهائية الحلول المثلى.

مثال 25:

ما هو تأثير إضافة متغيرة ثالثة (X_3) على الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي (تم حله سابقاً)؟

$$\text{Min } Z=3x_1+10x_2+5x_3$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2+2x_3\geq 10\\2x_1+7x_2+3x_3\geq 14\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0\end{cases}$$

نضرب قيم معاملات عمود المتغيرة X_3 في مصفوفة المتغيرتين الإصطناعيتين R_1 وR_2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{7}\\ -1 & \frac{6}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{4}{7}\end{bmatrix}$$

نظيف العمود المتحصل عليه إلى جدول الحل الأمثل ونحسب قيمة C_3-Z_3 كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	**5**	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	$\mathbf{X_3}$	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	X_2	2/7	1	**3/7**	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	**4/7**	1	-6/7	-1	6/7	2
	Zj	20/7	10	**30/7**	0	-10/7	0	10/7	
	Cj-Zj	1/7	0	**5/7**	0	10/7	M	M-10/7	Z=20

يُلاحظ أن قيمة C_3-Z_3 هي قيمة موجبة (5/7). وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإن الحل يبقى أمثل بنفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

إذا إفترضنا أن قيمة معامل المتغيرة المُضافة في دالة الهدف هي 4، ففي هذه الحالة تكون قيمة C_3-Z_3 هي (−2/7)، وبالتالي سيصبح الحل غير أمثل، وفي هذه الحالة ينبغي متابعة الحل حيث تدخل المتغيرة x_3 إلى الأساس في جدول الحل الموالي ويتم الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل الجديد التالي:

$$X_1=\frac{2}{11}, X_2=0, X_3=\frac{50}{11}, S_1=0, S_2=0, Min\ Z=\frac{206}{11}$$

5-6- إضافة قيد جديد:

إذا إفترضنا أننا أضفنا قيداً ثالثاً إلى برنامج خطي يتكون من قيدين (تم حله سابقاً)، حيث يتشكل لنا البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$\text{Min } Z=3x_1+10x_2$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2\geq 10\\2x_1+7x_2\geq 14\\x_1+5x_2\geq 8\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

نعوض قيم X_1 وX_2 التي تم الحصول عليها سابقاً عند حل البرنامج الخطي وهي على التوالي 0 و2 في القيد الثالث المُضاف كما يلي:

$$X_1 + 5X_2 \geq 8 \Rightarrow 0 + 5(2) \geq 8 \Rightarrow 10 \geq 8$$

يُلاحظ أن القيد مُحقق، وبالتالي فنقطة الحل الأمثل لا تتغير.

لنفترض قيداً ثالثاً جديداً آخر حيث يصبح البرنامج الخطي الجديد كما يلي:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 10x_2$$
$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نعوض قيم X_1 وX_2 في القيد الثالث المُضاف كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 \geq 8 \Rightarrow 0 + 3(2) \geq 8 \Rightarrow 6 \geq 8$$

يُلاحظ أن القيد الثالث الجديد في هذه الحالة غير محقق. ولدراسة تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل نقوم بما يلي:

يتم تحويل القيد إلى معادلة كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 - S_3 + R_3 = 8$$

من جدول الحل الأمثل (قبل إضافة القيد الجديد) نستخرج قيم المتغيرات الحقيقية الأساسية.

يُلاحظ أن المتغيرة الحقيقية الوحيدة داخل الأساس هي X_2، وقيمتها هي كما يلي:

$$\frac{2}{7}X_1 + X_2 + 0S_1 - \frac{1}{7}S_2 + 0R_1 + \frac{1}{7}R_2 = 2 \Rightarrow \boldsymbol{X_2} = 2 - \frac{2}{7}X_1 - 0S_1 + \frac{1}{7}S_2 - 0R_1 - \frac{1}{7}R_2$$

حيث ضربنا قيم معاملات الصف الأول (صف المتغيرة الأساسية X_2) في المتغيرات المقابلة لها، ثم إستنتجنا قيمة X_2.

الخطوة التالية هي تعويض قيمة X_2 في القيد الثالث الجديد المُحوّل إلى معادلة والمُتحصل عليه سابقاً كما يلي:

$$X_1 + 3\left(2 - \tfrac{2}{7}X_1 - 0S_1 + \tfrac{1}{7}S_2 - 0R_1 - \tfrac{1}{7}R_2\right) - S_3 + R_3 = 8$$

ونتحصل على معادلة القيد الثالث الجديد كما يلي:

$$\frac{1}{7}X_1 + \frac{3}{7}S_2 - S_3 - \frac{3}{7}R_2 + R_3 = 2$$

نضيف هذا القيد إلى جدول الحل الأمثل مع إدخال المتغيرة الإصطناعية R_3 إلى الأساس. كما ينبغي أيضاً إضافة العمودين الخاصين بـ S_3 وR_3. وبعد هذه العملية يُلاحظ أن الجدول أصبح غير أمثل، لهذا ينبغي الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	0	0	0	M	M	M	b_i	النسبة
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3		
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	0	0	1/7	0	2	-
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	0	-1	6/7	0	2	-
M	R_3	1/7	0	0	3/7	-1	0	-3/7	1	2	14/3
	Zj	20/7+1/7M	10	0	-10/7+3/7M	-M	0	10/7-3/7M	M		
	Cj-Zj	1/7-1/7M	0	0	10/7-3/7M	M	M	10/7M-10/7	0	Z=20+2M	
10	X_2	1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	8/3	8
0	S_1	-3	0	1	0	-2	-1	0	2	6	-
0	S2	1/3	0	0	1	-7/3	0	-1	7/3	14/3	14
	Zj	10/3	10	0	0	-10/3	0	0	10/3		
	Cj-Zj	-1/3	0	0	0	10/3	M	M	M-10/3	Z=80/3	
3	X_1	1	3	0	0	-1	0	0	1	8	
0	S_1	0	9	1	0	-5	-1	0	5	30	
0	S_2	0	-1	0	1	-2	0	-1	2	2	
	Zj	3	9	0	0	-3	0	0	3		
	Cj-Zj	0	1	0	0	3	M	M	M-3	Z=24	

والجدول الأخير هو جدول الحل الأمثل، وتتمثل نقطة الحل الأمثل الجديدة بعد إضافة القيد الثالث فيما يلي:

$$X_1 = 8, X_2 = 0, S_1 = 30, S_2 = 2, Min\ Z = 24$$

ملاحظة: يُمكن تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج المقابل إذا حصل ما يستوجب ذلك عند إضافة قيد جديد.

تمرين مقترح:

تريد إحدى المؤسسات إنتاج ثلاثة أنواع من الملابس باستخدام ثلاثة أنواع من الأقمشة. يتطلب إنتاج وحدة واحدة من النوع الأول من الملابس مترين ونصف من النوع الأول من الأقمشة، ومترين من النوع الثاني من الأقمشة. ويتطلب إنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني من الملابس متر ونصف من النوع الثاني من الأقمشة، وثلاثة أمتار من النوع الثالث من الأقمشة. أما النوع الثالث من الملابس فيتطلب إنتاج وحدة واحدة منه نصف متر من النوع الأول من الأقمشة، متر من النوع الثاني من الأقمشة، ومتر من النوع الثالث من الأقمشة.

تملك المؤسسة في مخازنها من الأنواع الثلاثة من الأقمشة 60 متر، 49 متر، و33 متر على التوالي، مع العلم أن النوع الأول من الأقمشة يعرف نذرة حادة في السوق ويصعب التموين منه بسهولة، أما النوع الثاني من الأقمشة فيتميز بالوفرة وانخفاض سعره في السوق، ويمكن التموين منه في أي وقت، وبسهولة تامة، في حين أن النوع الثالث من الأقمشة، فالمؤسسة تريد التخلص من مخزونها منه بسرعة نظراً لمخاطر تلفه.

تُقدّر تكلفة إنتاج وحدة واحدة من كل نوع من الأنواع الثلاثة من الملابس بـ 13 وحدة نقدية، 9.5 وحدة نقدية، و11.5 وحدة نقدية على التوالي. أما سعر بيع وحدة واحدة من كل نوع من الأنواع الثلاثة من الملابس فهي 15 وحدة نقدية، 12.5 وحدة نقدية، و13 وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة؟
2. أوجد التشكيلة المثلى من الأنواع الثلاثة من الملابس لتحقيق أعظم ربح للمؤسسة بطريقة السمبلكس؟
3. أوجد البرنامج الخطي المقابل للبرنامج الخطي المتحصل عليه في المطلوب رقم 1؟
4. باستخدام ما تم التوصل إليه في المطلوب رقم 3، أوجد أسعار ظل قيود البرنامج الخطي الأولي؟
5. ما هو تأثير إنخفاض سعر بيع النوع الثاني من الملابس إلى 11.5 وحدة نقدية؟
6. ما هو تأثير تلف أربعة أمتار من النوع الثالث من الأقمشة؟
7. إذا إفترضنا أن إنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني من الملابس أصبح يتطلب مترين من النوع الثاني من الأقمشة، ما هو تأثير هذا التغير؟
8. تخطط إدارة المؤسسة للشروع في إنتاج نوع رابع من الملابس، حيث يتطلب إنتاج وحدة واحدة من هذا النوع متر ونصف من النوع الثاني من الأقمشة، ومتر من النوع الثالث من الأقمشة، مع العلم أن الربح المتحقق من إنتاج وبيع وحدة واحدة من المنتج الرابع هو 2.5 وحدة نقدية. ما هو تأثير هذا التغير؟
9. من أجل تحسين جودة منتجاتها، قررت المؤسسة إستخدام نوع رابع من الأقمشة ذو جودة عالية. ونظراً لنذرة هذا النوع من الأقمشة وكثرة الطلب عليه، إشترت المؤسسة بصعوبة شديدة 14 متر فقط. ويُستخدم هذا النوع من الأقمشة في إنتاج النوعين الثاني والثالث من الملابس، حيث يتطلب إنتاج وحدة واحدة من كل نوع متر ونصف متر على التوالي. ما هو تأثير هذا القرار؟

10. إذا إفترضنا أن المؤسسة تريد التخلي عن إنتاج النوع الثالث من الملابس، وأن المقادير المتوفرة من الأنواع الثلاثة من الأقمشة هي 15 متر، 6 أمتار، و6 أمتار على التوالي، وأن جميع معطيات المسألة الأخرى تبقى كما هي. أوجد التشكيلة المثلى من النوعين الأول والثاني من الملابس لتعظيم ربح المؤسسة بالطريقة البيانية؟

مراجع الفصل:

– د. محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.

– أ. د. محمد سالم الصفدي: بحوث العمليات: تطبيق وخوارزميات، الطبعة الأولى، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 2009.

– أ. د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون: بحوث العمليات، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.

– د. منعم زمزير الموسوي: بحوث العمليات: مدخل علمي لإتخاذ القرارات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. لحسن عبد الله باشيوة: بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمّان، الأردن، 2011.

– محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات: مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة الثانية، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2009.

– د. حامد سعد نور الشمرتي: بحوث العمليات "مفهوماً وتطبيقاً"، الطبعة الأولى، مكتبة الذاكرة، بغداد، العراق، 2010.

– أحمد محمد الهزاع الصمادي: أساسيات بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار قنديل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. دلال صادق الجواد ود. حميد ناصر الفتال: بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

– أ.د. أنمار أمين البرواري ود. عربية عبد الرحمن داؤد: الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والإقتصادية، الطبعة الأولى، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.

– د. سهيلة عبد الله سعيد: الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.

– أ. د. سليمان خالد عبيدات: الأساليب الكمية في الإدارة، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2015.

– دونالد س. واتسون وماري أ. هولمان: نظرية السعر واستخداماتها، ترجمة ضياء مجيد الموسوي، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، بدون تاريخ.

– د. عثمان بن إبراهيم السلوم: علم الإدارة واستخدام الحاسوب، النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2010. تاريخ الإسترداد 11 أكتوبر، 2020، من https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/217_qua-lm_ldr_wstkhdm_lhsb.pdf.

– استخدام الاساليب الكمية وبحوث العمليات في خفض التكاليف، مجلة المحاسب العربي، مركز المحاسب العربي للتدريب وتكنولوجيا المعلومات، مصر. تاريخ الإسترداد 16 فيفري، 2021، من https://www.aam-web.com/ar/create_pdf/accounting/45

- Yadolah Dodge: Optimisation appliquée, Springer-Verlag, France, 2005.

- Robert Faure et al. : Précis de recherche opérationnelle: Méthode et exercices d`application, 7e édition, Dunod, Paris, 2014.

- Jacques Teghem: Recherche opérationnelle, Tome 1: Méthodes d'optimisation, Collection Références sciences, Ellipses Édition.

- http://www.phpsimplex.com/

الفصل الثاني:

مشاكل النقل

1- مفهوم مشكلة النقل:

مشكلة النقل هي حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، تهدف لتحديد عدد الوحدات المنقولة من أيّة بضاعة من مصادر عرضها إلى الأماكن التي تطلبها، بحيث تكون قيمة تكلفة النقل أقل ما يُمكن في حالة كان الهدف هو التقليل، أو تكون قيمة الربح أو العائد المتحقق من عملية النقل في أقصى حده في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويُعتمد على مسائل النقل في حل العديد من المشاكل الإقتصادية، وفي العديد من القطاعات مثل قطاع نقل البضائع. وبالرغم من أنّه يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس في حل مشاكل النقل، إلّا أن المواصفات الخاصة التي تتمتع مشاكل النقل تُمكّننا من إستخدام طرق خاصة أسهل بكثير. وهناك عناصر ينبغي توفرها في مشاكل النقل حتى يُمكن حلها باستخدام طريقة حل مشكلة النقل:

- مواقع التوزيع (مصانع، مستودعات،...)، لكل منها كمية عرض محددة؛
- مواقع الطلب (مراكز تجارية، زبائن،...)، لكل منها كمية طلب محددة؛
- هناك تكلفة (ربح) نقل محددة مسبقاً لنقل البضاعة من مواقع التوزيع إلى مواقع الطلب؛
- كمية العرض يجب أن تساوي تماماً كمية الطلب.

2- صياغة مشكلة النقل:

لنفترض أن مؤسسة تملك m وحدة لتوزيع بضاعة معينة، وتقع الوحدات في أماكن متباعدة، حيث:

الوحدة الأولى تقوم بعرض الكمية a_1؛

الوحدة الثانية تقوم بعرض الكمية a_2؛

.
.
.

الوحدة m تقوم بعرض الكمية a_m.

ويُطلق على الوحدات **بالمنابع**.

تقوم المؤسسة من خلال وحداتها بتموين n منطقة بالبضاعة، حيث تقع هذه المناطق في أماكن متباعدة، حيث:

الكمية التي تطلبها المنطقة الأولى هي b_1؛

الكمية التي تطلبها المنطقة الثانية هي b_2؛

.
.
.

الكمية التي تطلبها المنطقة n هي b_n.

ويُطلق على المناطق **بالمصاب**.

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من الوحدة i إلى المنطقة المراد تموينها j هي C_{ij}.

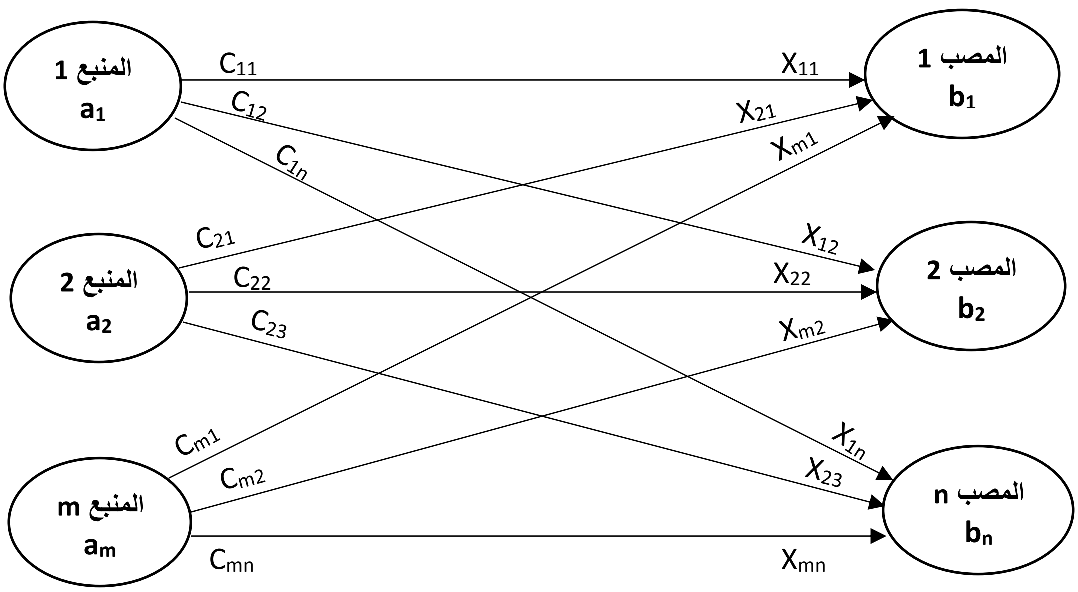
ويُمكن تمثيل أيّة مشكلة نقل من خلال جدول النقل التالي:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	. . .	المصب n	الكميات المعروضة
المنبع 1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
المنبع 2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{23}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
المنبع m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	b_3	. . .	b_n	Q_S / Q_D

وينقسم جدول النقل إلى قسمين: جدول التكاليف وجدول التوزيع. فالأول يُظهر التكاليف الوحدوية لنقل البضاعة من المنابع إلى المصاب والمبينة في أعلى كل خانة إلى اليمين، فمثلا نقل وحدة واحدة من المنبع 1 إلى المصب 1 هي C_{11} وحدة نقدية، ونقل وحدة واحدة من المنبع m إلى المصب n هي C_{mn} وحدة نقدية، أما الثاني فيُظهر الكميات X_{ij} المنقولة من المنابع إلى المصاب وهي موضحة أسفل كل خلية إلى اليسار. ويكون المطلوب هو تلبية طلب المصاب بالبضاعة من خلال ما تعرضه المنابع بأقل تكلفة كلية ممكنة.

ويُمكن تمثيل مشكلة النقل أيضاً من خلال الشكل التالي:

تمثيل مشكلة النقل بيانياً



وينطبق الشرح السابق على مشكلة النقل التي هدفها هو تعظيم الربح أو العوائد، ويتم إستبدال فقط تكاليف نقل الوحدة الواحدة من البضاعة C_{ij} بالربح أو العائد المتحقق من نقل وحدة واحدة من البضاعة P_{ij}.

ويتم كتابة الصيغة الرياضية لمشكلة النقل حسب الهدف من المشكلة كما يلي:

أ- حالة التقليل:

التكلفة الكلية التي تتحملها المؤسسة من مشكلة النقل هي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,2,.....,m$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,2,.....,n$$

حيث n هو عدد المصاب.

وتُكتب الصياغة الرياضية لمشكلة النقل في حالة التقليل كما يلي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i=1,2,.....,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j=1,2,.....,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & \\ X_{ij} \geq 0 & \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها تخفيض التكاليف الكلية إلى أدنى حد.

ب- حالة التعظيم:

الربح الكلي الذي تحققه المؤسسة من مشكلة النقل هو:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,2,.....,m$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\dots\dots,n$$

حيث n هو عدد المصاب.

ويُكتب النموذج الرياضي لمشكلة النقل بصيغة البرمجة الخطية في حالة التعظيم كما يلي:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i=1,2,\dots\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j=1,2,\dots\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & \\ X_{ij} \geq 0 & \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها الوصول بالربح إلى أقصى حد.

مثال 1:

تقوم إحدى المؤسسات المختصة في إنتاج وتوزيع مادة الدقيق بتموين 4 مناطق متباعدة بهذه المادة من خلال وحداتها الثلاثة المتواجدة في أماكن متباعدة أيضا. طاقة العرض لكل وحدة من وحدات المؤسسة من مادة الدقيق هي 120 طن، 200 طن و180 طن على التوالي. أما ما تطلبه كل منطقة من مادة الدقيق فهي 90 طن، 160 طن، 170 طن و80 طن على التوالي.

تكلفة نقل كل طن من كل وحدة من الوحدات التي تتكون منها المؤسسة إلى كل منطقة موضحة في الجدول التالي (وحدة نقدية):

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	4	7	3	8
الوحدة 2	6	5	7	9
الوحدة 3	9	6	7	5

المطلوب: اكتب جدول المسألة؟

الحل:

يُكتب جدول مسألة النقل كما يلي:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	الكميات المعروضة
الوحدة 1	4 X_{11}	7 X_{12}	3 X_{13}	8 X_{14}	120
الوحدة 2	6 X_{21}	5 X_{22}	7 X_{23}	9 X_{24}	200
الوحدة 3	9 X_{31}	6 X_{32}	7 X_{33}	5 X_{34}	180
الكميات المطلوبة	90	160	170	80	**500** / **500**

ويُلاحظ توفر شرط تساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة.

3- حل مشاكل النقل باستخدام الشبكات:

يُعتبر الأسلوب البياني أحد الطرق المستخدمة لحل مشاكل النقل. والحل الشبكي لمشاكل النقل لا يعتمد على المصفوفات العددية، بل يعتمد على تمثيل وحل هذه المشاكل على الشبكات.

3-1- تمثيل مشكلة النقل على الشبكة:

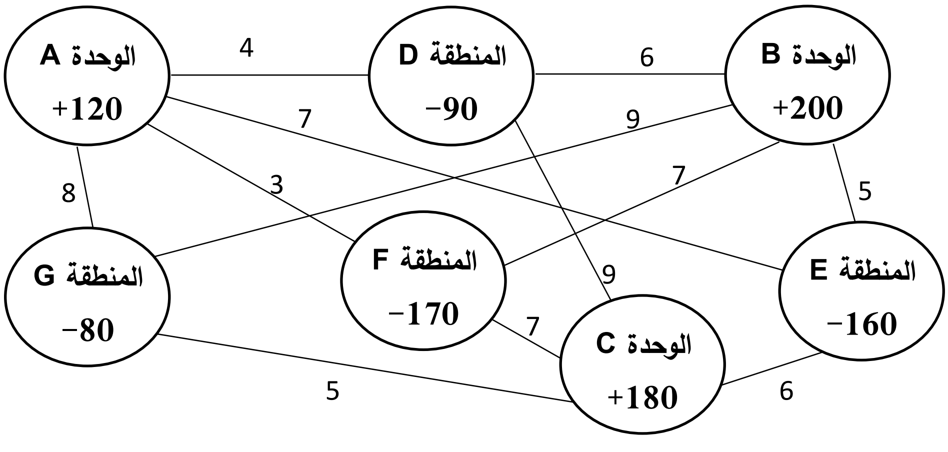
يتم تمثيل مختلف بيانات مشكلة النقل (الكميات المعروضة، الكميات المطلوبة والتكاليف الوحدوية أو الأرباح الوحدوية من كل منبع نحو كل مصب) على الشبكة كما يلي:

– المصاب أو المنابع يتم تمثيلها من خلال دوائر، كل دائرة تمثل منبع أو مصب. ويتم التعبير عن المنبع بوضع طاقة العرض بإشارة موجبة داخل الدائرة، في حين يتم التعبير عن المصب بوضع إشارة سالبة أمام كمية الطلب داخل الدائرة. ويتم وضع إسم كل منبع وكل مصب داخل الدائرة أو فوق الدائرة.

– خطوط تمثل إتجاهات الإتصال بين المنابع والمصاب، وهذه الخطوط تعني الطرق أو الممرات أو المسارات التي يُمكن أن تسلكها البضاعة بتكلفة وحدوية أو ربح وحدوي من كل منبع إلى كل مصب. ويُمكن للشحنة أن تمر عبر منبع آخر أو مصب آخر، وبالتالي تصبح التكلفة (الربح) مساوية لمجموع تكلفة (ربح) الممرين أو المسارين.

إذا تُعطى شروط وقيود مشكلة النقل مباشرة على الشبكة من خلال التعبير عنها بدوائر وخطوط إتصال.

ويُمكن تمثيل المثال 1 على الشبكة كما يلي:



واستبدلنا الأرقام المعبّرة عن ترتيب الوحدات والمناطق بحروف لتساعدنا على شرح حل المثال لاحقاً.

3-2- عرض حل مشكلة النقل بطريقة الشبكة:

3-2-1- إيجاد خطة التوزيع الأولى:

إن الهدف من تمثيل مشكلة النقل على الشبكة هو البحث عن الحل الأمثل لها، أي خطة التوزيع التي تحقق أقل تكلفة كلية في حالة كان الهدف هو التقليل، أو التي تحقق أقصى ربح في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويتم البحث عن الحل الأمثل لمشكلة النقل باستخدام الشبكة مباشرة وبالطريقة المرحلية، حيث أن كل مرحلة من مراحل الحل تمثل خطة توزيع أكثر مثلوية من خطة التوزيع السابقة لها.

وتبدأ عملية البحث عن الحل الأمثل بوضع الخطة الأولية للحل على الشبكة مباشرة، أي خطة التوزيع الأولى، بحيث يتم توزيع كامل الكميات المعروضة وتلبية كامل الكميات المطلوبة. ويُراعى في هذه العملية التكاليف الدنيا في نقل الشحنات بين المنابع والمصاب في حالة التقليل، وأعلى الأرباح أو الإيرادات في حالة التعظيم. ويتم وضع هذه الشحنات ضمن أسهم تبين إتجاه الشحنة وحجمها.

ويجب على كل خطة توزيع (الخطة الأولى والخطط اللاحقة) أن تحقق الشروط التالية:

- يجب توزيع كامل الكمية المعروضة من طرف المنابع، وتلبية كامل الكمية المطلوبة من طرف المصاب؛
- يجب أن تكون كل دائرة في شبكة النقل موصولة مع باقي الشبكة بشحنة واحدة على الأقل، ويتمثل هذا الوصل من خلال أسهم الشحنات؛
- عدد أسهم الشحنات في شبكة النقل يجب أن يكون دائماً مساوياً إلى مجموع عدد الدوائر ناقص واحد؛
- الأسهم لا يجب أن تشكل حلقة مغلقة، بحيث تعود الشحنة إلى نفس المكان الذي خرجت منه؛
- لا يُمكن لدائرتين أن تتصلان بأكثر من سهم واحد، وعند الحاجة تُجمع الشحنات المارة من نفس الخط في قيمة واحدة فقط توضع على السهم الوحيد للشحنة المارة بين دائرتين.

وبتطبيق ما سبق على المثال رقم 1 الذي تم تمثيله على الشبكة يُمكن إيجاد خطة التوزيع الأولى كما يلي (مع التذكير أننا في حالة تقليل التكلفة):

– نبحث عن أقل تكلفة شحن على شبكة النقل، ونجد أن قيمة هذه التكلفة هي 3 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة F. الكمية التي تطلبها المنطقة F هي 170 طن، في حين أن طاقة العرض للوحدة A هي 120 طن. في هذه الحالة تموّن الوحدة A المنطقة F بكامل طاقة عرضها، وبالتالي تبقى المنطقة F في حاجة لكمية 50 طن. ويتم تمثيل هذه العملية من خلال وضع سهم إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F، وكمية الشحنة التي يحملها السهم هي 120 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على شبكة النقل هي 4 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة D. وبما أن الوحدة A إستنفدت كامل طاقة عرضها، فإن هذا المسار لا يمكن تمرير شحنة عبره.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 5 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة E، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة G. نحدد الكمية التي يُمكن إمرارها عبر كل مسار من هذين المسارين ونختار المسار الذي يُمكن إمرار عبره أكبر كمية. فيما يخص المسار الأول، الكمية التي تطلبها

المنطقة E هي 160 طن، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة B لأن طاقة عرضها هي 200 طن. إذا كمية الشحنة التي يُمكن إمرارها عبر هذا المسار هي 160 طن. أما فيما يخص المسار الثاني، الكمية التي تطلبها المنطقة G هي 80 طن، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة C لأن طاقة عرضها هي 180 طن. إذا كمية الشحنة التي يُمكن إمرارها عبر هذا المسار هي 80 طن. وبما أن الشحنة التي يُمكن إمراراها على المسار الأول أكبر من الشحنة التي يُمكن إمرارها على المسار الثاني، إذا نختار المسار الأول، أي المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة E. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 160 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً قيمتها هي نفس قيمة التكلفة الأقل السابقة وهي 5 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة G، وهو المسار الذي لم يتم إختياره في الخطوة السابقة. الكمية التي تطلبها المنطقة G وهي 80 طن يُمكن تلبيتها بالكامل من طرف الوحدة C التي طاقة عرضها 180 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة G يحمل شحنة بـ 80 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 6 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة E، والمسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة D. المسار الأول لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن المنطقة E تحصلت على كامل الكمية المطلوبة. أما فيما يخص المسار الثاني، فالكمية التي تطلبها المنطقة D هي 90 طن، في حين أن الكمية التي مازالت تعرضها الوحدة B هي 40 طن فقط، لأن هذه الوحدة، والتي طاقة عرضها 200 طن، قامت بتموين المنطقة E بـ 160 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 40 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 7 وحدات نقدية والموجودة على 3 مسارات: المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة E، المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة F، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة F. ويُلاحظ أن المسارين الأول والثاني لا يُمكن إمرار عبرهما أية شحنة لأن الوحدتين A وB وزعتا كامل الكميتان اللتين تعرضانها، بالإضافة إلى أن المنطقة E إستوفت كامل الكمية التي تطلبها. أما فيما يخص المسار الثالث، المنطقة F مازالت في حاجة لـ 50 طن، بعد أن تحصلت على 120 طن من الوحدة A، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة C التي مازالت تمتلك كمية بـ 100 طن بعد أن موّنت المنطقة G بـ 80 طن.

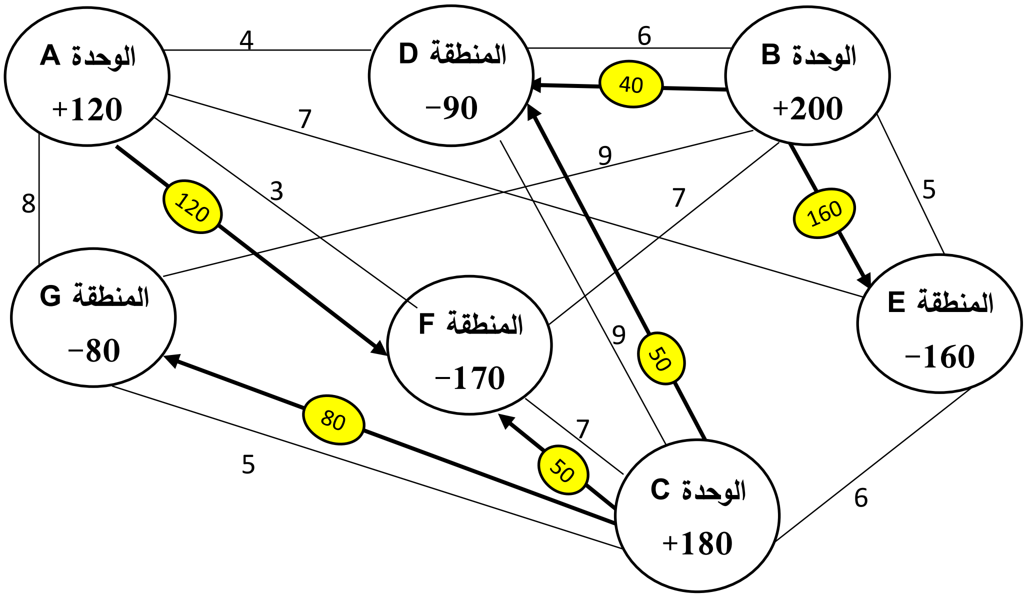
– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 8 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة G. ويُلاحظ أن هذا المسار لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن الوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها، كما أن المنطقة G إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 9 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة G، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة D. المسار الأول لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن الوحدة B إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها، والمنطقة G إستوفت كامل الكمية التي تطلبها. أما فيما يخص المسار الثاني، المنطقة D مازالت في حاجة لـ 50 طن، بعد أن تحصلت على 40 طن من الوحدة B، وهي كمية يُمكن الحصول عليها بالكامل من الوحدة C التي مازالت تملك كمية بـ 50 طن بعد أن موّنت كل من المنطقة G

والمنطقة F بـ 80 طن و50 طن على التوالي. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 50 طن.

وبهذا تكون الوحدات الثلاثة قد وزعت كامل الكميات التي تعرضها، والمناطق الأربعة قد تحصلت على كامل الكميات التي تطلبها كما هو موضح على شبكة النقل التالية التي تمثل خطة التوزيع الأولى:

خطة التوزيع الأولى



وتُحسب قيمة التكلفة الكلية عند خطة التوزيع الأولى بجمع مضروب كل شحنة بالتكلفة الوحدوية المقابلة لها على نفس المسار كما يلي:

$$\text{Min Z} = (40 \times 6) + (160 \times 5) + (50 \times 9) + (50 \times 7) + (120 \times 3) + (80 \times 5) = \mathbf{2600}$$ وحدة نقدية

وكما وضحناه أعلاه، فإن أية خطة توزيع يجب أن تتوفر فيها عدد من الشروط والتي سنتحقق من توفرها في هذه الخطة:

- جميع الوحدات وزعت كامل الكميات التي تعرضها، وجميع المناطق تحصلت على كامل الكميات المطلوبة، وبالتالي لا يوجد فائض أو عجز في الكميات المعروضة أو المطلوبة؛
- لا توجد أية دائرة غير موصولة بسهم (شحنة)؛
- عدد الأسهم هو 6 أسهم، أي بعدد الدوائر التي عددها سبعة ناقص واحد؛
- الأسهم لم تشكل حلقة مغلقة؛
- لا توجد دائرتين تتصلان بأكثر من سهم واحد.

إذا جميع الشروط متوفرة في خطة التوزيع الأولى.

<u>3-2-2- إختبار مثلوية خطة التوزيع وتمثيل خطة التوزيع الموالية:</u>

لإختبار ما إذا كانت أية خطة توزيع مثلى أو لا، ينبغي أولاً حساب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة من دوائر شبكة النقل. ولحساب هذه القيم نفترض عند إحدى الدوائر قيمة، ويُفضّل أن تكون قريبة من تكاليف النقل

(أرباح النقل)، لكن يُمكن أن نفترض أية قيمة، ثم نقوم بإضافة تكاليف النقل (أرباح النقل) إلى هذه القيمة أو طرحها منها حسب إتجاه السهم (كما سنبينه أدناه)، حيث يجب أن تتوفر لدينا قيمة فرضية أمام كل دائرة.

سنعيد رسم شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى، ونفترض القيمة 10 كقيمة لفرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A، ثم نحسب باقي قيم فرضيات الدوائر كما يلي:

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A: تم إفتراض القيمة **10**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة A إلى الدائرة التي تمثل المنطقة F، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 3 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **10+3=13**.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل الوحدة C: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة F، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 7 وحدات نقدية. نتحصل على قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C بطرح قيمة تكلفة الشحن الوحدوية من قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F، أي **13−7=6**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة G: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة G، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 5 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة G هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **6+5=11**.

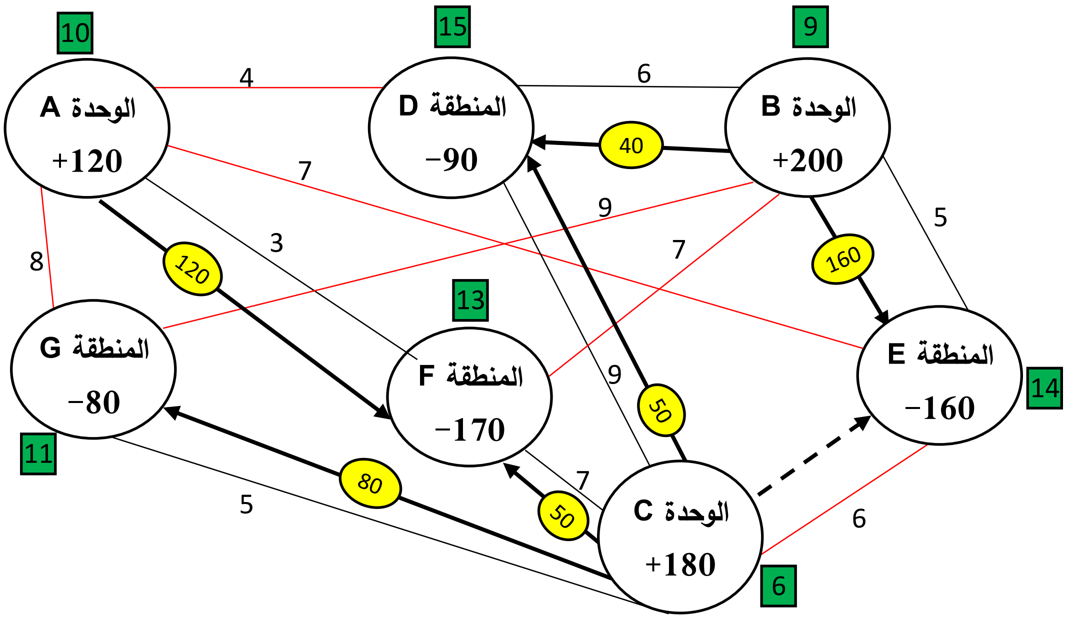
قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة D، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 9 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **6+9=15**.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل الوحدة B: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة B إلى الدائرة التي تمثل المنطقة D، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 6 وحدات نقدية. نتحصل على قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة B بطرح قيمة تكلفة الشحن الوحدوية من قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D، أي **15−6=9**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة B إلى الدائرة التي تمثل المنطقة E، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 5 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة B وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **9+5=14**.

وجميع قيم فرضيات الدوائر موضّحة على شبكة النقل بمربعات خضراء أمام كل دائرة كما يلي:

خطة التوزيع الأولى



ويُمكن إستخدام قيم فرضيات الدوائر في حساب قيمة التكلفة الكلية من خلال جمع حاصل ضرب كل قيمة فرضية دائرة بمحتوى الدائرة المقابلة لها، مع المحافظة على الإشارة الجبرية كما يلي:

Min Z=[10x(120)]+[13x(−170)]+[6x(180)]+[11x(−80)]+[15x(−90)]+[9x(200)]+[14x(−160)]

=|−2600|= **2600 وحدة نقدية**

حيث نأخذ القيمة المتحصل عليها بقيمتها المطلقة.

وبعد إيجاد قيم فرضيات الدوائر، يتم إختبار مثلوية كل خطة توزيع بحساب قيم على المسارات التي لا تحمل شحنات يُرمز لها بـ E_{ij}، وتكون خطة التوزيع مثلى عندما تحقق جميع الفرضيات الشرط $E_{ij} \geq 0$ في حالة كان الهدف هو التقليل، و $E_{ij} \leq 0$ في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويتم حساب قيم E_{ij} حسب العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{E_{ij} = C_{ij} - (V_j - U_i)}$$

حيث:

E_{ij}: مقياس مثلوية التوزيع من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة؛

C_{ij}: تكلفة الشحن من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة. وفي حالة التعظيم نستبدل C_{ij} بـ P_{ij}؛

V_j: قيمة فرضية الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة. والدائرة (j) تمثل دائرة يمكن أن تتلقى شحنة؛

U_i: قيمة فرضية الدائرة (i) على مسار لا يحمل شحنة. والدائرة (i) تمثل دائرة يمكن أن تكون مصدر شحنة؛

نقوم بحساب قيم E_{ij} (المسارات التي لا تحمل شحنات تم توضيحها باللون الأحمر على شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى أعلاه) كما يلي :

$$E_{AD} = 4 - (15 - 10) = -1$$
$$E_{AG} = 8 - (11 - 10) = 7$$
$$E_{AE} = 7 - (14 - 10) = 3$$
$$E_{CE} = 6 - (14 - 6) = \mathbf{-2}$$
$$E_{BG} = 9 - (11 - 9) = 7$$
$$E_{BF} = 7 - (13 - 9) = 3$$

ويُلاحظ أن هناك قيمتين سالبتين وهما $E_{AD}=-1$ و $E_{CE}=-2$، وهذا يعني أن خطة التوزيع الأولى غير مثلى. يتم إختيار أكبر قيمة سالبة وهي 2−، ويتم إعداد خطة التوزيع الثانية كما يلي:

– بما أن القيمة السالبة التي تم إختيارها تم حسابها على المسار الذي لا يحمل شحنة والرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة E، فإنه يتم وضع سهم جديد إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E (تم تمثيل السهم بخط متقطع على شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى للتوضيح فقط)؛

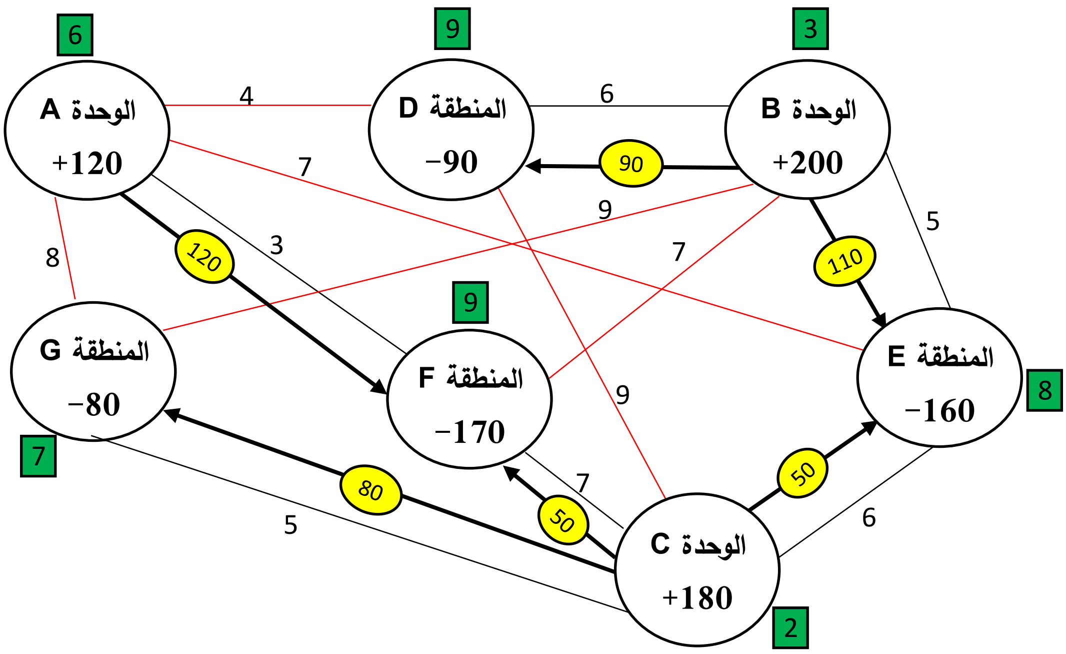
– البحث عن سلسلة الشحنات التي يغلقها السهم الجديد، ونجد أن هذه السلسلة تمر بالدوائر التي تمثل الوحدات والمناطق C–E–B–D.

– على سلسلة الشحنات المتحصل عليها من الخطوة السابقة نحدد الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد، ونحدد أيّهم يحمل أقل شحنة. ونجد أن هناك سهمين لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد هما السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E ويحمل شحنة بـ 160 طن، والسهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D ويحمل شحنة بـ 50 طن، وبالتالي فإن أقل شحنة هي 50 طن والتي يحملها السهم الثاني.

– نضع كمية الشحنة المتحصل عليها في الخطوة السابقة ضمن السهم الجديد، وهذا يعني أن الوحدة C تموّن المنطقة E بـ 50 طن، ثم نقوم بإضافة نفس الكمية إلى الأسهم التي لها نفس إتجاه السهم الجديد، ونطرحها من الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد وهذا بالنسبة للأسهم الموجودة ضمن السلسلة فقط، أما باقي الأسهم خارج السلسلة فتبقى بدون تغيير.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الثانية:

خطة التوزيع الثانية



ويتم حساب قيمة التكلفة الكلية كما يلي:

$$\text{Min } Z = (90 \times 6) + (110 \times 5) + (50 \times 6) + (50 \times 7) + (120 \times 3) + (80 \times 5) = 2500$$

ويُلاحظ أن قيمة التكلفة الكلية إنخفضت بـ 100 وحدة نقدية.

ويُمكن أيضاً معرفة قيمة الإنخفاض في التكلفة الكلية من خلال ضرب كمية الشحنة التي يحملها السهم الجديد في قيمة E_{CE}، أي: وحدة نقدية $50 \times (-2) = -100$

وبعد الحصول على خطة التوزيع الثانية، نقوم باختبارها لمعرفة ما إذا كانت مثلى أو لا باتباع نفس الخطوات التي تم شرحها سابقاً.

حساب قيم فرضيات خطة التوزيع الثانية:

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل الوحدة A: نفترض القيمة 6.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل المنطقة F: 6+3=9.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل الوحدة C: 9−7=2.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة G: 2+5=7.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل المنطقة E: 2+6=8.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل الوحدة B: 8−5=3.

قيمة فرضيـة الدائرة التي تمثل المنطقة D: 3+6=9.

ويُمكن حساب التكلفة الكلية لخطة التوزيع الثانية باستخدام قيم الفرضيات كما يلي:

Min Z= [6x(120)]+[9x(−170)]+[2x(180)]+[7x(−80)]+[8x(−160)]+[3x(200)]+[9x(−90)]

=|−2500|=**2500 وحدة نقدية**

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AD} = 4 - (9 - 6) = 1$$
$$E_{AG} = 8 - (7 - 6) = 7$$
$$E_{AE} = 7 - (8 - 6) = 5$$
$$E_{BG} = 9 - (7 - 3) = 5$$
$$E_{BF} = 7 - (9 - 3) = 1$$
$$E_{CD} = 9 - (9 - 2) = 2$$

ويُلاحظ أنه لا توجد أية قيمة سالبة لـ E_{ij}، وبالتالي فإن خطة التوزيع الثانية هي خطة التوزيع المثلى.

إذا:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة F بـ 120 طن من الدقيق.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 90 طن من الدقيق.
  - المنطقة E بـ 110 طن من الدقيق.

- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 50 طن من الدقيق.
  - المنطقة F بـ 50 طن من الدقيق.
  - المنطقة G بـ 80 طن من الدقيق.

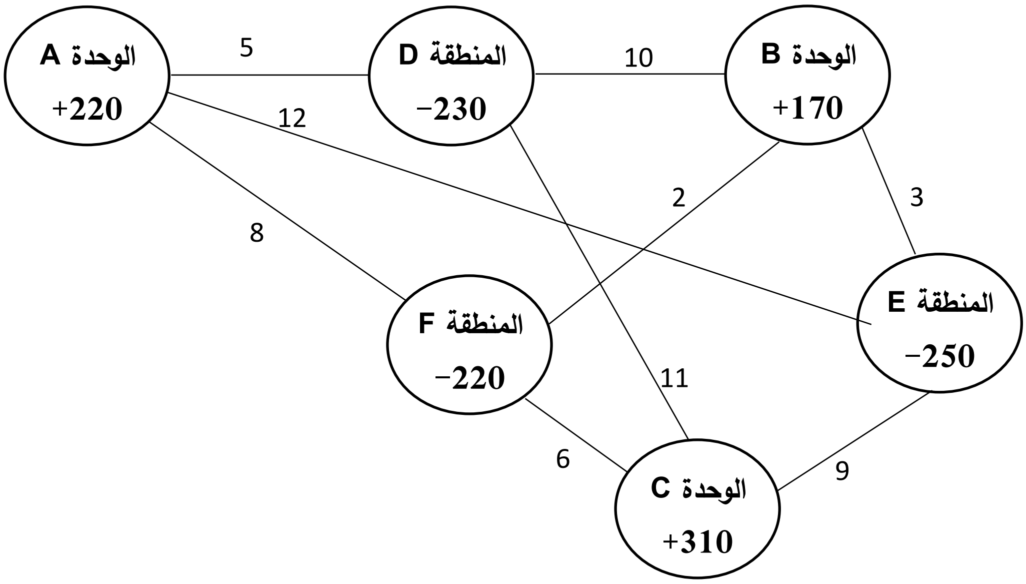
والتكلفة الكلية التي تتحملها المؤسسة من عملية توزيع الدقيق من وحداتها الثلاثة نحو المناطق الأربعة هي 2500 وحدة نقدية.

ملاحظات:

- يُمكن توضيح عملية تحديد السلسلة التي يغلقها السهم الجديد كما يلي: يكون الإنطلاق من الدائرة التي ينطلق منها السهم الجديد، ثم يتم تتبع المسار الذي يحتوي بشكل متتابع على أسهم تحمل شحنات حتى نصل إلى السهم الذي نهايته تكون عند الدائرة التي إنطلقنا منها.
- عند تساوي أكبر قيمتين سالبتين (أو أكثر) عند حساب قيم E_{ij}، فإنه يتم المفاضلة بينهما على أساس أكبر شحنة يمكن أن يحملها السهم الجديد في كل سلسلة.

مثال 2:

ليكن لديك شبكة النقل التالية والتي تبيّن الكميات التي تعرضها الوحدات، والكميات التي تطلبها المناطق، والأرباح الوحدوية المتحققة من شحن الكميات من الوحدات إلى المناطق (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من الأرباح الوحدوية: وحدة نقدية):



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تحقق أعظم ربح كلي؟

الحل:

لا تختلف خطوات حل مسائل النقل على الشبكات في حالة التعظيم عنها في حالة التقليل إلّا في الخطوتين التاليتين:

- عملية توزيع الشحنات على شبكة النقل في خطة التوزيع الأولى تتم على أساس أعلى الأرباح الوحدوية؛
- تكون خطة التوزيع مثلى عندما تحقق قيم فرضيات خطة التوزيع الشرط $\boldsymbol{E_{ij} \leq 0}$.

نبحث عن أعلى ربح وحدوي على الشبكة، ونجد أن قيمة هذا الربح هي 12 وحدة نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة E. الكمية التي تطلبها المنطقة E هي 250 طن، في حين أن طاقة عرض الوحدة A هي 220 طن. في هذه الحالة تموّن الوحدة A المنطقة E بكامل طاقة عرضها، وتبقى المنطقة E في حاجة إلى 30 طن (250 طن−220 طن). نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 220 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 11 وحدة نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة D. الكمية التي تطلبها المنطقة D هي 230 طن، في حين أن طاقة عرض الوحدة C هي 310 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن بالكامل ما تطلبه المنطقة D، وتبقى لدى الوحدة C كمية بـ 80 طن (310 طن −230 طن). نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 230 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 10 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة D. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة D إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 9 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة E. المنطقة E مازالت في حاجة لـ 30 طن، في حين أن الوحدة C مازالت تملك كمية بـ 80 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن المنطقة E بـ 30 طن، وبهذا تكون المنطقة E قد إستوفت كامل الكمية التي تطلبها، وتبقى لدى الوحدة C كمية بـ 50 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 30 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 8 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة F. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن الوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 6 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة F. المنطقة F في حاجة لـ 220 طن، في حين أن الوحدة C مازالت تملك كمية بـ 50 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن المنطقة F بـ 50 طن، وبهذا تكون الوحدة C قد إستنفدت كامل طاقة عرضها، في حين تبقى المنطقة F في حاجة لـ 170 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F يحمل شحنة بـ 50 طن.

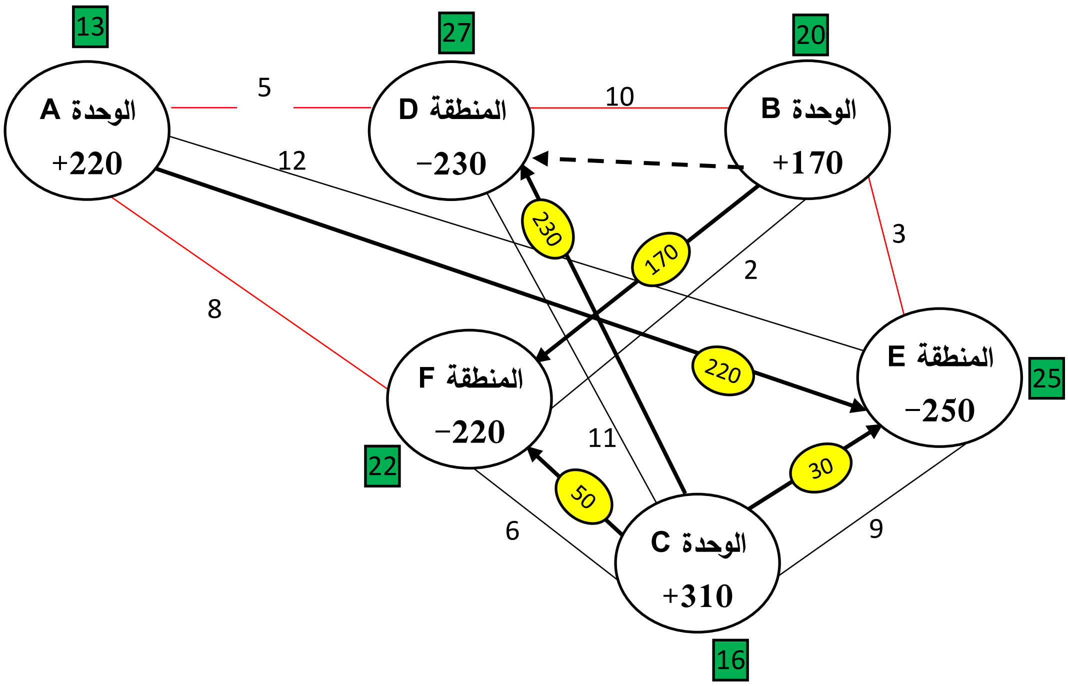
أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 5 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة D. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة D إستوفت كامل الكمية التي تطلبها، والوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 3 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة E. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة E إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو وحدتين نقديتين والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة F. المنطقة B مازالت في حاجة لـ 170 طن، والوحدة B طاقة عرضها 170 طن. في هذه الحالة الوحدة B تموّن بكامل طاقة عرضها الكمية المطلوبة المتبقية من طرف المنطقة F. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F يحمل شحنة بـ 170 طن.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الأولى:

خطة التوزيع الأولى



وقيمة الربح الكلي هي:

$\text{Max } Z = (220 \times 12) + (230 \times 11) + (30 \times 9) + (50 \times 6) + (170 \times 2) = \mathbf{6080}$ وحدة نقدية

ولإختبار مثلوية خطة التوزيع الأولى يتم أولاً حساب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة بنفس الطريقة التي حسبنا بها هذه القيم في المثال 1، حيث نفترض القيمة 13 كقيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A، ثم نحسب باقي قيم الفرضيات عند كل دائرة كما هي موضحة في شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى أعلاه (قيم الفرضيات موضحة في المربعات الخضراء).

ويُمكن إستخدام قيم الفرضيات لحساب قيمة الربح الكلي كما يلي:

Max Z= [13x(220)]+[27x(−230)]+[20x(170)]+[25x(−250)]+[16x310)]+[22x(−220)] =|−6080|=**6080 وحدة نقدية**

ونأخذ قيمة الربح الكلي بقيمته المطلقة.

نقوم ثانياً بحساب قيم E_{ij} كما يلي:

$$E_{AD} = 5 - (27 - 13) = -9$$
$$E_{AF} = 8 - (22 - 13) = -1$$
$$E_{BD} = 10 - (27 - 20) = \mathbf{3}$$
$$E_{BE} = 3 - (25 - 20) = -2$$

بما أن هناك قيمة موجبة وهي $E_{BD}=3$، فهذا يعني أن خطة التوزيع الأولى غير مثلى، وبالتالي ينبغي إعداد خطة التوزيع الثانية كما يلي:

– وضع سهم جديد إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D (تم تمثيل السهم بخط متقطع على شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى للتوضيح فقط)؛

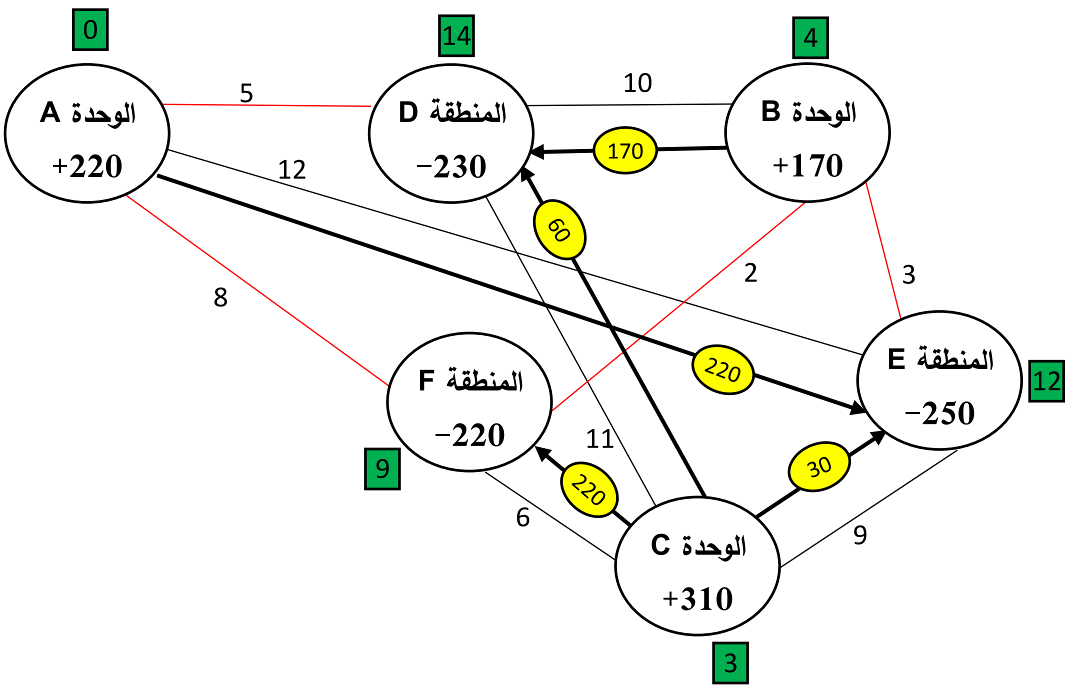
– البحث عن سلسلة الشحنات التي يغلقها هذا السهم. ونجد أن هذه السلسلة تمر بالدوائر التي تمثل الوحدات والمناطق B–D–C–F.

– على سلسلة الشحنات المتحصل عليها في الخطوة السابقة نحدد الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد، ونحدد أيّهم يحمل أقل شحنة. ونجد أن هناك سهمين لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد هما السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F ويحمل شحنة بـ 170 طن، والسهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D ويحمل شحنة بـ 230 طن، وبالتالي فإن أقل شحنة هي 170 طن والتي يحملها السهم الأول.

– نضع كمية الشحنة المتحصل عليها في الخطوة السابقة ضمن السهم الجديد، وهذا يعني أن الوحدة B تموّن المنطقة D بـ 170 طن، ثم نقوم بإضافة نفس الكمية إلى الأسهم التي لها نفس إتجاه السهم الجديد، ونطرحها من الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد وهذا بالنسبة للأسهم الموجودة ضمن السلسلة، أما باقي الأسهم خارج السلسلة فتبقى بدون تغيير.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الثانية:

خطة التوزيع الثانية



حساب قيمة الربح الكلي:

$\text{Max } Z = (220 \times 12) + (60 \times 11) + (170 \times 10) + (30 \times 9) + (220 \times 6) = \mathbf{6590}$ وحدة نقدية

ويُلاحظ إرتفاع في قيمة الربح الكلي بـ 510 وحدة نقدية.

ويُمكن أيضاً معرفة قيمة الإرتفاع في الربح الكلي من خلال ضرب كمية الشحنة التي يحملها السهم الجديد في قيمة E_{BD}، أي: وحدة نقدية $170 \times 3 = 510$

وبعد الحصول على خطة التوزيع الثانية، نقوم باختبارها لمعرفة ما إذا كانت مثلى أو لا باتباع نفس الخطوات التي تم شرحها سابقاً، حيث نحسب قيم فرضيات خطة التوزيع الثانية عند كل دائرة (كما هي موضحة في المربعات الخضراء في شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الثانية أعلاه)، حيث إفترضنا القيمة 12 كقيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E، ثم نحسب قيم E_{ij} كما يلي:

$$E_{AD} = 5 - (14 - 0) = -9$$
$$E_{AF} = 8 - (9 - 0) = -1$$
$$E_{BF} = 2 - (9 - 4) = -3$$
$$E_{BE} = 3 - (12 - 4) = -5$$

ويُلاحظ أنه لا توجد أية قيمة موجبة لـ E_{ij}، وبالتالي فخطة التوزيع الثانية هي خطة التوزيع المثلى.

إذا:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة E بـ 220 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 170 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة D بـ 60 طن.
  - المنطقة E بـ 30 طن.
  - المنطقة F بـ 220 طن.

والربح الكلي المتحقق من عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هي 6590 وحدة نقدية.

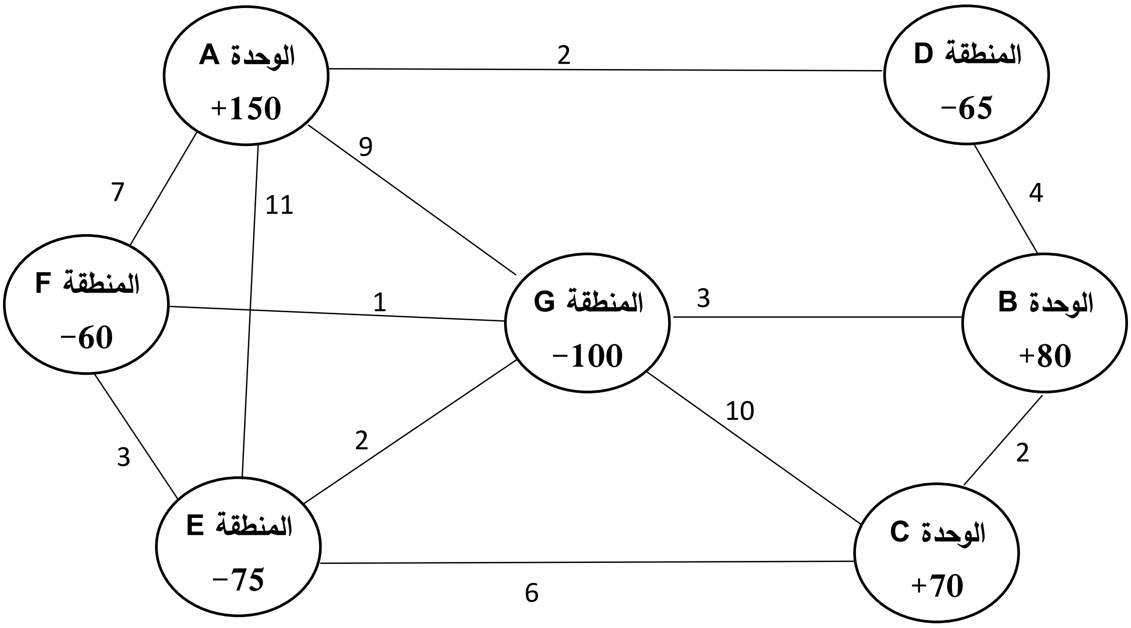
<u>ملاحظات:</u>

- عند تساوي أكبر ربحين وحدويين أو أكثر، فإننا نختار الربح الوحدوي على المسار الذي يُمكن إمرار أكبر شحنة عبره؛
- عند تساوي أكبر قيمتين موجبتين (أو أكثر) عند حساب قيم E_{ij}، فإنه يتم المفاضلة بينهما على أساس أكبر شحنة يمكن أن يحملها السهم الجديد في كل سلسلة؛

وبالرغم من أن المثالين الأول والثاني السابقين يعالجان عملية الشحن من المصدر نحو المصب مباشرة دون المرور على مصاب أخرى أو مصادر أخرى، إلّا أنّه في بعض الأحيان يُمكن أن تتم عملية الشحن من المصدر نحو المصب عبر مصدر أو مصب آخر، وفي هذه الحالة فإن تكلفة الشحن ستساوي مجموع تكلفة المسارين في حالة التقليل، والربح المتحقق من الشحن سيساوي مجموع ربح المسارين.

مثال 3:

ليكن لديك شبكة النقل التالية والتي تبيّن الكميات التي تعرضها الوحدات، والكميات التي تطلبها المناطق، والتكاليف الوحدوية المترتبة عن شحن الكميات من الوحدات إلى المناطق (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من التكاليف الوحدوية: وحدة نقدية):



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تقلل التكلفة الكلية إلى أدنى قيمتها؟

الحل:

لا يختلف حل المسألة عن المثال الأول، إلّا أن الفرق هو إمكانية تموين مناطق من وحدة عبر وحدة أو وحدات أخرى، أو عبر منطقة أو مناطق أخرى، وهو ما يعني أن تكلفة الشحن ستساوي مجموع تكاليف الشحن الوحدوية على جميع المسارات التي تمر بها الشحنة.

يُلاحظ من شبكة النقل أن هناك خطوط إتصال بين المناطق E، F وG، وهذا يعني أنّه يُمكن تموين منطقة أو أكثر عبر منطقة أخرى أو أكثر. وسنفترض أن المسارات الرابطة بين هذه المناطق هي مسارات ذات إتجاهين، بمعنى أن المسار الرابط بين منطقتين يُمكن أن يحمل شحنة من وإلى كلتا المنطقتين. ولفهم حل مثل هذه المسائل أكثر سنفترض في شبكة النقل هذه أن جميع خطوط الإتصال بين الوحدات والمناطق هي مسارات ذات إتجاهين أيضاً، بمعنى إمكانية مرور شحنات إلى وحدات عبر مناطق.

نحدد أقل تكلفة شحن وحدوية على الشبكة تقع على مسار يربط بين وحدة ومنطقة، ونجد هذه التكلفة على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة D وقيمتها وحدتين نقديتين. ويتم إهمال تكاليف الشحن على المسارات الرابطة بين المناطق، في حين يُمكن الأخذ بعين الإعتبار تكاليف الشحن بين الوحدات في حالة كان مجموع تكلفة الشحن على المسارات التي تربط الوحدات والمنطقة المُراد تموينها تشكّل أقل تكلفة شحن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 65 طن.

أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً هي 3 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة G. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة G يحمل شحنة بـ 80 طن.

أقل تكلفة شحن موالية تصاعديا هي 4 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة D. وهذا المسار لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن المنطقة D إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

البحث عن أقل تكلفة شحنة موالية تصاعدياً: يُلاحظ أنه يُمكن تموين المنطقة G ببقية الكمية التي مازالت تتطلبها وهي 20 طن من الوحدة C عبر الوحدة B بتكلفة شحن أقل مما لو تم تموينها من الوحدات الأخرى مباشرة أو عبر مناطق أخرى، حيث يبلغ مجموع تكلفتي الشحن الوحدويتين على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل الوحدة B، والمسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة G 5 وحدات نقدية (أي 2+3). نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل الوحدة B يحمل شحنة بـ 20 طن، ونعدّل في قيمة الشحنة التي يحملها السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة G من 80 طن إلى 100 طن.

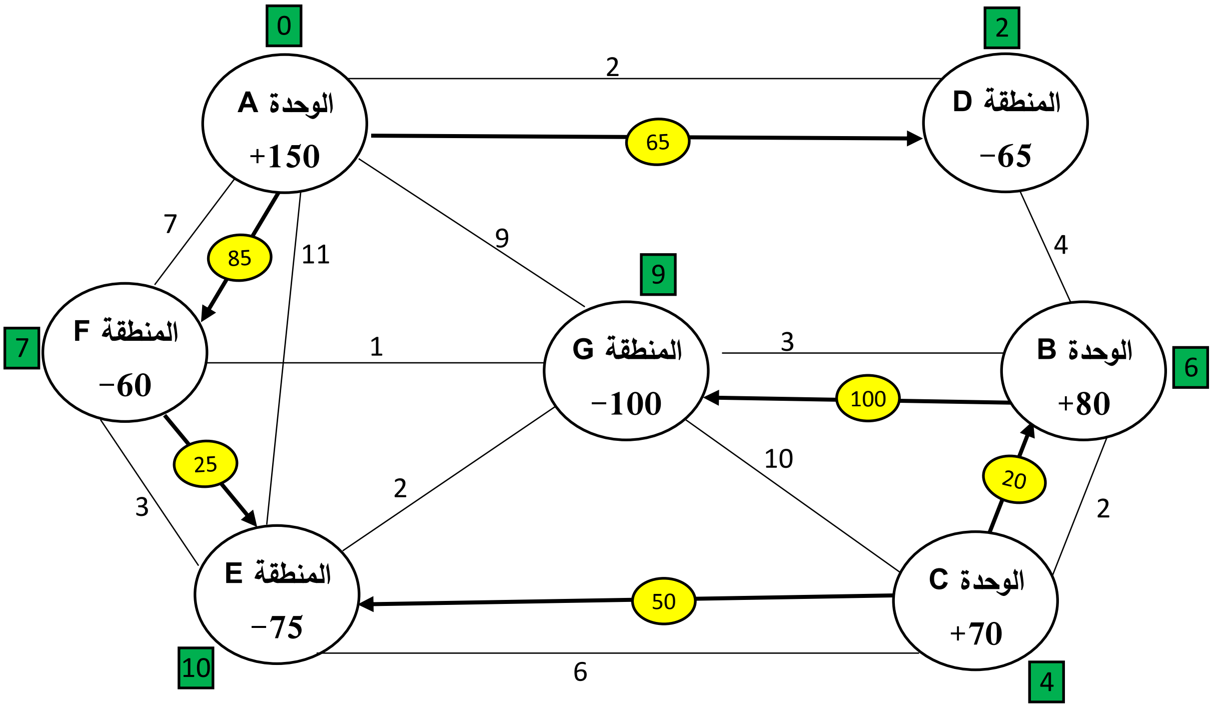
أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً هي 6 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة E. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 50 طن.

أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً هي 7 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة F. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F يحمل شحنة بـ 60 طن.

يُلاحظ أن جميع المناطق إستوفت كامل الكمية المطلوبة ماعدا المنطقة E التي مازالت في حاجة لـ 25 طن، وهي كمية يُمكن تلبيها مباشرة من الوحدة A بتكلفة شحن وحدوية بـ 11 وحدة نقدية، أو من الوحدة A عبر المنطقة F بتكلفة شحن وحدوية بـ 10 وحدات نقدية (مجموع تكلفة الشحن الوحدوية على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة F، وتكلفة الشحن الوحدوية على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل المنطقة F والدائرة التي تمثل المنطقة E). وبما أننا سنختار تكلفة الشحن الوحدوية الأقل، فإننا نعدّل في قيمة الشحنة التي يحملها السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F من 60 طن إلى 85 طن، ونضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل المنطقة F نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 25 طن.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الأولى:

خطة التوزيع الأولى



التكلفة الكلية: **1440 وحدة نقدية**

حساب قيم فرضيات خطة التوزيع الأولى:

نحسب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة (كما هي مبينة في المربعات الخضراء على شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى أعلاه)، حيث إفترضنا القيمة 0 كفرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A.

حساب قيم E_{ij}:

في المثالين 1 و2 السابقين تم حساب قيم E_{ij} على أساس أن المسارات الرابطة بين الدوائر هي مسارات أحادية، بمعنى أن المسار الرابط بين دائرتين يُمكن نقل شحنة عبره في إتجاه واحد. لكن في حالة المسارات ذات الإتجاهين، بمعنى إمكانية تمرير شحنة من دائرة نحو أخرى أو العكس، يتم حساب قيم E_{ij} حسب العلاقة التالية:

$$E_{ij} = C_{ij} - (V_j - U_i)$$

حيث:

E_{ij}: مقياس مثلوية التوزيع من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة؛

C_{ij}: تكلفة الشحن من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة. وفي حالة التعظيم نستبدل C_{ij} بـ P_{ij}؛

V_j: قيمة الفرضية الكبيرة على المسار الذي لا يحمل شحنة؛

U_i: قيمة الفرضية الصغيرة على المسار الذي لا يحمل شحنة؛

وسيكون إتجاه السهم الجديد في خطة التوزيع الموالية من الدائرة (i) نحو الدائرة (j) وليس العكس. وللتبسيط أكثر، فإن إتجاه السهم سيكون من الدائرة التي قيمة فرضيتها صغيرة إلى الدائرة التي قيمة فرضيتها كبيرة.

أما في حالة المسارات ذات الإتجاه الواحد، فيتم حساب قيم E_{ij} كما تم تناوله سابقاً في المثالين 1و2 (بما في ذلك المسار ذو الإتجاه الواحد الرابط بين وحدة ووحدة أو بين منطقة ومنطقة).

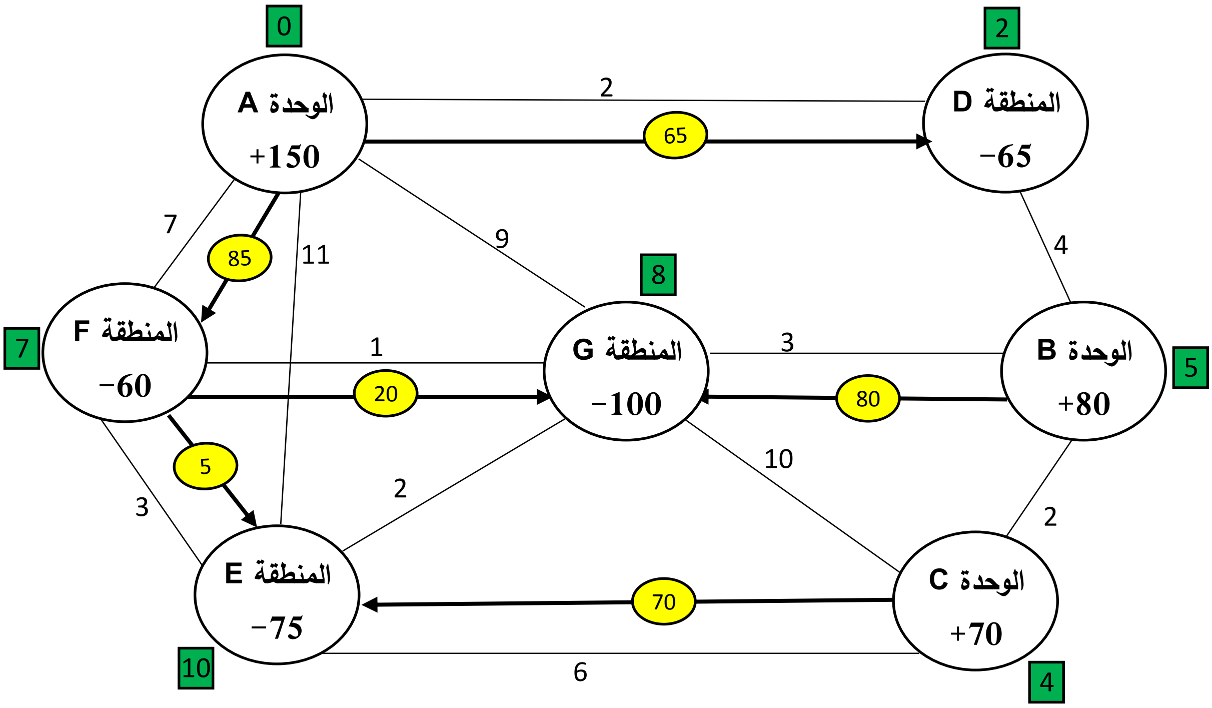
ويتم حساب قيم E_{ij} كما يلي:

$$E_{AG} = 9 - (9 - 0) = 0$$
$$E_{AE} = 11 - (10 - 0) = 1$$
$$E_{GE} = 2 - (10 - 9) = 1$$
$$E_{FG} = 1 - (9 - 7) = \mathbf{-1}$$
$$E_{CG} = 10 - (9 - 4) = 5$$
$$E_{BD} = 4 - (6 - 2) = 0$$

بما أن هناك قيمة سالبة وهي $E_{FG}=-1$، فهذا يعني أن خطة التوزيع الأولى غير مثلى، وبالتالي ينبغي إعداد خطة التوزيع الثانية على النحو الذي تم شرحه في المثالين 1 و2.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الثانية:

خطة التوزيع الثانية



التكلفة الكلية: **1420 وحدة نقدية**

حساب قيم فرضيات خطة التوزيع الثانية:

نحسب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة (كما هي مبينة في المربعات الخضراء على شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الثانية أعلاه)، حيث إفترضنا القيمة 0 كفرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A.

حساب قيم Eij:

$$E_{AG} = 9 - (8 - 0) = 1$$
$$E_{AE} = 11 - (10 - 0) = 1$$
$$E_{GE} = 2 - (10 - 8) = 0$$
$$E_{CB} = 2 - (5 - 4) = 1$$
$$E_{CG} = 10 - (8 - 4) = 6$$
$$E_{DB} = 4 - (5 - 2) = 1$$

وبما أنه لا توجد قيم سالبة لـ E_{ij}، فإن خطة التوزيع الثانية هي خطة التوزيع المثلى.

إذا:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة D بـ 65 طن.
  - المنطقة F بـ 60 طن.
  - المنطقة E بـ 5 طن.
  - المنطقة G بـ 20 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة G بـ 80 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 70 طن.

والتكلفة الكلية المترتبة عن عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الأربعة هي 1420 وحدة نقدية.

إن حل مسائل النقل على الشبكات التي تتضمن تموين مصاب من منابع عبر منابع أخرى و/أو عبر مصاب أخرى يُمكن في بعض الأحيان أن تكون معقدة حسب عدد المنابع والمصاب، عدد المسارات ذات الإتجاهين بين المنابع والمصاب، وبين المنابع أو المصاب نفسها.

3-3- حالات خاصة:

أ- عدم تحقق شرط تساوي العرض والطلب:

إن التوازن بين العرض والطلب هو شرط لحل مسائل النقل، إلّا أنّه في الحياة العملية قلما يتحقق هذا الشرط، وهو ما يستدعي تعديل هذه المسائل لخلق التوازن من خلال إضافة منابع وهمية أو مصاب وهمية حسب الحالة كما يلي:

أ-1- الطلب أكبر من العرض:

يتم في هذه الحالة إضافة منبع وهمي، والكمية التي يعرضها هذا المنبع هي قيمة الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض، وتكاليف النقل أو أرباح النقل من هذا المنبع إلى أي مصب فنفترضها تكاليف أو أرباح صفرية، كما نفترض أن هذا المنبع الوهمي يُمكن أن يموّن جميع المناطق.

أ-2- العرض أكبر من الطلب:

يتم في هذه الحالة إضافة مصب وهمي، والكمية التي يطلبها هذا المصب هي قيمة الفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب، وتكاليف النقل أو أرباح النقل من أي منبع إلى هذا المصب فنفترضها تكاليف أو أرباح صفرية، كما نفترض أن هذا المصب يُمكن أن يتلقى شحنة من أيّ منبع.

وبعد تحقيق شرط التوزان بين العرض والطلب، يتم حل مسألة النقل بشكل عادي على الشبكة، وعند الوصول إلى خطة التوزيع المثلى يتم إهمال الكميات المنقولة من المصدر الوهمي، أو الكميات التي تحصلت عليها المصاب الوهمية.

ب- حالة التفكك (الدورانية):

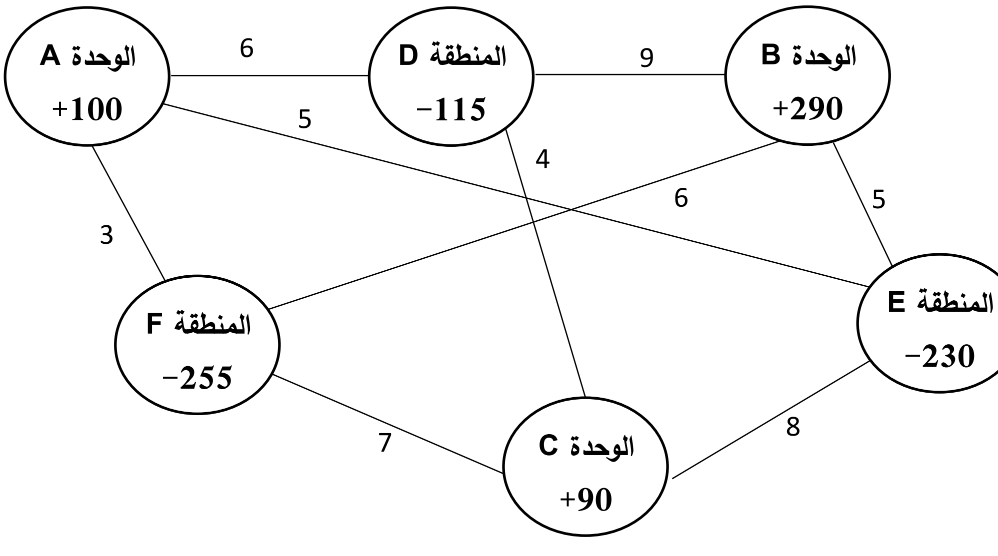
تقع هذه الحالة عندما يكون عدد الأسهم التي تحمل الشحنات أقل من عدد الدوائر ناقص واحد، وفي هذه الحالة يتم إضافة سهم أو أكثر حتى يتحقق شرط مساواة عدد الأسهم بعدد الدوائر ناقص واحد، مع إفتراض أن كمية الشحنة التي يحملها السهم المُضاف قيمتها صفر. ويُمكن أن تقع حالة التفكك في خطة التوزيع الأولى أو خطط التوزيع الموالية. ففيما يتعلق بخطة التوزيع الأولى، تحدث حالة التفكك عندما تتم عملية توزيع البضاعة من المنابع نحو المصاب وينتج لنا عدد أسهم أقل من عدد الدوائر ناقص واحد، أما في خطط التوزيع الموالية، تحدث حالة التفكك عندما يكون هناك سهمين أو أكثر لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد ضمن السلسلة التي تغلق هذا السهم تحمل نفس أصغر شحنة.

ج- وجود أكثر من حل لمشكلة النقل:

عند الوصول إلى خطة التوزيع المثلى، إذا كانت إحدى قيم E_{ij} أو أكثر تساوي الصفر، فهذا يعني أن هناك أكثر من خطة توزيع مثلى تعطي كلها نفس قيمة دالة الهدف. ويُلاحظ من المثال 3 أعلاه أن قيمة $E_{GE}=0$، وهذا يعني أن إمرار شحنة نحو المنطقة E عبر المنطقة G سينتج خطة توزيع مثلى أخرى بدون تغير قيمة التكلفة الكلية.

مثال 4: (حول الحالة الخاصة الأولى):

ليكن لديك شبك النقل التالية: (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من التكاليف الوحدوية: وحدة نقدية)



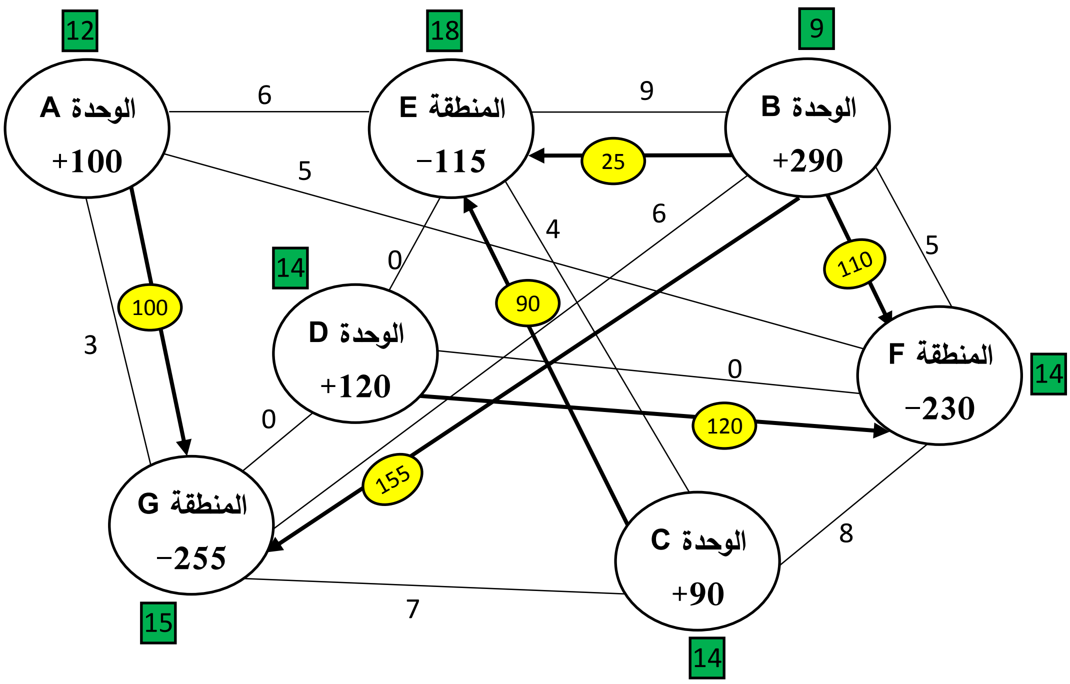
المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أقل تكلفة كلية، مع العلم أن عملية التوزيع من الوحدات نحو المناطق تتم مباشرة بدون المرور على وحدات أو مناطق أخرى؟

الحل:

يُلاحظ أن الكمية المطلوبة من المناطق الثلاثة تتجاوز كمية ما تعرضه الوحدات الثلاثة. ولتحقيق التوازن بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة يتم إضافة وحدة وهمية نرمز لها بـ D، طاقة عرضها هي 120 طن (الفرق بين كمية الطلب وكمية العرض)، وتكاليف الشحن الوحدوية منها نحو مختلف المناطق هي تكاليف صفرية. ونقوم أيضا بإعادة ترميز المناطق على الترتيب بـ E، F و G.

ويكون حل المسألة كما يلي:

خطة التوزيع الأولى

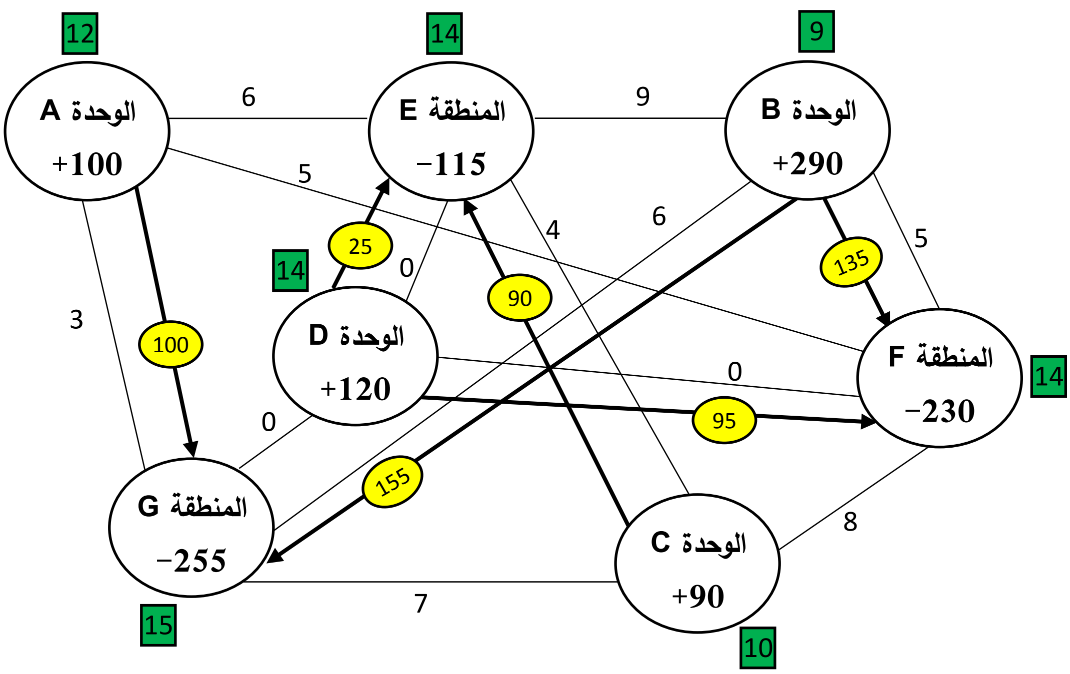


التكلفة الكلية: 2365 وحدة نقدية.

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AE} = 6 - (18 - 12) = 0$$
$$E_{AF} = 5 - (14 - 12) = 3$$
$$E_{CF} = 8 - (14 - 14) = 8$$
$$E_{CG} = 7 - (15 - 14) = 6$$
$$E_{DE} = 0 - (18 - 14) = \mathbf{-4}$$
$$E_{DG} = 0 - (15 - 14) = -1$$

خطة التوزيع الثانية

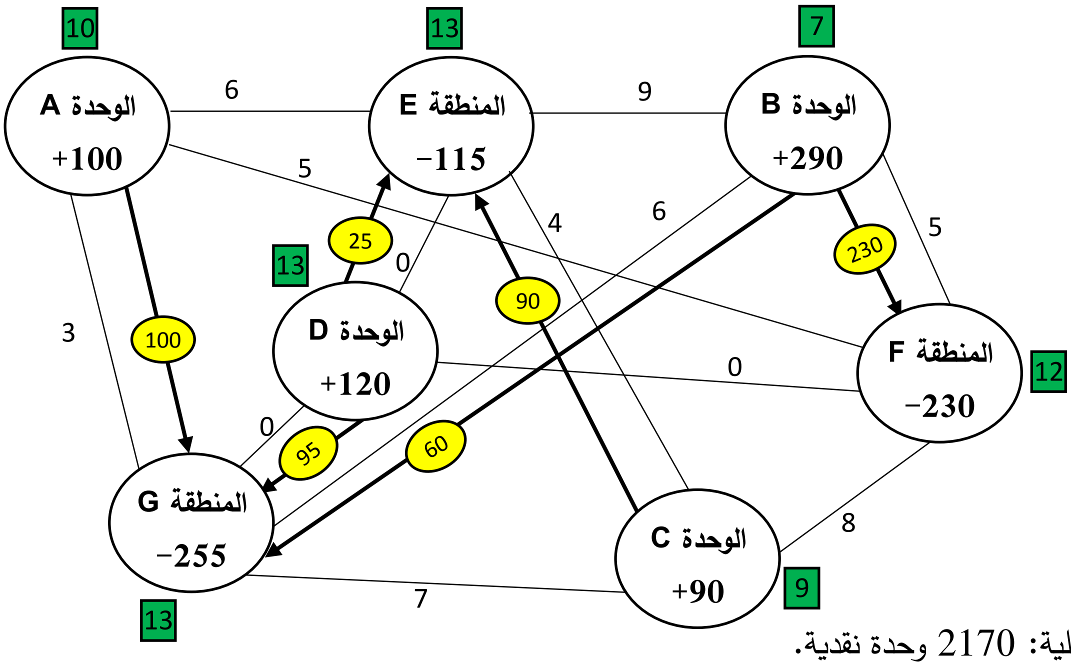


التكلفة الكلية: 2265 وحدة نقدية.

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AE}=6-(14-12)=4$$
$$E_{AF}=5-(14-12)=3$$
$$E_{CF}=8-(14-10)=4$$
$$E_{CG}=7-(15-10)=2$$
$$E_{BE}=9-(14-9)=4$$
$$E_{DG}=0-(15-14)=-\mathbf{1}$$

خطة التوزيع الثالثة



التكلفة الكلية: 2170 وحدة نقدية.

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AE}=6-(13-10)=3$$
$$E_{AF}=5-(12-10)=3$$
$$E_{CF}=8-(12-9)=5$$
$$E_{CG}=7-(13-9)=3$$
$$E_{BE}=9-(13-7)=3$$
$$E_{DF}=0-(12-13)=1$$

وعليه، فخطة التوزيع الثالثة هي الخطة المثلى. وبما أن الوحدة D هي وحدة وهمية، فإن تموينها لكل من المنطقتين E و G هو تموين وهمي، وبالتالي فإن الكميات التي موّنت بها الوحدة D المنطقتين E و G وهي 25 طن و95 طن على التوالي تُعتبر عجز بالنسبة للمنطقتين. وتتمثل خطة التوزيع الحقيقية فيما يلي:

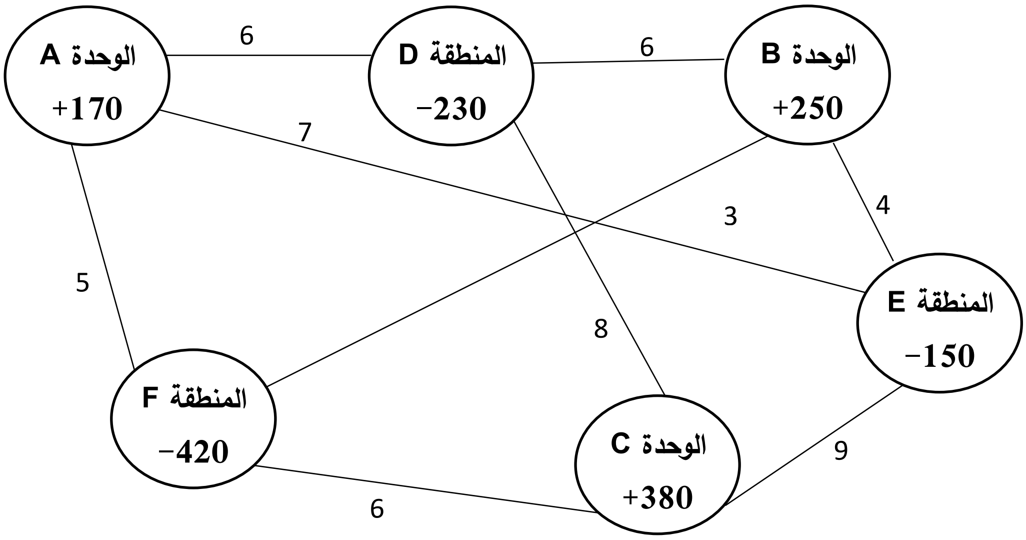
- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة G بـ 100 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة F بـ 230 طن.
  - المنطقة G بـ 60 طن.

- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 90 طن.

والتكلفة الكلية المترتبة عن عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هي 2170 وحدة نقدية.

مثال 5: (حول الحالة الخاصة الثانية):

ليكن لديك شبكة النقل التالية: (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من الأرباح الوحدوية: وحدة نقدية)



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أعظم ربح كلي لشبكة النقل، مع العلم أن عملية التوزيع من الوحدات نحو المناطق تتم مباشرة بدون المرور على وحدات أو مناطق أخرى؟

الحل:

يُلاحظ أنّه بعد إتمام عملية التوزيع من الوحدات إلى المناطق نتج عن هذه العملية 4 أسهم فقط (4 شحنات)، ما يعني عدم توفر شرط أن يكون عدد الأسهم هو بعدد الدوائر ناقص واحد. وينبغي في هذه الحالة وضع سهم يحمل شحنة وهمية قيمتها صفر حتى يتحقق الشرط المذكور. وهناك العديد من المسارات التي يُمكن إمرار عبرها شحنة وهمية. وبالرغم من أنّه يُمكن إختيار أي مسار، إلّا أنّه يُمكن المفاضلة بين هذه المسارات لتقليص عدد خطط التوزيع، والوصول بشكل أسرع لخطة التوزيع المثلى. وتتم عملية المفاضلة بوضع السهم الجديد كل مرة على إحدى المسارات، وحساب قيم E_{ij}، ثم تحديد أقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد وحساب قيمة الزيادة الممكنة في الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية كما يلي:

- المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة A بالدائرة التي تمثل المنطقة D: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ E_{ij} هي $E_{BD}=2$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلّا أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.
- المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة A بالدائرة التي تمثل المنطقة E: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ E_{ij} هي $E_{BD}=2$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على

هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلاّ أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.

– المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة D: سنجد أن أكبر قيمة لـ E_{ij} هي $E_{CF}=1$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 230 طن. وضع السهم الجديد على هذا المسار سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية بـ 230 وحدة نقدية (1x230).

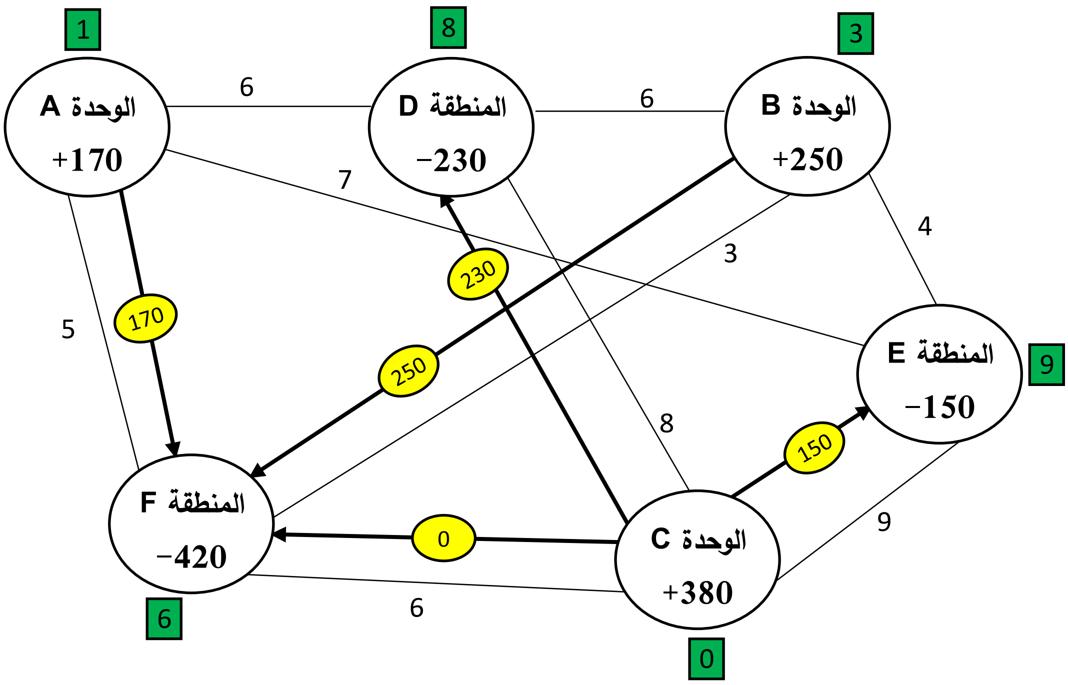
– المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة E: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ E_{ij} هي $E_{BD}=3$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلاّ أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.

– المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F: سنجد أن أكبر قيمة لـ E_{ij} هي $E_{BD}=1$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 230 طن. وضع السهم الجديد على هذا المسار سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية بـ 230 وحدة نقدية (1x230).

ومما سبق يتضح أنه يُمكن إختيار إما المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة D، أو المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F، لأن وضع السهم الجديد في أي من المسارين سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي بـ 230 وحدة نقدية في خطة التوزيع الثانية.

سنختار وضع السهم الذي يحمل الشحنة الوهمية التي قيمتها 0 في المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F.

خطة التوزيع الأولى

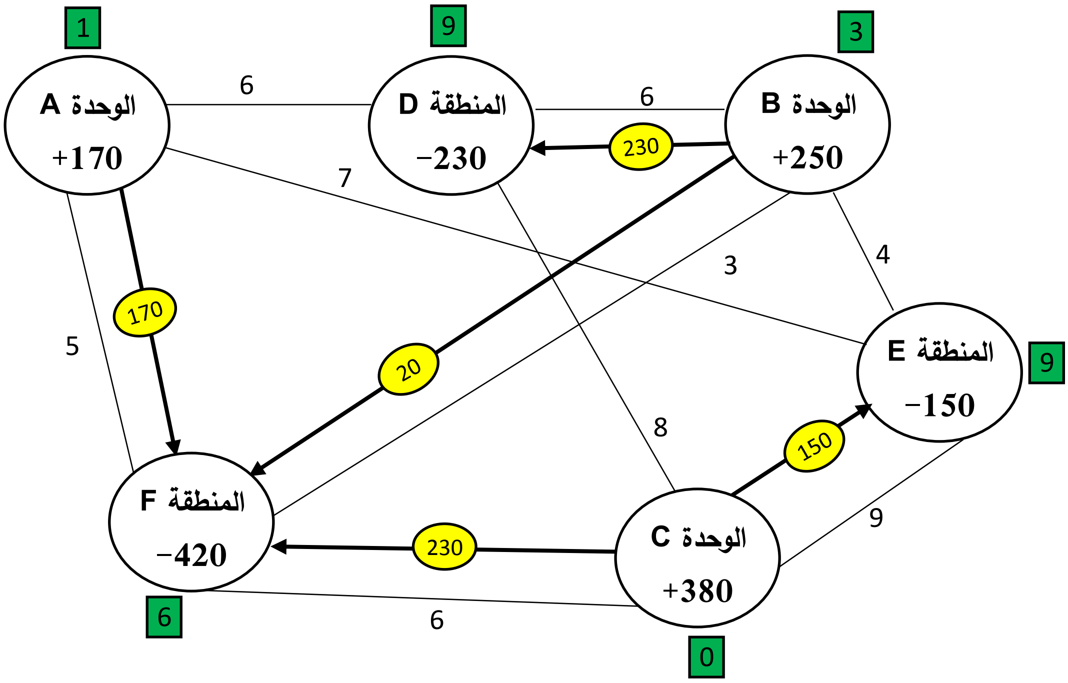


الربح الكلي: 4790 وحدة نقدية.

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AD} = 6 - (8 - 1) = -1$$
$$E_{AE} = 7 - (9 - 1) = -1$$
$$E_{BD} = 6 - (8 - 3) = \mathbf{1}$$
$$E_{BE} = 4 - (9 - 3) = -2$$

خطة التوزيع الثانية



الربح الكلي: 5020 وحدة نقدية.

حساب قيم E_{ij}:

$$E_{AD} = 6 - (9 - 1) = -2$$
$$E_{AE} = 7 - (9 - 1) = -1$$
$$E_{BE} = 4 - (9 - 3) = -2$$
$$E_{CD} = 8 - (9 - 0) = -1$$

وعليه، فخطة التوزيع الثانية هي الخطة المثلى، حيث:

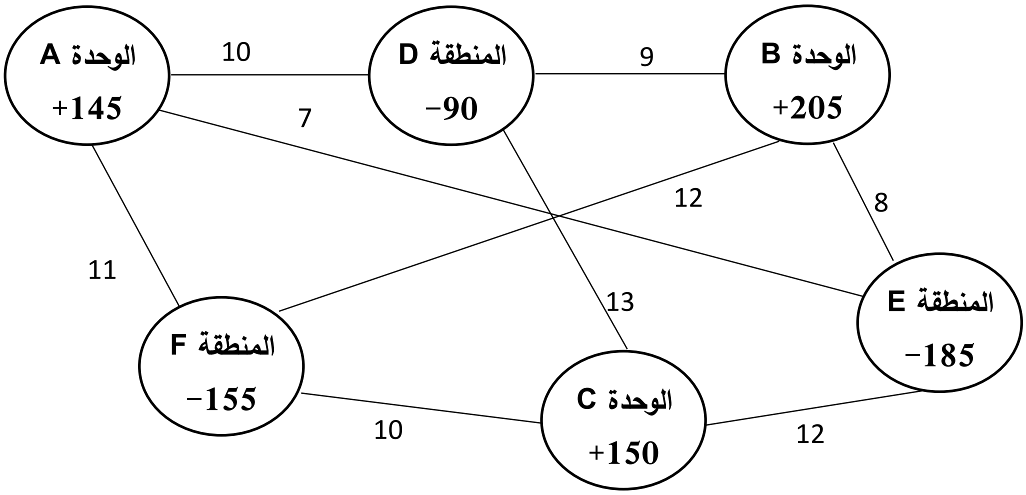
- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة F بـ 170 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 230 طن.
  - المنطقة F بـ 20 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 150 طن.
  - المنطقة F بـ 230 طن.

والربح الكلي المتحقق من عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هو 5020 وحدة نقدية.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

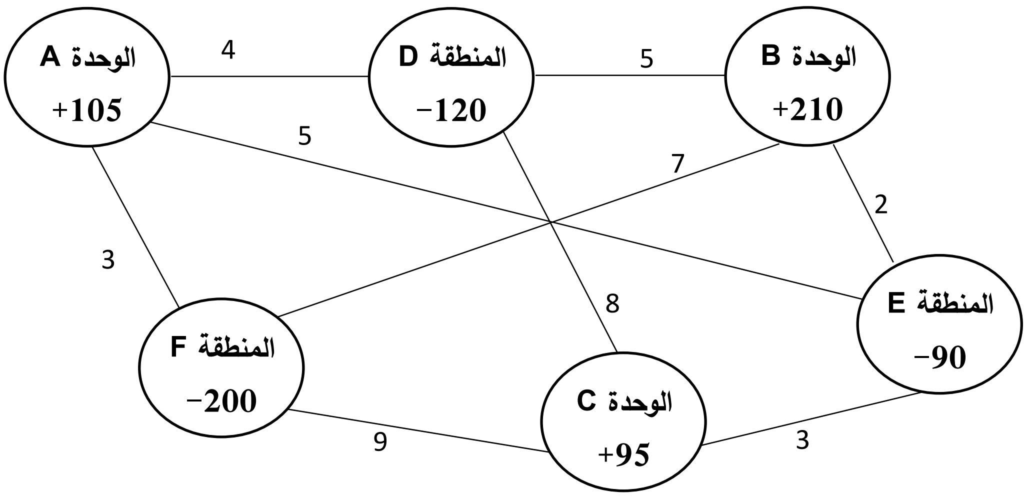
تموّن إحدى المؤسسات عبر ثلاثة وحدات إنتاجية ثلاثة مناطق بمادة السكر. طاقة عرض كل وحدة والكميات التي تطلبها كل منطقة والربح المتحقق من شحن كل وحدة من السكر من كل وحدة إنتاجية نحو كل منطقة موضّحة على شبكة النقل التالية: (الوحدة من مادة السكر= 100 كلغ، الربح المتحقق من شحن كل وحدة من مادة السكر: وحدة نقدية)



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أعظم ربح للمؤسسة، وما هي قيمة الربح الكلي عند هذه الخطة؟

التمرين الثاني:

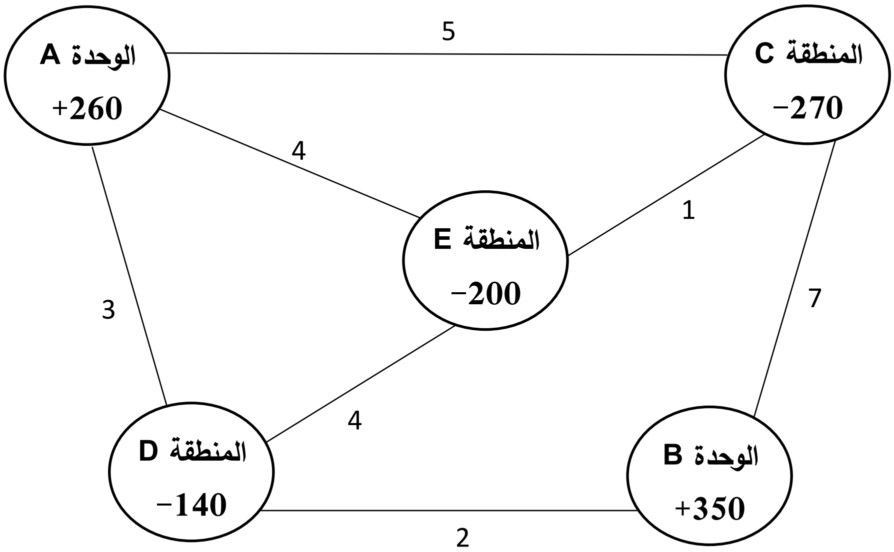
تموّن إحدى المؤسسات عبر ثلاثة وحدات إنتاجية ثلاثة مناطق بمادة زيت المائدة. طاقة عرض كل وحدة وكميات التي تطلبها كل منطقة وتكلفة شحن كل وحدة من زيت المائدة من كل وحدة إنتاجية نحو كل منطقة موضّحة على شبكة النقل التالية: (الوحدة من مادة زيت المائدة = 1000 لتر، تكلفة شحن كل وحدة من مادة زيت المائدة: 10 وحدات نقدية)



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أدنى تكلفة للمؤسسة، وما هي قيمة االتكلفة الكلية عند هذه الخطة؟

التمرين الثالث:

مؤسسة مختصة في تعبئة وتوزيع المياه المعدنية تموّن ثلاثة مناطق بهذه البضاعة عبر وحدتين تتكون منهما المؤسسة. طاقة عرض كل وحدة، وكمية طلب كل منطقة من المياه المعدنية (الوحدة من المياه المعدنية: 100 لتر)، وأرباح الشحن الوحدوية (الوحدة: وحدة نقدية) موضّحة على شبكة النقل التالية:



المطلوب:

إذا علمت أن خطوط الإتصال بين المناطق هي مسارات ذات إتجاهين، وأن خطوط الإتصال بين الوحدات والمناطق هي مسارات ذات إتجاه واحد (من الوحدات نحو المناطق)، أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أعظم ربح كلي للمؤسسة؟

مراجع الفصل:

- د. محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.
- أ. د. محمد سالم الصفدي: بحوث العمليات: تطبيق وخوارزميات، الطبعة الأولى، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 2009.
- أ. د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون: بحوث العمليات، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.
- د. حامد سعد نور الشمرتي: بحوث العمليات "مفهوماً وتطبيقاً"، الطبعة الأولى، مكتبة الذاكرة، بغداد، العراق، 2010.
- د. لحسن عبد الله باشيوة: بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.
- د. سهيلة عبد الله سعيد: الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
- أ. د. سليمان خالد عبيدات: الأساليب الكمية في الإدارة، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2015.

الفصل الثالث:

مدخل للبرمجة غير الخطية
بقيود أو بدون قيود

1- مفهوم البرنامج غير الخطي Non-linear Program:

جميع البرامج التي تم تناولها في الفصل الأول هي من النوع الخطي، بمعنى أن المتغيرات أسها مرفوع إلى الدرجة واحد، إلّا أن الواقع الإقتصادي يشير إلى أن العديد من العلاقات الإقتصادية تتمثل في معادلات غير خطية، وبالتالي تتطلب معالجات خاصة.

ويتم إعتبار البرنامج بأنه برنامج غير خطي إذا تم صياغة علاقة أو أكثر من علاقة في صورة غير خطية. وبمعنى آخر، فإنه في العلاقات غير الخطية تحمل جميع أو بعض متغيرات العلاقة الإقتصادية أساً أعلى من الدرجة الأولى. والعلاقات غير الخطية لا تشكل خطاً مستقيماً.

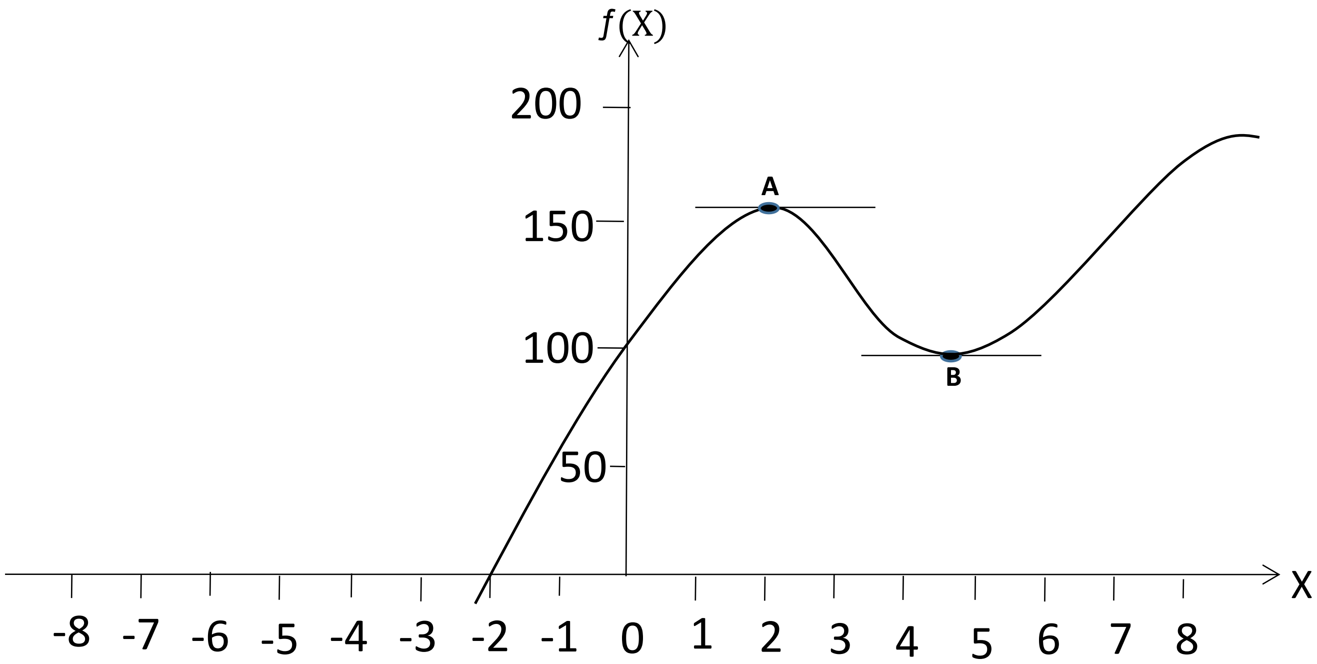
وتتنوع صيغ الدوال غير الخطية. ونذكر منها:

- الدالة التربيعية Quadratic Function: ويُعبّر عنها بالصيغة التالية: $f(X) = aX^2 + bX + c$
- الدالة التكعيبية Cubic function: ويُعبّر عنها بالصيغة التالية: $f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$
- الدالة اللوغاريتمية Logarithmic function: يُمكن كتابتها بالصيغة التالية: $f(X) = \log_b x$
- الدالة الأسية: Exponential function: يُمكن كتابتها بالصيغة التالية: $f(X) = b^x$

وقبل التطرق إلى أساليب حل البرامج غير الخطية، سنتطرق إلى مفهوم النهايات العظمى والدنيا والتي يقوم عليها حل هذه البرامج.

2- النهايات العظمى والدنيا المحلية والكلية:

لنفترض الدالة f(X) والتمثيل البياني لها كما يلي:



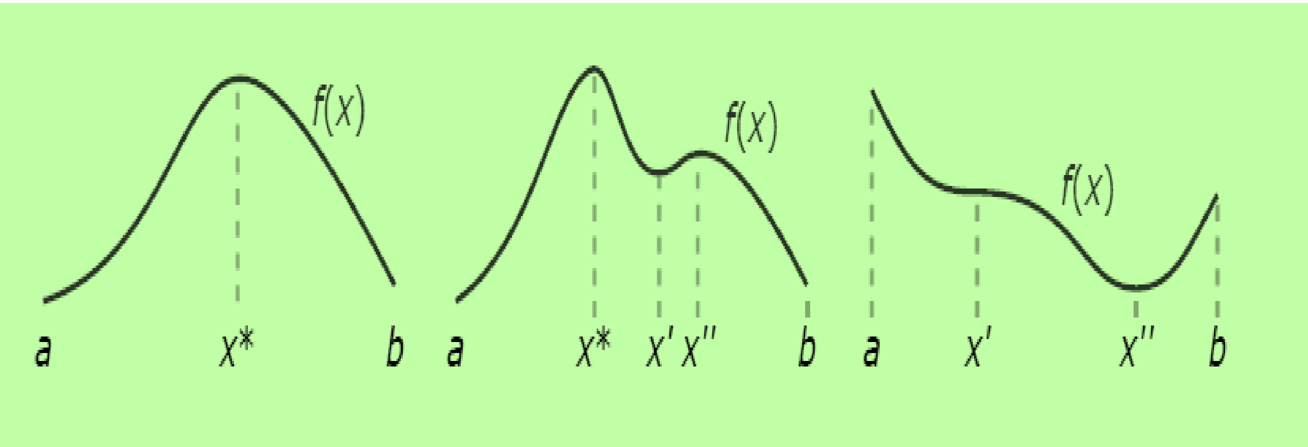
يُوضّح الشكل أعلاه أن الدالة تصل إلى نهاية عظمى محلية (أو نسبية) Local maximum عند النقطة A، بمعنى أن الدالة تكون قيمتها عند هذه النقطة أكبر من قيمتها عند أية نقطة مجاورة للنقطة A. وأُطلق عليها نهاية عظمى محلية أو نسبية لأن الدالة يُمكن أن تأخذ قيمة أعلى عند نقاط أخرى، وبالتالي فهي ليست نهاية مطلقة أو

كلية. وعند النهاية العظمى المحلية يكون رسم الدالة متنازلا على الجانبين، وهو ما يُلاحظ عند النقطة A حيث تتنازل الدالة على جانبي النقطة. وعند هذه النقطة تكون الدالة مستقرة Stationary، أي أنها لا متزايدة ولا متناقصة، ويكون المماس للدالة عند هذه النقطة أفقياً، ما يعني أن ميله يساوي الصفر.

وتصل الدالة إلى نهاية دنيا محلية (أو نسبية) Local minimum عند النقطة B، بمعنى أن الدالة تكون قيمتها عند هذه النقطة أصغر من قيمتها عند أية نقطة مجاورة للنقطة B. وأُطلق عليها نهاية دنيا محلية أو نسبية لأن الدالة يُمكن أن تأخذ قيمة أدنى عند نقاط أخرى، وبالتالي فهي ليست نهاية مطلقة أو كلية. وعند النهاية الدنيا المحلية تتصاعد الدالة على جانبي النهاية، وهو ما يُمكن ملاحظته عند النقطة B. وعند هذه النقطة تكون الدالة مستقرة، أي أنها لا متزايدة ولا متناقصة، ويكون المماس للدالة عند هذه النقطة أفقياً، ما يعني أن ميله يساوي الصفر.

ويُطلق على القيم التي تحقق نهاية عظمى أو دنيا للدالة بالنقاط الحرجة (Critical points أو Stationary points. ويُمكن أن تكون هناك قيم أعلى من القيم التي تحقق نهاية عظمى للدالة أو قيم أدنى من القيم التي تحقق نهاية دنيا للدالة إلّا أنّها لا تُعّد نقاط حرجة لأن الميل عند تلك القيم لا يساوي الصفر. ويُمكن أن تمثل النقاط الحرجة نقاط إنعطاف حيث تقطع الدالة خط المماس وتتحول من محدبة Convex إلى مقعرة Concave أو العكس. ولفهم أكبر لمعنى النهايات العظمى (الدنيا) المحلية أو الكلية ننظر إلى الأشكال التالية:

أشكال توضّح بعض المفاهيم حول النقاط الحرجة والنهايات



– الشكل الأيسر يوضّح وجود نقطة حرجة واحدةX^* وهي نهاية عظمى كلية للدالة $f(X)$؛

– الشكل الأوسط يحتوي على ثلاثة نقاط حرجة وهي $X^*, X^`, X^{``}$. النقطة الحرجة $X^*$ هي نهاية عظمى كلية، النقطة الحرجة $X^`$ هي نهاية دنيا محلية والنقطة الحرجة $X^{``}$ هي نهاية عظمى محلية؛

– الشكل الأيمن يتضمن نقطتين حرجتين $X^`, X^{``}$. النقطة الحرجة$X^`$ هي نقطة إنعطاف، أما النقطة الحرجة$X^{``}$ فهي نهاية دنيا كلية.

ولنقاط الإنعطاف أهمية قليلة في مجال الإقتصاد، أما النهايات الصغرى والعظمى فهي مهمة جداً.

وفيما يخص النهايات العظمى (الدنيا) الكلية فهي تُعتبر نهايات عظمى (دنيا) محلية. ويتم الإشارة أحياناً إلى النهايات العظمى (الدنيا) المحلية كنهايات عظمى (دنيا) كلية للتأكيد على أنها ليست فقط نهايات عظمى (دنيا) محلية.

وفي النظرية الإقتصادية تقريبا يتم دائما الإهتمام بالنهايات العظمى الكلية وليس مجرد النهايات العظمى المحلية. وعند حل البرامج غير الخطية سنهتم فقط بكيفية إيجاد نقاط الحلول المثلى والتي هي نهايات محلية، بدون التطرق إلى طرق التحقق من كونها أيضاً نهايات كلية.

3- طرق حل البرامج غير الخطية:

تتعدد الطرق المُستخدمة في إيجاد الحل الأمثل للبرامج غير الخطية حسب الحالات التالية:

- عدد متغيرات البرنامج غير الخطي؛
- وجود أو عدم وجود قيود؛
- وجود قيد أو أكثر في شكل متباينة.

3-1- حل البرامج غير الخطية بدون قيود:

3-1-1- البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرة واحدة:

لنفترض الدالة التالية:

$$Y = f(X)$$

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر شرطين:

- **الشرط الضروري:** إن الشرط الضروري للحصول على نهاية عظمى أو نهاية دنيا للدالة هو أن تكون مشتقة هذه الأخيرة تساوي الصفر، أي: $\frac{\delta Y}{\delta X} = 0$. وهذا الشرط لا يُوضّح ما إذا كانت الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا بل يُوضّح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لابد من توفر الشرط الثاني.

- **الشرط الكافي:** وهذا الشرط يسمح بمعرفة صنف النقاط الحرجة ما إذا كانت الدالة عند هذه القيم عند نهايتها العظمى أو الدنيا. ويتحقق هذا الشرط عندما تكون قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقاط الحرجة كما يلي:

الحالة الأولى: قيمة المشتقة الثانية سالبة، أي: $\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2} < 0$، وهي تعني وجود قيمة عظمى. والإشارة السالبة للمشتقة الثانية تعني أن منحنى الدالة يتجه نحو التناقص بعد أن وصل إلى النهاية العظمى؛

الحالة الثانية: قيمة المشتقة الثانية موجبة، أي: $\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2} > 0$: وهي تعني وجود قيمة دنيا. والإشارة الموجبة للمشتقة الثانية تعني أن المنحنى يتجه نحو التزايد بعد أن وصل إلى النهاية الدنيا؛

الحالة الثالثة: قيمة المشتقة الثانية معدومة، أي: $\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2} = 0$، وهي تعني أن النقطة الحرجة هي نقطة إنعطاف، أو يُمكن أن تكون نهاية عظمى أو نهاية دنيا وتحتاج إلى معلومات أخرى لتمييزها. ويُمكن لإشارات المشتقات من درجة أعلى أن تحدد ما إذا كانت النقاط الحرجة هي نهاية عظمى أو نهاية دنيا. وعملياً، فإن هذه الشروط نادراً ما تكون مفيدة.

ويُمكن تلخيص شروط النهايات العظمى والنهايات الدنيا للدوال ذات المتغيرة الواحدة كما يلي:

الشرط \ نهاية الدالة	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{\delta Y}{\delta X}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X}=0$
الكافي	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2}>0$	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2}<0$

مثال 1:

ليكن لديك دالة الربح الكلي التالية:

$$\pi=\frac{1}{3}X^3-3.5X^2+10X+35$$

المطلوب: حدد حجم الإنتاج من X الذي يُحقق أعظم ربح كلي، وما هي قيمة هذا الربح عند هذا الحجم من الإنتاج؟

الحل:

- **الشرط الضروري:** نجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر:

$$\frac{\delta\pi}{\delta X}=X^2-7X+10=0$$

نقوم بحل المعادلة السابقة، وهي معادلة تربيعية، بطريقة المميز كما يلي:

$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(1)(10)=49-40=9$$

بما أن $\Delta>0$ فالمعادلة التربيعية لها جذران حقيقيان غير متساويان يُمكن إيجادهما وفقا للقانون التالي:

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$X=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(10)}}{2(1)}=\frac{7\pm3}{2}$$

$$\therefore X_1=\frac{7-3}{2}=2$$

$$\therefore X_2=\frac{7+3}{2}=5$$

هناك نقطتين حرجتين هما: $X_1=2$ و$X_2=5$

ملاحظة: إقتصادياً تُرفض القيم السالبة إن وُجدت.

- **الشرط الكافي:**

نجد المشتقة الثانية كما يلي:

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta X^2}=2X-7$$

نقوم بتعويض القيم الحرجة في معادلة المشتقة الثانية كما يلي:

عندما X=2:

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta X^2} = 2(2) - 7 = -3 < 0$$

عندما X=5:

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta X^2} = 2(5) - 7 = 3 > 0$$

يُلاحظ أن قيمة المشتقة الثانية عند X=2 أقل من الصفر، وهذا يعني أن هناك نهاية عظمى عند هذه النقطة الحرجة. قيمة الربح الكلي القصوى هي:

$$Max\ \pi = \frac{1}{3}(2)^3 - 3.5(2)^2 + 10(2) + 35 = \frac{\mathbf{131}}{\mathbf{3}}$$ وحدة نقدية

وإذا إفترضنا أن الدالة السابقة هي دالة التكلفة الكلية، وكان المطلوب هو إيجاد حجم الإنتاج الذي يقلل إلى أدنى حد التكلفة الكلية، ففي هذه الحالة فإن x=5 تحقق هذا الحل لأن قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة الحرجة موجبة، وقيمة التكلفة الكلية ستكون:

$$Min\ C = \frac{1}{3}(5)^3 - 3.5(5)^2 + 10(5) + 35 = \frac{\mathbf{235}}{\mathbf{6}}$$ وحدة نقدية

مثال 2:

بعد دراسات معمقة توصلت إحدى المؤسسات الصناعية إلى صياغة دالتي الإيراد الكلي والتكلفة الكلية الخاصة بمنتجها كما يلي:

$$TR = -6X^2 + 1480X$$
$$TC = 40X + 1500$$

حيث:

TR: الإيراد الكلي

TC: التكلفة الكلية

X: المنتج

المطلوب:

- أوجد دالة الربح الكلي؟
- حدد مستوى الإنتاج الذي يعظم الربح الكلي، وما هي قيمة هذا الربح عند هذا المستوى من الإنتاج؟

الحل:

- إيجاد دالة الربح الكلي:

بما أن الربح الكلي يساوي الإيراد الكلي ناقص التكلفة الكلية، إذا:

$$\pi = TR - TC = (-6X^2 + 1480X) - (40X + 1500) = -6X^2 + 1440X - 1500$$

- تحديد مستوى الإنتاج الذي يعظم قيمة الربح الكلي وقيمة هذا الربح عند هذا المستوى من الإنتاج:

لدينا:

$$\pi = -6X^2 + 1440X - 1500$$

– **الشرط الضروري:** نجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر:

$$\frac{\delta\pi}{\delta X} = -12X + 1440 = 0 \Rightarrow X = \frac{1440}{12} = 120$$

هناك نقطة حرجة واحدة قيمتها X=120

– **الشرط الكافي:**

نجد المشتقة الثانية كما يلي:

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta X^2} = -12 < 0$$

بما أن قيمة المشتقة الثانية سالبة فهذا يعني وجود نهاية عظمى لدالة الربح الكلي عند حجم إنتاج 120 وحدة، وتبلغ قيمة هذا الربح عند هذا الحجم من الإنتاج:

$$Max\ \pi = -6(120)^2 + 1440(120) - 1500 = \mathbf{84900}$$ وحدة نقدية

<u>3–1–2– البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرتين:</u>

لا ترتبط الدوال الإقتصادية بمتغيرة واحدة فقط بل الكثير منها يرتبط بمتغيرتين أو أكثر. فعلى سبيل المثال نجد أن عملية إنتاج منتوج ما يتطلب العديد من عناصر الإنتاج مثل العمل ورأس المال.

وسنعالج في هذا الجزء البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرتين، وفي جزء لاحق سنعالج البرامج غير الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرتين.

لنفترض الدالة التالية:

$$\mathrm{Y} = f(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$$

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر شرطين:

– **الشرط الضروري:** المشتقات الجزئية الأولى للدالة ينبغي أن تساوي الصفر، أي: $\frac{\delta \mathrm{Y}}{\delta X_1} = 0$ و $\frac{\delta \mathrm{Y}}{\delta X_2} = 0$

وهذا الشرط لا يُوضّح ما إذا كانت الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا بل يُوضّح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لابد من توفر الشرط الثاني.

– **الشرط الكافي:** وهو أن تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية عند النقاط الحرجة كما يلي:

$\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_1^2} < 0$ و $\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_2^2} < 0$: الدالة عند نهاية عظمى.

$\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_1^2} > 0$ و $\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_2^2} > 0$: الدالة عند نهاية دنيا.

وهناك شرط ثالث في كلا الحالتين وهو أن جداء المشتقة الجزئية الأولى والمشتقة الجزئية الثانية ينبغي أن يكون أكبر من مربع المشتقة الجزئية الثانية المتقاطعة، أي:

$$\left(\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2\mathrm{Y}}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$$

لأن عدم توفر هذا الشرط يضعنا أمام الحالتين التاليتين:

–الدالة عند **نقطة سرج** Saddle point عندما يتوافر الشرط التالي عند القيم الحرجة للمتغيرتين:

$$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$$

وكانت $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}$ و $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}$ لهما إشارتان مختلفتان.

– الدالة عند **نقطة إنعطاف** Inflection point عندما يتوافر الشرط التالي عند القيم الحرجة للمتغيرتين:

$$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$$

وكانت $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}$ و $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}$ لهما نفس الإشارة.

وفي حالة كون:

$$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) = \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$$

فإن الفحص غير قطعي inconclusive.

ويُمكن تلخيص طريقة إيجاد وتصنيف النقاط الحرجة للدالة ذات المتغيرتين كما يلي:

الشرط	نهاية دنيا	نهاية عظمى	نقطة سرج	نقطة إنعطاف
الضروري	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0, \frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0, \frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0, \frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0, \frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$
الكافي	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}>0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}>0$	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}<0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}<0$	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}>0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}<0$ أو $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}<0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}>0$	$\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}>0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}>0$ أو $\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}<0, \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}<0$
الثالث	$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$

مثال 3:

ليكن لديك دالة التكلفة الكلية التالية:

$$C = 5X_1^2 + 2X_2^2 - 20X_1 - 12X_2 + 100$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج التي يحقق أدنى تكلفة كلية ممكنة، وما هي قيمة هذه التكلفة عند هذا الحجم من الإنتاج؟

الحل:

–**الشرط الأول:** إيجاد القيم الحرجة:

$$\frac{\delta C}{\delta X_1} = 10X_1 - 20 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{\delta C}{\delta X_2} = 4X_2 - 12 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{12}{4} = 3$$

– **الشرط الثاني:** إيجاد المشتقات الجزئية الثانية:

$$\frac{\delta^2 C}{\delta X_1^2} = 10 > 0$$

$$\frac{\delta^2 C}{\delta X_2^2} = 4 > 0$$

وبما أن المشتقتين الجزئيتين موجبتين فإن دالة التكلفة لها نهاية دنيا عند النقاط الحرجة $X_1 = 2, X_2 = 3$

نقوم بإجراء الفحص الثالث للتأكد من عدم وجود نقطة إنعطاف.

$$\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2}\right)^2$$
$$(10)(4) > (0)^2$$
$$40 > 0$$

والنتيجة تعني عدم وجود نقطة إنعطاف.

إذاً تتحقق أدنى تكلفة كلية عند مستويات الإنتاج التالية: $X_1 = 2, X_2 = 3$

وقيمة أدنى تكلفة هي:

$$Min\ Z = 5(2)^2 + 2(3)^2 - 20(2) - 12(3) + 100 = \mathbf{62}$$ وحدة نقدية

<u>3-1-3- البرامج غير الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرتين:</u>

لنفترض الدالة التالية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots X_n)$$

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر الشرطين التاليين:

- **الشرط الضروري:** المشتقات الجزئية الأولى للدالة ينبغي أن تساوي الصفر، أي:

$$\frac{\delta Y}{\delta X_1} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_2} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_3} = 0, \dots, \frac{\delta Y}{\delta X_n} = 0$$

وهذا الشرط لا يُوضّح ما إذا كانت النهاية عظمى أو دنيا بل يُوضّح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لابد من توفر الشرط الثاني.

- **الشرط الكافي:** إن تطبيق هذا الشرط في حالة الدوال متعددة المتغيرات (بما فيما الدوال التي تتكون من متغيرتين) يتطلب إستخدام المحدد الهيسيHessian determinant لمعرفة ما إذا كانت الدالة عند القيم الحرجة عند نهايتها العظمى أو الدنيا.

والمحدد الهيسي يتكون من المشتقات الجزئية الثانية لكل متغيرة بالنسبة لنفس المتغيرة وتقع على القطر الرئيسي، والمشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة وتقع خارج القطر الرئيسي كما يلي:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 Y}{\delta X_1^2} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_2} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_3} & \cdots & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_1 \delta X_n} \\ \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2 \delta X_1} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2^2} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2 \delta X_3} & \cdots & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_2 \delta X_n} \\ \frac{\delta^2 Y}{\delta X_3 \delta X_1} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_3 \delta X_2} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_3^2} & \cdots & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_3 \delta X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta^2 Y}{\delta X_n \delta X_1} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_n \delta X_2} & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_n \delta X_3} & \cdots & \frac{\delta^2 Y}{\delta X_n^2} \end{vmatrix}$$

وبحساب قيمة المحدد نكون أمام حالتين:

– إذا كان المحدد الهيسي أكيد الإيجابية تكون النقاط الحرجة عبارة عن نقاط تحقق نهاية دنيا للدالة. ويكون المحدد الهيسي أكيد الإيجابية عندما تكون جميع محيدداته الرئيسية القطرية موجبة، أي: $|\mathrm{H}_1|, |\mathrm{H}_2|, |\mathrm{H}_3|, \dots, |\mathrm{H}_n| > 0$.

– إذا كان المحدد الهيسي أكيد السلبية تكون النقاط الحرجة عبارة عن نقاط تحقق نهاية عظمى للدالة. ويكون المحدد الهيسي أكيد السلبية عندما تتبادل جميع محيدداته الرئيسية القطرية الإشارة فيما بينها بين السلبية والإيجابية مبتدئة بالإشارة السالبة كما يلي: $|\mathrm{H}_1| < 0, |\mathrm{H}_2| > 0, |\mathrm{H}_3| < 0, \dots$

وإذا لم يكن المحدد الهيسي أكيد الإيجابية ولا أكيد السلبية تكون النقاط الحرجة عبارة عن نقاط سرجية، أي أن النقاط لا تحقق نهاية دنيا ولا نهاية عظمى للدالة.

ويُمكن تلخيص شروط النهايات الدنيا والعظمى في حالة وجود أكثر من متغيرتين كما يلي:

نهاية الدالة / الشرط	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{\delta Y}{\delta X_1} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_2} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_3} = 0, \dots, \frac{\delta Y}{\delta X_n} = 0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_2} = 0, \frac{\delta Y}{\delta X_3} = 0, \dots, \frac{\delta Y}{\delta X_n} = 0$
الكافي	$|\mathrm{H}_1|, |\mathrm{H}_2|, |\mathrm{H}_3|, \dots, |\mathrm{H}_n| > 0$	$|\mathrm{H}_1| < 0, |\mathrm{H}_2| > 0, |\mathrm{H}_3| < 0, \dots$

مثال 4:

ليكن لديك دالة التكلفة الكلية التالية:

$$C = X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 - 2X_1 - 8X_2 - 18X_3$$

المطلوب: أوجد قيم X_1، X_2 و X_3 التي تحقق أدنى تكلفة كلية، وما هي قيمة هذه التكلفة عند هذه القيم؟

الحل:

– **الشرط الضروري:**

$$\frac{\delta C}{\delta X_1} = 2X_1 - 2 = 0 \Rightarrow X_1 = 1$$

$$\frac{\delta C}{\delta X_2} = 4X_2 - 8 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$$

$$\frac{\delta C}{\delta X_3} = 6X_3 - 18 = 0 \Rightarrow X_3 = 3$$

إذا القيم الحرجة هي:

$$X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$$

– **الشرط الكافي:** نستخدم المحدد الهيسي لتحديد نوع نهاية القيم الحرجة كما يلي:

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

نجد المحيددات الرئيسية القطرية كما يلي:

$$|H_1| = |2| > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0$$

بما أن جميع المحيددات الرئيسية القطرية موجبة فهذا يعني أن المحدد الهيسي أكيد الإيجابية، وبالتالي فإن دالة التكلفة الكلية تكون عند نهاية دنيا عند القيم الحرجة $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$، وقيمة أدنى تكلفة كلية هي:

$$Min\ C = (1)^2 + 2(2)^2 + 3(3)^2 - 2(1) - 8(2) - 18(3) = \mathbf{-36}$$

3–2– حل البرامج غير الخطية المقيّدة :Constrained optimization:

تُعتبر الدوال غير الخطية التي تم تناولها سابقاً دوالاً حرة لأنها لا ترتبط بقيود، وفي هذه الحالة يُمكن لمتغيرات هذه الدوال أن تأخذ أية قيمة، إلّا أن هذه الحالة غير واقعية، فالمنشآت التي ترغب في تخفيض تكاليفها أو تعظيم أرباحها عليها أن تأخذ بعين الإعتبار العديد من العناصر مثل حجم الطلب على منتجاتها، محدودية الموارد مثل المواد الأولية،...الخ، وهي عناصر تُمثل قيوداً على دوال الهدف.

ويأخذ البرنامج غير الخطي المقيد الشكل التالي:

$$\text{Max Z (Min Z)} = f(X_1, \dots X_n)$$

$$\text{s/c} \begin{cases} g_1(X_1, \dots, X_n) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(X_1, \dots, X_n) = b_m \\ h_1(X_1, \dots, X_n) \le k_1 \\ \vdots \\ h_s(X_1, \dots, X_n) \le k_s \end{cases}$$

ويتم حل البرامج غير الخطية المقيّدة باستخدام طريقة التعويض، طريقة لاغرانج وطريقة كروش–كوهن–تاكر في حالة وجود متباينات.

3-2-1- طريقة التعويض:

لنتفرض برنامج غير خطي ذو متغيرتين يتضمن قيد واحد: يتم تطبيق طريقة التعويض باتباع الخطوات التالية:

- إستخدام دالة القيد للتعبير عن متغيرة بالنسبة للمتغيرة الأخرى؛
- إحلال التعبير السابق في دالة الهدف؛
- إيجاد النقاط الحرجة لدالة الهدف التي تحتوي على متغيرة واحدة (يصبح لدينا برنامج خطي غير مقيد).

مثال 5:

لنفترض دالة الإنتاج التالية لمؤسسة ما:

$$Q = X_1 - X_2^2 + 8X_2$$

حيث تمثل كل من X_1 و X_2 عاملي إنتاج، وأسعارهما هما: وحدة نقدية $P_{X_1} = 1$, وحدة نقدية $P_{X_2} = 2$.

تلقت المؤسسة طلبية من أحد الزبائن لشراء 20 وحدة من المنتوج Q، مع العلم أن المؤسسة لا تملك مخزن ملائم لتخزين هذا النوع من المنتوج.

المطلوب: أوجد الكميات اللازمة من عاملي الإنتاج لتلبية طلبية الزبون بحيث تتحمل المؤسسة أقل تكلفة كلية؟

الحل:

بما أن المؤسسة لا تملك مخزن ملائم لتخزين المنتوج Q، فهذا يعني أن عليها أن تنتج بالضبط ما يطلبه الزبون، وبالتالي فإن القيد يُكتب على شكل معادلة. إذا يُكتب البرنامج غير الخطي كما يلي:

$$Min\ C = X_1 + 2X_2$$
$$\text{s/c}\left\{ X_1 - X_2^2 + 8X_2 = 20 \right.$$

نعيد كتابة القيد بالتعبير عن متغيرة بدلالة متغيرة أخرى، وكما يظهر من القيد فإن التعبير الأسهل هو كتابة X_1 بدلالة X_2 كما يلي:

$$X_1 = 20 + X_2^2 - 8X_2$$

يتم إحلال التعبير السابق في دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ C = 20 + X_2^2 - 8X_2 + 2X_2 \Rightarrow Min\ Z = 20 + X_2^2 - 6X_2$$

بحث عن النقاط الحرجة كما يلي:

$$\frac{\delta C}{\delta X_2} = 2X_2 - 6 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$$

وبتعويض قيمة X_2 في دالة القيد نتحصل على قيمة X_1 كما يلي:

$$X_1 = 20 + (3)^2 - 8(3) = 5$$

المشتقة الثانية:

$$\frac{\delta^2 C}{\delta X_2^2} = 2 > 0$$

وبما أن إشارة المشتقة الثانية موجبة، فإن الدالة تصل إلى نهاية دنيا عند $X_1 = 5, X_2 = 3$.

وقيمة أدنى تكلفة كلية هي:

$$Min\ C = 5 + 2(3) = \mathbf{11} \text{ وحدية نقدية}$$

3-2-2- طريقة مضاعف لاغرانج Method of lagrange multiplier:

تُعتبر المرحلة الأولى من طريقة التعويض(التعبير عن متغيرة بمتغيرة أخرى) أصعب مرحلة، وهو ما لم يتم ملاحظته في المثال رقم 5 أعلاه. ففي حالة كون جميع متغيرات القيد من درجات أعلى من الواحد سيصعب التعبير عن متغيرة بمتغيرة أخرى، وأيضاً ستصعب عملية التعويض في دالة الهدف، وخاصة إذا كانت هذه الأخيرة بدورها غير خطية. كذلك تظهر الصعوبة في تطبيق طريقة التعويض عندما يتضمن البرنامج غير الخطي أكثر من قيد، أو يتكون من العديد من المتغيرات. ولمعالجة مثل هذه الصعوبات يتم إستخدام طريقة مضاعف لاغرانج.

ويتم تطبيق طريقة مضاعف لاغرانج كما يلي:

لنفترض دالة الهدف التالية:

$$Max\ Z\ (Min\ Z) = f(X_1, X_2, \dots X_n)$$

ونريد إيجاد القيمة المثلى لها مع وجود القيود التالية:

$$s/c \begin{cases} g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = K_1 \\ g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = K_2 \\ \vdots \\ g_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = K_m\ (j = 1, \dots, m) \end{cases}$$

نقوم بتكوين دالة جديدة تُدعى بدالة لاغرانج نرمز لها بـ L كما يلي:

$$L = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \lambda_1[K_1 - g_1(X_1, X_2, \dots, X_n)] + \lambda_2[K_2 - g_2(X_1, X_2, \dots, X_n)] + \cdots + \lambda_m[K_m - g_m(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

أو

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(X_1, X_2, \dots X_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[K_j - g_j(X_1, X_2, \dots X_n)\right]$$

حيث يشير λ_j إلى مضاعف لاغرانج، وهو يقيس درجة تغير دالة الهدف عندما تتغير قيمة ثابت القيد j.

وينبغي في مثل هذه الدوال لتكون عند نهايتها العظمى أو الدنيا أن يتوفر الشرطين التاليين:

- **الشرط الضروري:** المشتقات الجزئية الأولى للدالة ينبغي أن تساوي الصفر، أي:

$$\frac{\delta L}{\delta X_1} = 0, \frac{\delta L}{\delta X_2} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta X_n} = 0, \frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = 0, \frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta \lambda_m} = 0$$

- **الشرط الكافي:** إن تطبيق هذا الشرط في حالة تعدد المتغيرات يتطلب إستخدام محدد هيسين المؤطر The bordered Hessian determinant لمعرفة ما إذا كانت الدالة عند القيم الحرجة عند نهايتها العظمى أو الدنيا. ويُدعى محدد هيسين بالمؤطر لكونه مؤطر بالمشتقات الأولى لقيود البرنامج غير الخطي.

إذا إفترضنا أن البرنامج غير الخطي يتكون من n متغيرة و m قيد، فالمحدد الهيسي المؤطر يُكتب كما يلي:

$$|H^*| = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_n} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1 X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n^2} \end{vmatrix}$$

إذا كان عدد المتغيرات أكبر من عدد القيود، أي $n > m$، يتحقق الشرط الكافي باستخدام محدد هيسين المؤطر كما يلي (بالإضافة إلى الشرط الضروري):

الشرط / نهاية الدالة	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{\delta L}{\delta X_1} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta X_n} = 0, \frac{\delta L}{\delta\lambda_1} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta\lambda_m} = 0$	$\frac{\delta L}{\delta X_1} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta X_n} = 0, \frac{\delta L}{\delta\lambda_1} = 0, \dots, \frac{\delta L}{\delta\lambda_m} = 0$
الكافي	نحسب آخر n−m (عدد المتغيرات ناقص عدد القيود) محيدد رئيسي قطري، وتكون إشارة جميع هذه المحيددات هي نفسها إشارة $(-1)^m$	نحسب آخر n−m (عدد المتغيرات ناقص عدد القيود) محيدد رئيسي قطري، وتتناوب إشارات المحيددات بين الإشارة السالبة والموجبة، حيث تكون إشارة المحيدد الأول من هذه المحيددات الأخيرة هي نفسها إشارة $(-1)^{m+1}$

__مثال 6:__

تنتج إحدى المؤسسات ثلاثة أنواع من الآلات، التكلفة الكلية المشتركة لهذه الآلات ممثلة في الدالة التالية:

$$C = 4X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 + X_2X_3 - 30X_2 - 30X_3$$

تخطط المؤسسة لإنتاج ما مجموعه 100 وحدة من جميع أنواع الآلات.

__المطلوب:__ كم عدد كل نوع من الآلات يُمكن أن تنتجه المؤسسة بحيث تتحمل أقل تكلفة كلية ممكنة؟

__الحل:__

يُكتب البرنامج غير الخطي كما يلي:

$$Min\ C = 4X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 + X_2X_3 - 30X_2 - 30X_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 100 \end{cases}$$

تُشكّل دالة لاغرانج كما يلي:

$$L = 4X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 + X_2X_3 - 30X_2 - 30X_3 + \lambda(100 - X_1 - X_2 - X_3)$$

الشرط الضروري: نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى للدالة L ونساويها بالصفر كما يلي:

$$\frac{\delta L}{\delta X_1} = 8X_1 - 2X_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta X_2} = 4X_2 - 2X_1 + X_3 - 30 - \lambda = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta X_3} = 2X_3 + X_2 - 30 - \lambda = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 100 - X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

بحل المعادلات نجد النقاط الحرجة التالية:

$$X_1 = 20, X_2 = 30, X_3 = 50, \lambda = 100$$

الشرط الكافي: نجد محدد هيسين المؤطر:

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

عدد المتغيرات (n) =3

عدد القيود (m) =1

$$n - m = 2$$

وهذا يعني أنه للتحقق من صنف نهاية الدالة عند النقاط الحرجة X_1, X_2, X_3 يجب حساب المحيددين الرئيسين القطريين الأخيرين كما يلي:

$$|H_3^*| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$|H_4^*| = |H^*| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -39 < 0$$

ويُلاحظ أن إشارة المحيددين هي نفس إشارة $(-1)^m$، وهذا يعني أن دالة الهدف تصل إلى نهايتها الدنيا عند النقاط الحرجة $X_1 = 20, X_2 = 30, X_3 = 50$. إذا تحقق المؤسسة أدنى تكلفة كلية بإنتاج 20 آلة من النوع الأول، 30 آلة من النوع الثاني و50 آلة من النوع الثالث، وقيمة التكلفة الكلية عند هذا المستوى من الإنتاج هي:

$$Min\ Z = \mathbf{3800}$$ وحدة نقدية

3-2-3- شروط كروش-كوهن-تاكر Karush–Kuhn–Tucker (KKT):

جميع البرامج غير الخطية المقيّدة التي تم تناولها سابقاً تتضمن فقط قيوداً في شكل معادلات، إلّا أن قيود مشاكل الأمثلية غالباً ما تكون تحت شكل متباينات. وفي حالة تضمن البرامج غير الخطية لقيود في شكل متباينات يتم

إستخدام شروط كروش–كوهن–تاكر. وتم تقديم هذه الشروط كتعميم لنظرية مضاعف لاغرانج الكلاسيكية لحل المسائل المقيّدة بمتباينات، وهي مسائل تُعتبر جوهر البرمجة الرياضية في وقتنا الحاضر.

لنفترض البرنامج غير الخطي التالي:

$$\text{Max (Min)}Z = f(X_1, \dots X_n)$$

$$\text{s/c} \begin{cases} g_1(X_1, \dots, X_n) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(X_1, \dots, X_n) = b_m \\ h_1(X_1, \dots, X_n) \le k_1 \\ \vdots \\ h_s(X_1, \dots, X_n) \le k_s \end{cases}$$

تُكتب دالة لاغرنج كما يلي:

$$L(X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_s) = f(X_1, \dots X_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(X_1, \dots X_n) - b_i] - \sum_{j=1}^{s} \mu_j [h_j(X_1, \dots X_n) - k_j]$$

وتُكتب شروط كروش–كوهن–تاكر كما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta X_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\delta L}{\delta X_n} = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda_m} = 0 \\ h_1(X_1, \dots, X_n) - k_1 \le 0 \\ \vdots \\ h_s(X_1, \dots, X_n) - k_s \le 0 \\ \left.\begin{array}{l} \mu_1(h_1(X_1, \dots, X_n) - k_1) = 0 \\ \vdots \\ \mu_s(h_s(X_1, \dots, X_n) - k_s) = 0 \end{array}\right\} \boxed{\text{الشروط التكميلية}} \\ \mu_1 \ge 0, \dots, \mu_s \ge 0 \end{cases}$$

ولإيجاد القيم التي تحقق الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي يتم أولاً إيجاد مختلف الحلول التي تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر باستخدم مختلف التوليفات التي يُمكن تشكيلها من الشروط التكميلية ثم تحديد الحل الذي يحقق أعظم قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم أو أدنى قيمة لها في حالة التقليل.

من شروط كروش–كوهن–تاكر السابقة نفترض أن s=2. تُكتب الشروط التكميلية كما يلي:

الشروط التكميلية: أربعة توليفات ممكنة $\left\{\begin{array}{l}\mu_1(g_1)=0\\ \mu_2(g_2)=0\end{array}\right.$

تعطي الشروط التكميلية أربعة توليفات ممكنة وهي:

$$\mu_1=0,\mu_2=0$$
$$\mu_1=0,g_2=0$$
$$\mu_2=0,g_1=0$$
$$g_1=0,g_2=0$$

وهذا يعني أن عملية البحث عن مختلف الحلول التي تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر تكون عند كل توليفة.

لنفترض الآن أن s=3. تُكتب الشروط التكميلية كما يلي:

الشروط التكميلية: ثمانية توليفات ممكنة $\left\{\begin{array}{l}\mu_1(g_1)=0\\ \mu_2(g_2)=0\\ \mu_3(g_3)=0\end{array}\right.$

تعطي الشروط التكميلية ثمانية توليفات ممكنة وهي:

$$\mu_1=0,\mu_2=0,\mu_3=0$$
$$\mu_1=0,\mu_2=0,g_3=0$$
$$\mu_1=0,g_2=0,\mu_3=0$$
$$\mu_1=0,g_2=0,g_3=0$$
$$g_1=0,\mu_2=0,\mu_3=0$$
$$g_1=0,\mu_2=0,g_3=0$$
$$g_1=0,g_2=0,\mu_3=0$$
$$g_1=0,g_2=0,g_3=0$$

وهذا يعني أن عملية البحث عن مختلف الحلول التي تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر تكون عند كل توليفة.

ويُلاحظ أنه كلما إرتفع عدد المتابينات في البرنامج غير الخطي، إرتفعت معه عدد التوليفات التي يُمكن تشكيلها من الشروط التكميلية.

ملاحظات:

– في حالة وجود متباينة إشارتها "أكبر من أو تساوي" يتم تحويلها إلى متباينة إشارتها "أقل من أو تساوي" بضرب طرفيها في الإشارة السالبة كما يلي:

لنتفترض المتباينة التالية:

$$h(X_1,\dots,X_n)\geq k$$

يتم تحويل إشارة المتباينة إلى "أقل من أو تساوي" كما يلي:

$$-h(X_1,\dots,X_n)\leq -k$$

– من بين الطرق التي يمكن إستخدامها لمعالجة حالة دالة الهدف في صيغة التقليل هي ضرب دالة الهدف في الإشارة السالبة لتحويلها إلى دالة هدف في صيغة التعظيم ثم يتم إيجاد نقطة الحل الأمثل بطريقة عادية لأن عملية البحث عن أدنى قيمة للدالة $f(X_1, \dots X_n)$ في مجال معين هي في الحقيقة نفس عملية البحث عن أقصى قيمة للدالة $-f(X_1, \dots X_n)$ في هذا المجال.

إذا يُمكن تحويل دالة هدف في حالة تقليل إلى دالة هدف في حالة تعظيم كما يلي:

$$\text{Min Z} = f(X_1, \dots X_n) = \text{Max Z} = -f(X_1, \dots X_n)$$

– لنفترض X^* نقطة الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي: يكون القيد محقق أو غير محقق عندما:

– $h_j(X^*) = K_j$: القيد محقق حيث يكون مضاعف لاغرانج المرتبط بهذا القيد أكبر من الصفر.

– $h_j(X^*) < k_j$ القيد غير محقق حيث يكون مضاعف لاغرانج المرتبط بهذا القيد معدوم.

مثال 7:

لنفترض دالة الربح الكلي التالية لمؤسسة ما:

$$\pi = X_1^2 + {X_2}^2$$

حيث تمثل كل من X_1 و X_2 نوعين من المنتجات تنتجهما المؤسسة.

تستخدم المؤسسة لإنتاج X_1 و X_2 مادتين أوليتين. يتطلب إنتاج وحدة واحدة من X_1 وحدتين من المادة الأولية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية، أما إنتاج وحدة واحدة من X_2 فيتطلب وحدة واحدة من المادة الأولية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية.

تملك المؤسسة مخزون من المادتين الأوليتين يُقدّر بـ 15 وحدة بالنسبة للمادة الأولية الأولى و 11 وحدة بالنسبة للمادة الأولية الثانية. ونظراً لقرب إنتهاء تاريخ صلاحية المادة الأولية الأولى فالمؤسسة يجب أن تتخلص في أسرع وقت من كامل مخزونها من هذه المادة.

المطلوب: أوجد قيم X_1 و X_2 لتعظيم ربح المؤسسة؟

الحل:

من معطيات المسألة يتشكل لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$\text{Max } \pi = X_1^2 + {X_2}^2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 15 \\ X_1 + X_2 \le 11 \end{cases}$$

$$L(X_1, X_2, \lambda, \mu) = X_1^2 + {X_2}^2 - \lambda(2X_1 + X_2 - 15) - \mu(X_1 + X_2 - 11)$$

شروط كروش–كوهن–تاكر :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta X_1} = 2X_1 - 2\lambda - \mu = 0 \dots\dots\dots (1) \\ \frac{\delta L}{\delta X_2} = 2X_2 - \lambda - \mu = 0 \dots\dots\dots\dots (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 2X_1 + X_2 - 15 = 0 \dots\dots\dots (3) \\ X_1 + X_2 - 11 \leq 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \\ \mu(X_1 + X_2 - 11) = 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

الشروط التكميلية: توجد توليفتين ممكنتين

إيجاد مختلف الحلول التي تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر

عندما $\mu = 0$:

من المعادلتين 1 و2 نجد:

$$\left.\begin{matrix} 2X_1 - 2\lambda = 0 \\ 2X_2 - \lambda = 0 \end{matrix}\right\} X_1 = 2X_2 \dots\dots (5)$$

نعوض 5 في 3 نجد:

$$2(2X_2) + X_2 - 15 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$$

ومنه:

$$X_1 = 2(X_2) = 2(3) = 6$$
$$2X_1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6$$

إذا:

$$(X_1, X_2, \lambda, \mu) = (6,3,6,0)$$

وجميع هذه القيم تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر.

عندما $X_1 + X_2 - 11 = 0$:

$$X_1 + X_2 - 11 = 0 \Rightarrow X_1 = 11 - X_2 \dots\dots (5)$$

نعوض (5) في (3):

$$2(11 - X_2) + X_2 - 15 = 0 \Rightarrow X_2 = 4$$

ومنه:

$$X_1 = 11 - (4) = 7$$

بحل المعادلتين 1 و2 نجد:

$$\lambda = -6$$

ومنه:

$$\mu = 20$$
$$(X_1, X_2, \lambda, \mu) = (7,4,-6,20)$$

وجميع هذه القيم تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر.

يُلاحظ أن شروط كروش–كوهن–تاكر لها حلين وهما:

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \lambda, \mu) = (6,3,6,0)$$

و

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \lambda, \mu) = (7,4,-6,20)$$

ونقطة الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي تتمثل في القيم التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كما يلي:

$$\mathrm{Max}\ \pi = (6)^2 + (3)^2 = 45$$
$$\mathrm{Max}\ \pi = (7)^2 + (4)^2 = 65$$

إذا نقطة الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي هي:

$$X_1 = 7, X_2 = 4, \mathrm{Max}\ \pi = 65$$

وهذا يعني أن المؤسسة تصل إلى أعظم ربح كلي والذي قدره 65 وحدة نقدية بإنتاج 7 وحدات من المنتج الأول و 4 وحدات من المنتج الثاني.

<u>في حالة وجود قيود عدم السالبية:</u>

تتميز العديد من مشاكل الأمثلية في النظرية الإقتصادية باحتوائها على قيود عدم سالبية المتغيرات. ويتم إعتبار قيد عدم السالبية لكل متغيرة كمتباينة إضافية حيث يتم التعامل معها مثل باقي متباينات البرنامج غير الخطي كما شرحنا سابقاً، إلّا أنّه كلما زاد عدد المتغيرات ستصبح عملية البحث عن الحل الأمثل أكثر صعوبة لأنه سيتم التعامل مع مضاعفات لاغرانج عددها بعدد متباينات البرنامج غير الخطي، بالإضافة إلى مضاعفات لاغرانج المرتبطة بالقيود في شكل معادلات وعدد المتغيرات. ولتجاوز مثل هذه العقبة يُمكن إستخدام طريقة تتمثل في تشكيل دالة لاغرانج المعدّلة (The modified Lagrangean) كما يلي:

لنفترض البرنامج غير الخطي التالي:

$$\mathrm{Max}\ \mathrm{Z} = f(X_1, \dots X_n)$$

$$\text{s/c}\begin{cases} g_1(X_1, \dots, X_n) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(X_1, \dots, X_n) = b_m \\ h_1(X_1, \dots, X_n) \le k_1 \\ \vdots \\ h_s(X_1, \dots, X_n) \le k_s \\ X_1 \ge 0, \dots, X_n \ge 0 \end{cases}$$

يُلاحظ وجود قيود عدم سالبية المتغيرات $X_1 \ge 0, \dots, X_n \ge 0$

يتم تشكيل دالة لاغرانج المعدّلة كما يلي:

$$M(X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_s) = f(X_1, \dots X_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(X_1, \dots, X_n) - b_i] - \sum_{j=1}^{s} \mu_j [h_j(X_1, \dots X_n) - k_j]$$

ويُلاحظ أن دالة لاغرانج المعدّلة لا تحتوي بشكل صريح على قيود عدم سالبية المتغيرات.

وتُكتب شروط كروش–كوهن–تاكر كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{\delta M}{\delta X_1} \leq 0 \\ X_1 \frac{\delta M}{\delta X_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta M}{\delta X_n} \leq 0 \\ X_n \frac{\delta M}{\delta X_n} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_m} = 0 \\ h_1(X_1, \ldots, X_n) - k_1 \leq 0 \\ \vdots \\ h_s(X_1, \ldots, X_n) - k_s \leq 0 \\ \mu_1(h_1(X_1, \ldots, X_n) - k_1) = 0 \\ \vdots \\ \mu_s(h_s(X_1, \ldots, X_n) - k_s) = 0 \\ X_1 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0, \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_s \geq 0 \end{cases}$$

وبدلاً من البحث عن القيم التي تحقق شروط كروش–كوهن–تاكر باستخدام مختلف التوليفات الممكنة للشروط التكميلية، يتم إستخدام أسلوب آخر كما هو موضح في المثال 8 أدناه.

مثال 8:

ليكن لديك البرنامج غير الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = X_1^2 + {X_2}^2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 3X_2 \geq 10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي؟

الحل:

بما أن دالة الهدف في حالة التقليل، يتم ضربها في الإشارة السالبة لتحويلها إلى دالة هدف في صيغة التعظيم كما يلي:

$$\text{Min } Z = \text{Max } Z = -X_1^2 - {X_2}^2$$

أيضاً يتم تحويل إشارة المتباينة في البرنامج غير الخطي من "أكبر من أو تساوي" إلى "أقل من أو تساوي" كما يلي:

$$-X_1 - 3X_2 \leq -10$$

تُكتب دالة لاغرانج كما يلي:

$$L(X_1, X_2, \mu) = -X_1^2 - X_2^2 - \mu(-X_1 - 3X_2 + 10)$$

دالة لاغرانج المعدّلة:

$$M(X_1, X_2, \mu) = -X_1^2 - {X_2}^2 - \mu(-X_1 - 3X_2 + 10)$$

تُكتب شروط كروش-كوهن-تاكر كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{\delta M}{\delta X_1} = -2X_1 + \mu \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ X_1 \frac{\delta M}{\delta X_1} = X_1(-2X_1 + \mu) = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ \frac{\delta M}{\delta X_2} = -2X_2 + 3\mu \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ X_2 \frac{\delta M}{\delta X_2} = X_2(-2X_2 + 3\mu) = 0 \ldots\ldots (4) \\ -X_1 - 3X_2 + 10 \leq 0 \ldots\ldots\ldots (5) \\ \mu(-X_1 - 3X_2 + 10) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \mu \geq 0 \end{cases}$$

عندما $X_1 = 0$

إذا $X_2 = 0$: من الشرط (5): $10 \leq 0$ وهو مرفوض.

من الشرط (1): $\mu \leq 0$: μ لا يُمكن أن تكون سالبة.

إذا $X_2 > 0$ و$\mu = 0$: من الشرط (4):

$$-2X_2 + 3\mu = 0 \Rightarrow -2X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 0$$

وهو ما يتناقض مع $X_2 > 0$.

$X_1 > 0$

من الشرط (1) نجد:

$$-2X_1 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 2X_1 \ldots\ldots (7)$$

من الشرط (3)، وبأخذ بعين الإعتبار المعادلة (7) نجد:

$$-2X_2 + 6X_1 \leq 0$$

إذا $X_2 = 0$ ، فهذا يعني أن $X_1 \leq 0$ وهو ما يتناقض مع $X_1 > 0$.

إذا $X_2 > 0$، فهذا يعني أنه من الشرط (4):

$$-2X_2 + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}X_2 \ldots\ldots\ldots (8)$$

بمساواة المعادلتين (7) و (8) نجد:

$$X_1 = \frac{1}{3}X_2 \dots\dots\dots (9)$$

بما أن $\mu > 0$ (كما توضحه المعادلة 7)، فمن الشرط 6:

$$-X_1 - 3X_2 + 10 = 0 \dots\dots (10)$$

نعوض المعادلة (9) في المعادلة (10) لنتحصل على:

$$X_1 = 1, X_2 = 3$$

نعوض X_1 في المعادلة (7) فنجد:

$$\mu = 2(1) = 2$$

إذا شروط كروش–كوهن–تاكر لها حل وحيد وهو:

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mu) = (1,3,2)$$

وبالتالي فإن نقطة الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي التي تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف هي:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 3$$
$$\mathrm{Max\ Z} = -(1)^2 - (3)^2 = -10 \Rightarrow \mathrm{Min\ Z} = 10$$

ومما يُمكن إستنتاجه من حل المثال السابق أنه كلما زاد عدد متغيرات البرنامج غير الخطي (و/أو زيادة عدد المتابينات) تصبح عملية البحث عن الحل الأمثل عملية أكثر تعقيداً.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

ليكن لديك دالة التكلفة لمؤسسة صناعية كما يلي:

$$C = 3X^2 - 122.5X + 1528.5$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أدنى تكلفة للمؤسسة، وما هي قيمة التكلفة الكلية عند هذا الحجم من الإنتاج؟

التمرين الثاني:

ليكن لديك دالة الربح التالية:

$$\pi = -X_1^2 - X_2^2 + 8X_1 + 10X_2 - 20$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح، وما هي قيمة الربح الكلي عند هذا الحجم من الإنتاج؟

التمرين الثاني:

تُنتج إحدى المؤسسات المختصة في صناعة المنتجات الجلدية نوعين من الحقائب الجلدية: الكبيرة والصغيرة. دالة الربح الكلي المشتركة الخاصة بهذين المنتجين تتمثل فيما يلي:

$$Z = X_1^2 + X_1X_2 - \frac{1}{2}X_2^2$$

يتطلب إنتاج حقيبة كبيرة واحدة 1.5 متر من الجلد الطبيعي، في حين يتطلب إنتاج حقيبة صغيرة واحدة متر واحد من الجلد الطبيعي.

المؤسسة تملك في مخازنها 52 متر من الجلد الطبيعي.

المطلوب: أوجد الكميات التي يُمكن للمؤسسة إنتاجها من الحقائب الجلدية الكبيرة والحقائب الجلدية الصغيرة لتعظيم ربحها الكلي إذا علمت أنها تريد إستخدام كامل مخزونها من الجلد الطبيعي؟

التمرين الثالث:

تُنتج إحدى المؤسسات نوعين من الألبسة باستخدام نوعين من الأقمشة. يتطلب إنتاج وحدة واحدة من النوع الأول من الألبسة مترا واحد من النوع الأول من الأقمشة ومترين من النوع الثاني من الأقمشة، أما النوع الثاني من الأقمشة فيتطلب إنتاج وحدة واحدة منه مترين ونصف من النوع الأول من الأقمشة ومتر من النوع الثاني من الأقمشة.

يتوفر مخزون المؤسسة على 35 متر و40 متر من كل من النوع الاول من الاقمشة والنوع الثاني من الاقمشة على التوالي، مع العلم أن المؤسسة تريد التخلص بسرعة من مخزونها من النوع الثاني من الأقمشة.

بعمليات حسابية دقيقة توصلت المؤسسة إلى دالة الربح التالية: $Max\ Z = X_1 + X_2^2$

المطلوب: أوجد مختلف الكميات من النوعين من الألبسة التي تنتجهما المؤسسة لتعظيم ربحها (مع الأخذ بعين الإعتبار قيود عدم سالبية المتغيرات).

مراجع الفصل:

– أ. د. وليد إسماعيل السيفو ود. عيد أحمد أبو بكر: أساليب رياضيات الأعمال وتطبيقاتها في العلوم المالية، الإدارية والاقتصادية، الطبعة الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. عيد أحمد أبو بكر و أ. د. وليد إسماعيل السيفو: مبادئ التحليل الكمي، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

– د. حسن ياسين طعمة و أ. د. محمود حسين الوادي: الإقتصاد الرياضي، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2012.

– د. مناضل الجواري: الإقتصاد الرياضي، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.

– د. مجيد على حسين و د. عفاف عبد الجبار سعيد: الإقتصاد الرياضي، الطبعة الأولى، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 2000.

– د. وليد حميدات وآخرون: مبادئ الاقتصاد الرياضي، مؤسسة حمادة للدراسات الجامعية والنشر والتوزيع ودار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الأردن، 2014.

– شمعون شمعون: الرياضيات الإقتصادية،الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005.

– د. عثمان بن إبراهيم السلوم: علم الإدارة واستخدام الحاسوب، النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2010. تاريخ الإسترداد 11 أكتوبر، 2020، من https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/217_qua-lm_ldr_wstkhdm_lhsb.pdf.

– علي درب كسار الحيالي: الاقتصاد الرياضي، جامعة بغداد، 2014. تاريخ الإسترداد 12 نوفمبر، 2020، من http://coagri.uobaghdad.edu.iq/wp-content/uploads/sites/10/2019/08/%D8%A7%D9%84%D8%A7%D9%82%D8%AA%D8%B5%D8%A7%D8%AF-%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A.pdf.

- Yadolah Dodge: Optimisation appliquée,Springer-Verlag, France, 2005.

- Richard Lusby: Karush-Kuhn-Tucker Conditions. Retrieved 24 January, 2021, from http://www2.imm.dtu.dk/courses/02711/lecture3.pdf

- Max Cerf: Techniques d'optimisation, 2018. Consulté le 20 novembre, 2020, sur https://www.ljll.math.upmc.fr/~cerf/Techniques_Optimisation_2018.pdf.

- Joshua Wilde: Constrained Optimization, revised by Isabel Tecu, Takeshi Suzuki and María José Boccardi, 2013. Retrieved 26 January, 2021, from http://www.columbia.edu/~md3405/Constrained_Optimization.pdf.

- Martin J. Osborne: Mathematical methods for economic theory. Retrieved 2 February, 2021, from https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/toc.

- Julien Grenet: Vade mecum : Optimisation statique. Lagrangien et conditions de Kuhn et Tucker. TD d'Économie, École Normale Supérieure, Année 2007-2008. Consulté le 2 février, 2021, sur http://www.parisschoolofeconomics.com/grenet-julien/TD/Annexe1.pdf.

- Fabian Bastin: Modèles de Recherche Opérationnelle. Consulté le 18 décembre, 2020, sur https://www.iro.umontreal.ca/~bastin/Cours/IFT1575/IFT1575.pdf.

- Eivind Eriksen: Lecture 5: Principal Minors and the Hessian, October 01, 2010. Retrieved 5 February, 2021, from https://www.dr-eriksen.no/teaching/GRA6035/2010/lecture5.pdf.
- Fabián Flores-Bazán: Characterizing FJ and KKT conditions in nonconvex mathematical programming with applications. Retrieved 9 February, 2021, from https://www.ci2ma.udec.cl/pdf/pre-publicaciones/2014/pp14-28.pdf.
- Mathematics for Economists: optimisation, University of Cape Town's official online learning system, University of Cape Town, South Africa. Work licenced under a http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/za/deed.en South Africa Licence. Retrieved 11 February, 2021, from https://vula.uct.ac.za/access/content/group/95dfae58-9991-4317-8a1d-e2d58f80b3a3/Published%20OER%20UCT%20Resources/Mathematics%20for%20Economics/Notes/ECO4112F%20Section%203%20Optimisation.pdf.

قائمة المراجع:

– د. محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.

– أ. د. محمد سالم الصفدي: بحوث العمليات: تطبيق وخوارزميات، الطبعة الأولى، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 2009.

– أ. د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون: بحوث العمليات، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.

– د. منعم زمزير الموسوي: بحوث العمليات: مدخل علمي لإتخاذ القرارات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. لحسن عبد الله باشيوة: بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمّان، الأردن، 2011.

– محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات: مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة الثانية، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2009.

– د. حامد سعد نور الشمرتي: بحوث العمليات "مفهوماً وتطبيقاً"، الطبعة الأولى، مكتبة الذاكرة، بغداد، العراق، 2010.

– أحمد محمد الهزاع الصمادي: أساسيات بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار قنديل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. دلال صادق الجواد ود. حميد ناصر الفتال: بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

– أ.د. أنمار أمين البرواري ود. عربية عبد الرحمن داؤد: الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والإقتصادية، الطبعة الأولى، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.

– د. سهيلة عبد الله سعيد: الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.

– أ. د. سليمان خالد عبيدات: الأساليب الكمية في الإدارة، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2015.

– دونالد س. واتسون وماري أ. هولمان: نظرية السعر واستخداماتها، ترجمة ضياء مجيد الموسوي، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، بدون تاريخ.

– د. عثمان بن إبراهيم السلوم: علم الإدارة واستخدام الحاسوب، النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2010. تاريخ الإسترداد 11 أكتوبر، 2020، من https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/217_qua-lm_ldr_wstkhdm_lhsb.pdf.

– أ. د. وليد إسماعيل السيفو ود. عيد أحمد أبو بكر: أساليب رياضيات الأعمال وتطبيقاتها في العلوم المالية، الإدارية والاقتصادية، الطبعة الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

– د. عيد أحمد أبو بكر و أ. د. وليد إسماعيل السيفو: مبادئ التحليل الكمي، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

– د. حسن ياسين طعمة و أ. د. محمود حسين الوادي: الإقتصاد الرياضي، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2012.
– د. مناضل الجواري: الإقتصاد الرياضي، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.
– د. مجيد على حسين و د. عفاف عبد الجبار سعيد: الإقتصاد الرياضي، الطبعة الأولى، دار وائل للطباعة والنشر ، عمان، الأردن، 2000.
– د. وليد حميدات وآخرون: مبادئ الاقتصاد الرياضي، مؤسسة حمادة للدراسات الجامعية والنشر والتوزيع ودار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الأردن، 2014.
– شمعون شمعون: الرياضيات الإقتصادية،الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005.
– علي درب كسار الحيالي: الاقتصاد الرياضي، جامعة بغداد، 2014. تاريخ الإسترداد 12 نوفمبر، 2020، من http://coagri.uobaghdad.edu.iq/wp-content/uploads/sites/10/2019/08/%D8%A7%D9%84%D8%A7%D9%82%D8%AA%D8%B5%D8%A7%D8%AF-%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A.pdf
- Yadolah Dodge: Optimisation appliquée,Springer-Verlag, France, 2005.
- Robert Faure et al. : Précis de recherche opérationnelle: Méthode et exercices d`application, 7e édition, Dunod, Paris, 2014.
- Jacques Teghem: Recherche opérationnelle, Tome 1: Méthodes d'optimisation, Collection Références sciences, Ellipses Édition.
- Richard Lusby: Karush-Kuhn-Tucker Conditions. Retrieved 24 January, 2021, from http://www2.imm.dtu.dk/courses/02711/lecture3.pdf
- Max Cerf: Techniques d'optimisation, 2018. Consulté le 20 novembre, 2020, sur https://www.ljll.math.upmc.fr/~cerf/Techniques_Optimisation_2018.pdf.
- Joshua Wilde: Constrained Optimization, revised by Isabel Tecu, Takeshi Suzuki and María José Boccardi, 2013. Retrieved 26 January, 2021, from http://www.columbia.edu/~md3405/Constrained_Optimization.pdf.
- Martin J. Osborne: Mathematical methods for economic theory. Retrieved 2 February, 2021, from https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/toc.
- Julien Grenet: Vade mecum : Optimisation statique. Lagrangien et conditions de Kuhn et Tucker. TD d'Économie, École Normale Supérieure, Année 2007-2008. Consulté le 2 février, 2021, sur http://www.parisschoolofeconomics.com/grenet-julien/TD/Annexe1.pdf.
- Fabian Bastin: Modèles de Recherche Opérationnelle. Consulté le 18 décembre, 2020, sur https://www.iro.umontreal.ca/~bastin/Cours/IFT1575/IFT1575.pdf.
- Eivind Eriksen: Lecture 5: Principal Minors and the Hessian, October 01, 2010. Retrieved 5 February, 2021, from https://www.dr-eriksen.no/teaching/GRA6035/2010/lecture5.pdf.
- Fabián Flores-Bazán: Characterizing FJ and KKT conditions in nonconvex mathematical programming with applications. Retrieved 9 February, 2021, from https://www.ci2ma.udec.cl/pdf/pre-publicaciones/2014/pp14-28.pdf.
- Mathematics for Economists: optimisation, University of Cape Town's official online learning system, University of Cape Town, South Africa. Work licenced under a http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/za/deed.en South Africa Licence. Retrieved 11 February, 2021, from

https://vula.uct.ac.za/access/content/group/95dfae58-9991-4317-8a1d-e2d58f80b3a3/Published%20OER%20UCT%20Resources/Mathematics%20for%20Economics/Notes/ECO4112F%20Section%203%20Optimisation.pdf

- http://www.phpsimplex.com/