Corrigé type ; Série 03

Exercice 01 / Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

1) A est diagonalisable ?

A est diagonalisable ssi $P_A(\lambda) = 0$ et $\# A = \text{mlt } \lambda_i$

$\star$ $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 18 = \lambda^2 + 7\lambda - 8$

$\Delta = 49 + 32 = 81$

$\lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = -8$

Alors $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 8)$; $Sp(A) = \{\overset{\text{spl}}{-8}, \overset{\text{spl}}{1}\}$.

Donc : A est diagonalisable.

2) Comme A est diagonalisable Alors il existe une matrice P inversible tel que : $A = PDP^{-1}$ et $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On remarque que $M^3 = D = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix}$; Alors ;

on peut écrire $B = PMP^{-1} \Rightarrow B^3 = PM^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$

Exercice 02 / Soit $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 2+\alpha & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $P_{A_\alpha}(\lambda)$.

$P_{A_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 2\alpha & -\lambda & 1-\alpha \\ 2+\alpha & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 2\alpha & -\lambda & 1-\alpha \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ \alpha+1 & -\lambda & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - (\alpha+1)\lambda - \alpha - 1) = (-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda - \alpha - 1)$.

Si $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq -3$ $\quad A_\alpha$ une matrice réelle d'ordre 3, admet 3 valeurs propres distinctes $\Rightarrow A_\alpha$ est diagonalisable.

Si $\alpha = -2$: $Sp(A) = \{\overset{\text{double}}{-1}, \overset{\text{spl}}{-2}\}$

$E_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$