

### السلسلة 4: مقاييس التمرکز

التمرين 1: الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأفراد والمداخيل السنوية لكل فرد (الوحدة دولار)

8	7	6	5	4	3	2	1	الأفراد
150000	100000	60000	40000	30000	18000	12000	5000	المداخيل

المطلوب: أرسم منحى لورنز.

التمرين 2: التوزيع التالي يوضح لنا الأجر الساعي في المؤسسة X لمجموعة من العمال.

[100 160[	[80 100[	[40 80[	[20 40[	[10 20[	الأجر الساعي (وحدة نقدية)
4	8	16	32	20	العمال

المطلوب:

- أرسم منحى لورنز؛
- أحسب مؤشر جيني.
- تأكد من نتيجة مؤشر جيني باستعمال الطريقة الهندسية (وجه للطلبة من أجل التوسع في المعارف فقط)

التمرين 3: ليكن التوزيع التكراري التالي

classes	ni
[20 30[	60
[30 40[	80
[40 50[	100
[50 60[	210
[60 70[	230
[70 80[	160
[80 90[	80
[90 100[	60
[100 110[	20
	1000

المطلوب:

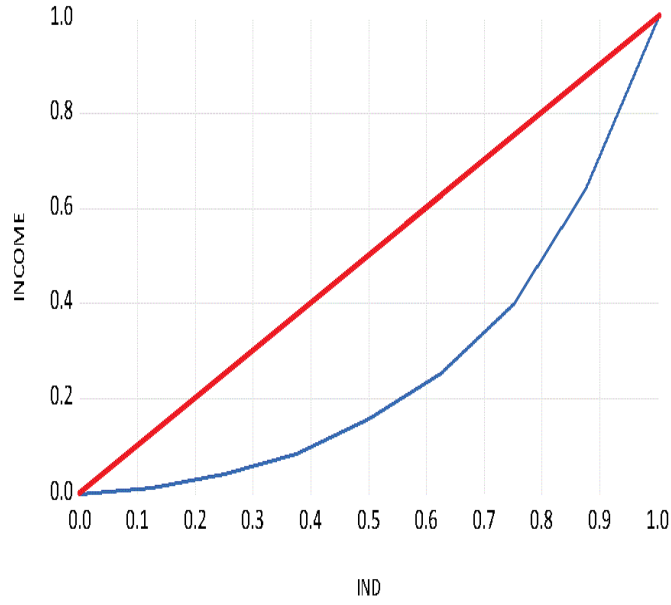
- أرسم منحى لورنز؛
- أحسب مؤشر جيني؛
- تأكد من النتيجة باستعمال العلاقة التالية: وجه للطلبة

$$G_{Index} = \frac{\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j}{2n(n-1)\bar{X}}$$

## حل السلسلة 4:

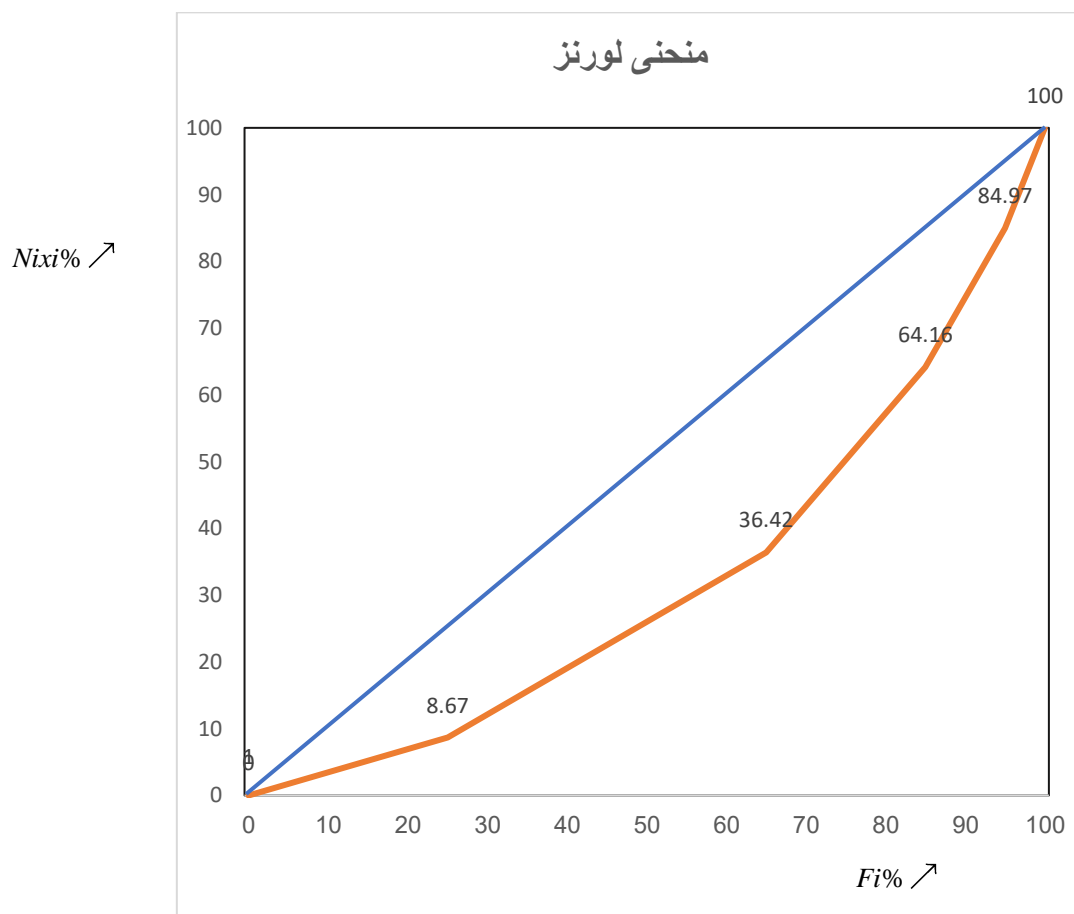
التمرين 1: رسم المنحنى (المتغير المستقل الأفراد والمتغير التابع المداخيل)

الأفراد (Ind)	المداخيل (Income)	نسبة الأفراد	نسبة المداخيل	التكرار الصاعد لنسبة المداخيل
1	5000	0.125	0.012	0.012
2	12000	0.25	0.029	0.041
3	18000	0.375	0.043	0.084
4	30000	0.5	0.072	0.157
5	40000	0.625	0.096	0.253
6	60000	0.75	0.145	0.398
7	100000	0.875	0.241	0.639
8	150000	1	0.361	1
	415000		1	



• رسم المنحنى

	ni	fi%	$F_i\% \nearrow$	xi	nixi	nixi%	$Nixi\% \nearrow$
[10 20[	20	25	25	15	300	8.67	8.67
[20 40[	32	40	65	30	960	27.75	36.42
[40 80[	16	20	85	60	960	27.75	64.16
[80 100[	8	10	95	90	720	20.81	84.97
[100 160]	4	5	100	130	520	15.03	100.00
$\Sigma$	80	100			3460	100	



• مؤشر جيني: نقوم بتطبيق العلاقة التالية

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^k f_i \% \left( \frac{nixi}{\sum nixi} \nearrow + \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \nearrow \right)$$

✘ نشير فقط أنه تم استعمال النسبة المئوية في الحسابات وعلى هذا الأساس لا بد من قسمة المجموع

$$\sum_{i=1}^k F_i \% \left( \frac{nixi}{\sum nixi} \% \nearrow + \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \% \nearrow \right) \text{ على } 1000 \text{ (تم ضرب } f_i \text{ في } 100 \text{ والمجموع } (Q_i + Q_{i-1}) \text{ في } 100).$$

✘ نضع

$$Q_i = N_i x_i \% \nearrow$$

$$Q_{i-1} = N_{i-1} x_{i-1} \% \nearrow$$

xi	ni	fi	$Nixi\% \nearrow$	$N_{i-1}x_{i-1}\% \nearrow$	$(Q_i\% \nearrow + Q_{i-1}\% \nearrow)$	$F_i\% (Q_i\% \nearrow + Q_{i-1}\% \nearrow)$
15	20	25	8.67	0	8.67	216.763
30	32	40	36.42	8.67	45.09	1803.468
60	16	20	64.16	36.42	100.58	2011.561
90	8	10	84.97	64.16	149.13	1491.329
130	4	5	100.00	84.97	184.97	924.8555
	80	100		100		<b>6447.98</b>

$$\sum_{i=1}^k F_i \% \left( \frac{nixi}{\sum nixi} \% \nearrow + \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \% \nearrow \right) = 6447.98 / 10000 = 0.6447$$

نطبق العلاقة التالية:

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^k f_i \% \left( \frac{nixi}{\sum nixi} \nearrow + \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \nearrow \right) = 1 - 0.6447 = 0.35$$

إذن مؤشر جيني يساوي 0.35

ملاحظة هامة: لو لم يتم استعمال التكرار النسبي المتوي واستعمل التكرار النسبي فقط لكانت الحسابات كما

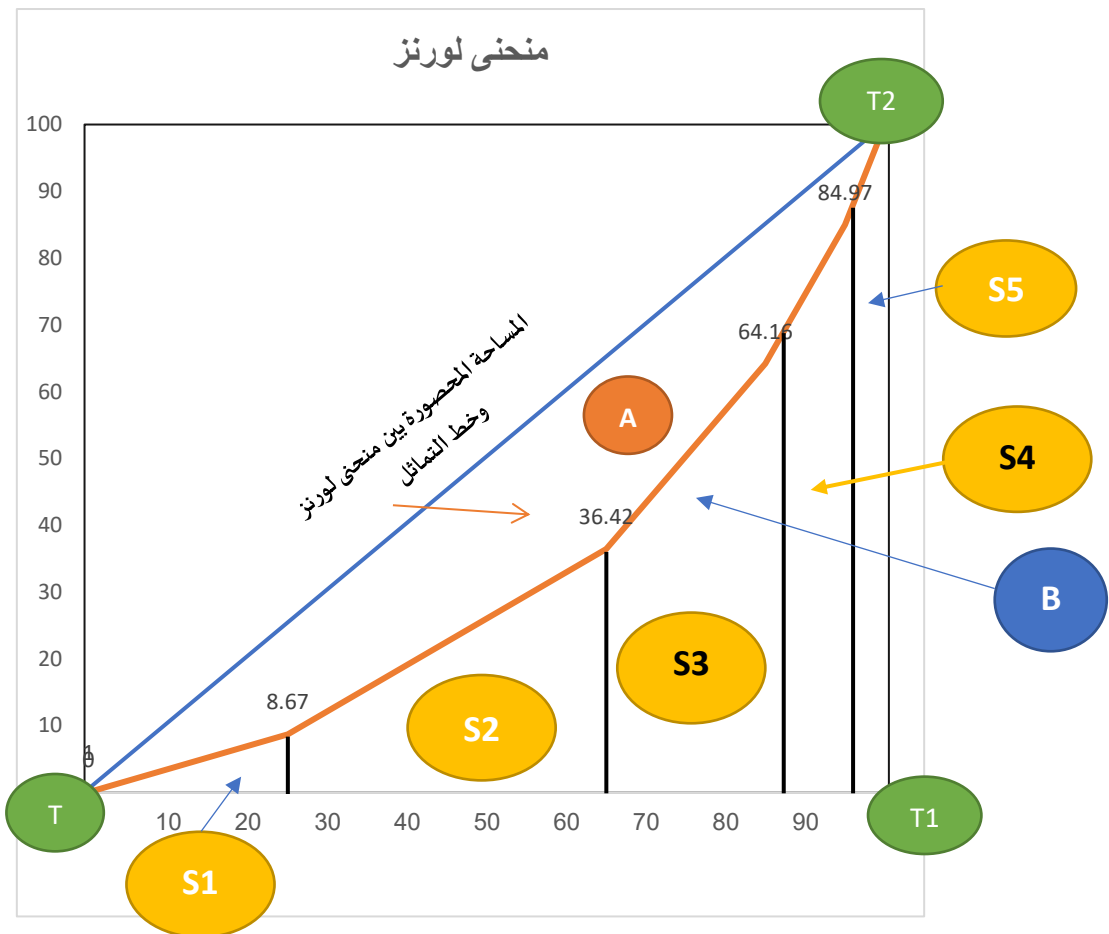
يلي:

fi	Qi	Qi-1	Qi+Qi-1	fi (Qi+Qi-1)
0.250	0.087	0.000	0.087	0.022
0.400	0.364	0.087	0.451	0.180
0.200	0.642	0.364	1.006	0.201
0.100	0.850	0.642	1.491	0.149
0.050	1.000	0.850	1.850	0.092
1.000		1.000		<b>0.645</b>

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^k f_i (Q_i \nearrow + Q_{i-1} \nearrow)$$

$$G_i = 1 - 0.6447 = 0.35$$

الطريقة الهندسية: الرسم التالي يوضح لنا طريقة حساب:



- نسبي المنطقة المحصورة بين منحنى لورنز وخط التماثل بالمنطقة A;
- نسبي المنطقة التي تقع تحت خط لورنز بالمنطقة B.

مؤشر جيني هو المساحة A مضاعفة؛ أي  $G_{index} = 2A$

يمكن حساب المساحة A من خلال:

❖ أولاً حساب مساحة المثلث (T,T1,T2): القاعدة ضرب الارتفاع على 2؛ أي:

$$TT_1T_2 = \frac{100 \times 100}{2} = 5000$$

**ملاحظة هامة:** دائماً مساحة المثلث عند رسم منحني لورنز تساوي 5000 في حالة استعمال التكرارات النسبية المئوية وتساوي 0.5 عند حساب التكرارات النسبية.

❖ ثانياً حساب المساحة B والتي تساوي  $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$S_1 = \frac{25 \times 8.67}{2} = 108.37$	القاعدة في الارتفاع تقسيم 2	S1 (مثلث)
$S_2 = \frac{(36.42 + 8.67) \times (65 - 25)}{2} = 901.8$	((القاعدة الصغرى + القاعدة الكبرى) في الارتفاع) تقسيم 2	S2 (شبه منحرف)
$S_3 = \frac{(64.16 + 36.42) \times (85 - 65)}{2} = 1005.8$		S3 (شبه منحرف)
$S_4 = \frac{(84.97 + 64.16) \times (95 - 85)}{2} = 745.65$		S4 (شبه منحرف)
$S_5 = \frac{(100 + 84.97) \times (100 - 95)}{2} = 462.42$		S5 (شبه منحرف)

إذن:

$$B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$B = 108.27 + 901.6 + 1005.8 + 745.65 + 462.42$$

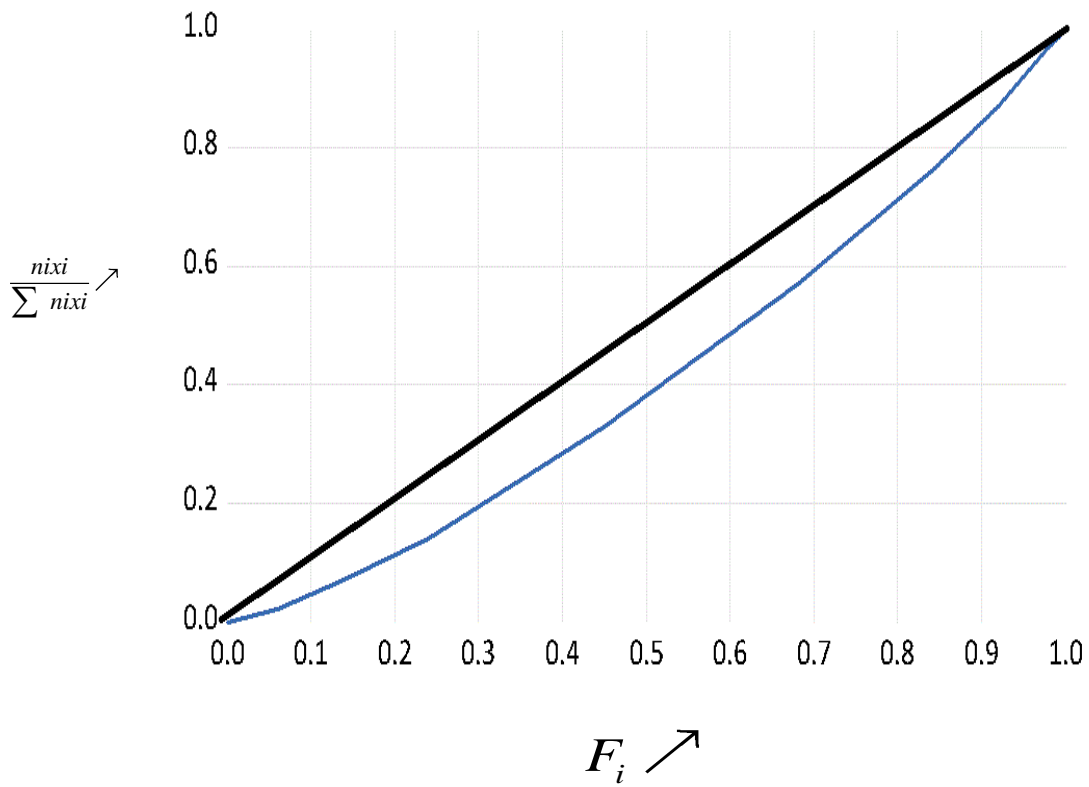
$$B = 3223.95$$

مؤشر جيني	مساحة A	مساحة B	مساحة المثلث
$G_{index} = \frac{A}{A+B} = \frac{1776.05}{5000}$	$A = TT_1T_2 - B = 5000 - 3223.95$ $A = 1776.05$	3223.95	5000
$G_{index} = 0.35$			

ملاحظة هامة: مؤشر جيني يحسب بالعلاقة التالية:  $G_{index} = \frac{A}{A+B}$

$$A + B = \frac{1}{2} \Rightarrow G_{index} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = 2A \quad \text{إذا كان:}$$

Classes	ni	fi	$F_i \nearrow$	xi	nixi	$\frac{nixi}{\sum nixi}$	$\frac{nixi}{\sum nixi} \nearrow$
[20 30[	60	0.06	0.06	25	1500	0.024	0.024
[30 40[	80	0.08	0.14	35	2800	0.045	0.069
[40 50[	100	0.1	0.24	45	4500	0.073	0.142
[50 60[	210	0.21	0.45	55	11550	0.187	0.329
[60 70[	230	0.23	0.68	65	14950	0.242	0.570
[70 80[	160	0.16	0.84	75	12000	0.194	0.764
[80 90[	80	0.08	0.92	85	6800	0.110	0.874
[90 100[	60	0.06	0.98	95	5700	0.092	0.966
[100 110[	20	0.02	1	105	2100	0.034	1
	1000	1			61900	1	



fi	Qi	Qi-1	(Qi+Qi-1)	fi(Qi+Qi-1)
0.06	0.024	0	0.0242	0.00145
0.08	0.069	0.024	0.0937	0.00750
0.1	0.142	0.069	0.2116	0.02116
0.21	0.329	0.142	0.4709	0.09889
0.23	0.570	0.329	0.8990	0.20678
0.16	0.764	0.570	1.3344	0.21351
0.08	0.874	0.764	1.6381	0.13105
0.06	0.966	0.874	1.8401	0.11040
0.02	1	0.966	1.9661	0.03932
1				<b>0.83006</b>

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^k f_i(Q_i \nearrow + Q_{i-1} \nearrow)$$

$$G_i = 1 - 0.83 = 0.17$$

إذن مؤشر جيني أقل من 0.2 إذن التوزيع أكثر عدالة

❖ تأكد من النتيجة باستعمال العلاقة التالية: نستعمل الحسابات التالية (موجه للطلبة):

$$G_{Index} = \frac{\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j}{2n(n-1)\bar{X}}$$

	xj	25	35	45	55	65	75	85	95	105	Σ
xi	ni,j	60	80	100	210	230	160	80	60	20	1000
25	60	0	48000	120000	378000	552000	480000	288000	252000	96000	2214000
35	80	48000	0	80000	336000	552000	512000	320000	288000	112000	2248000
45	100	120000	80000	0	210000	460000	480000	320000	300000	120000	2090000
55	210	378000	336000	210000	0	483000	672000	504000	504000	210000	3297000
65	230	552000	552000	460000	483000	0	368000	368000	414000	184000	3381000
75	160	480000	512000	480000	672000	368000	0	128000	192000	96000	2928000
85	80	288000	320000	320000	504000	368000	128000	0	48000	32000	2008000
95	60	252000	288000	300000	504000	414000	192000	48000	0	12000	2010000
105	20	96000	112000	120000	210000	184000	96000	32000	12000	0	862000
Σ	1000	2214000	2248000	2090000	3297000	3381000	2928000	2008000	2010000	862000	<b>21038000</b>

$$\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j = 21038000$$

إذن:



❖ ثانياً نقوم بحساب:  $2n(n-1)\bar{X}$

xi	ni	nixi
25	60	1500
35	80	2800
45	100	4500
55	210	11550
65	230	14950
75	160	12000
85	80	6800
95	60	5700
105	20	2100
	1000	61900

$\bar{X} = \frac{61900}{1000} = 61.9$  إذن

$2n(n-1)\bar{X} = 2.1000.(1000-1).61.9 = 123676200$

$$I_{Gini} = \frac{\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j}{2n(n-1)\bar{X}} = \frac{21038000}{123676200} = 0.17$$