Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

2022 − 2023

Algèbre 3

Série no 3 : Applications de diagonalisation

Exercice 1. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t), \\ y'(t) = x(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

Solution -

On écrit le système (3) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Donc le système (3) s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

Qui nous donne :

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

Diagonaliser la matrice A :

1. ***Déterminons le polynôme caractéristique de A :***

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc 0, -1 et 2.

2. ***Montrons que*** A ***est diagonalisable :***
Nous venons de voir que A, matrice réelle d'ordre 3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que A est diagonalisable.

3. ***Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage :***
   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$$E_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} y+z=0 \\ \qquad x=0 \Leftrightarrow x=0, y=-z. \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Donc

$$E_1 = \{(0,y,-y); \quad y \in \mathbb{R}\} =< (0,1,-1) > .$$

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} y+z=2x \\ \qquad x=2y \Rightarrow x=2y, z=3y \\ x+y+z=2z \end{cases}$$

Donc

$$E_2 = \{(2y,y,3y); \quad y \in \mathbb{R}\} =< (2,1,3) > .$$

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} y+z=-x \\ \qquad x=-y \Rightarrow x=-y, z=0 \\ x+y+z=-z \end{cases}$$

Donc

$$E_{-1} = \{(x,-x,0); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,0) > .$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. ***Calculons P^{-1} et Déterminons la matrice diagonale D :***

On a

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^{t}(Co(P)) = \frac{1}{6}{}^{t}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, la solution du système (3) est

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{At}X_0 \\
&= Pe^{Dt}P^{-1}X_0 \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2e^{2t}+4e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t} \\ 3+e^{2t}-4e^{-t} & 3+e^{2t}+2e^{-t} & -3+e^{2t}+2e^{-t} \\ -3+3e^{2t} & -3+3e^{2t} & 3+3e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$