4.1. Introduction

La cinématique traite le **mouvement** (position, vitesse, accélération) mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ce mouvement. La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile.

4.2. Un solide indéformable

Un solide indéformable ou rigide, (S), est un ensemble de points telle que, la distance entre deux points quelconques parmi tous ses points, reste constante au cours du temps, et ceci quel que soit le mouvement du solide: $\forall A, B \in (S), \forall t \left\| \vec{AB}(t) \right\| = Cst$.

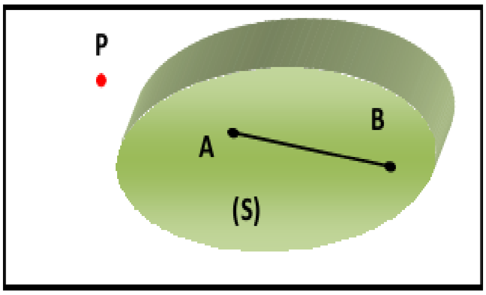

Figure 4.1 : Un solide indéformable.

4.3. Position d'un point dans l'espace

Pour exprimer la position d'un point O_1 en fonction d'un point O, on peut utiliser, entre autres :

- Les **coordonnées cartésiennes**, de paramètres x, y et z : $\vec{OO_1} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$ où x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote de O_1 dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

- Les **coordonnées cylindriques,** de paramètres r, θ et z : $\vec{OO_1} = r.\vec{u}_r + z.\vec{z}$

La relation avec les coordonnées cartésiennes est :

$\vec{u}_r = \cos(\theta).\vec{x} + \sin(\theta).\vec{y}$; $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$

- Les **coordonnées sphériques**, de paramètres ρ, θ *et* ψ : $\vec{OO_1} = \rho.\vec{u}_\rho$

La relation avec les coordonnées cartésiennes est :

$$\begin{cases} x = \rho.\sin(\psi)\cos(\theta); \\ y = \rho.\sin(\psi)\sin(\theta) \quad ; \\ z = \rho.\cos(\psi). \end{cases}$$

avec $\vec{u}_\rho = \cos(\psi).\vec{x} + \sin(\psi).\vec{y}$, $\vec{u}_r = \cos(\theta).\vec{x} + \sin(\theta).\vec{y}$

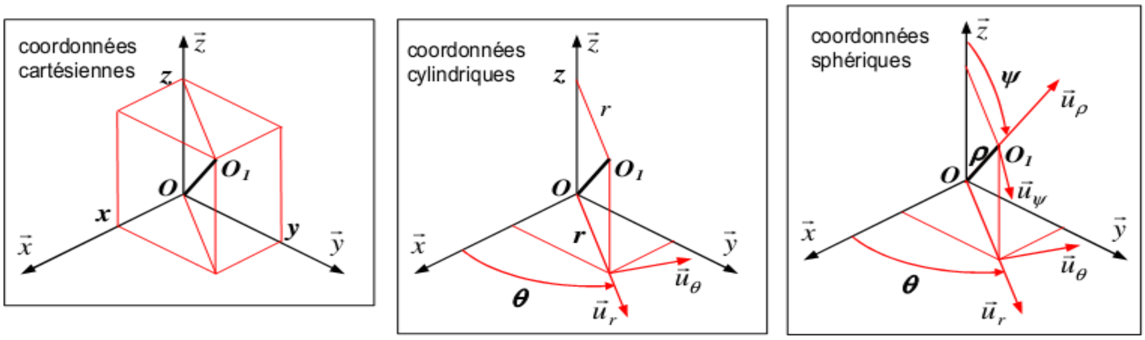

Figure 4.2 : Les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

4.4. Position d'un solide : angles d'Euler

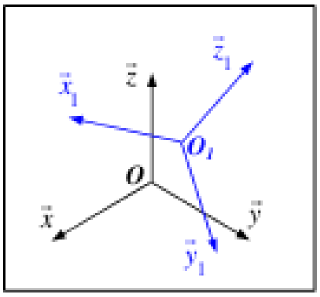

Figure 4.3 : La position d'un solide.

Paramétrer la position d'un solide par rapport à un repère d'observation $M(O,b)$, pourvu d'une base orthonormée directe $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, revient à paramétrer la position d'un repère $M_1(O_1,b_1)$ **lié au solide**, pourvu d'une base orthonormée directe $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par rapport au repère d'observation *M*.

Pour cela, il faut exprimer la position de O_1 en fonction de O et les vecteurs de b en fonction des vecteurs de *b*.

Pour exprimer l'orientation de la base b_1 en fonction de la base *b*, il existe trois angles ψ,θ,φ.

Ce paramétrage est dit des « **angles d'Euler** ».

La figure spatiale est de lecture délicate, elle sera toujours remplacée par la représentation plane des orientations (figures de calcul).

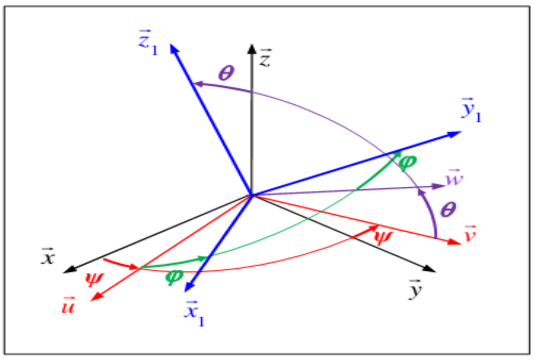

Figure 4.4 : Les angles d'Euler.

On passe de la base b à la base b_1 par trois orientations successives :

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \xrightarrow{\psi.\vec{z}} (\vec{u},\vec{v},\vec{z}) \xrightarrow{\theta.\vec{u}} (\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1) \xrightarrow{\varphi.\vec{z}_1} (\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$$

ψ est **la précession** autour de l'axe $\vec{z}$: $\psi = (\vec{x},\vec{u}) = (\vec{y},\vec{v})$

On le choisit de telle façon que $\vec{v}$ soit dans le plan $(\vec{z},\vec{z}_1)$

ou autrement que $\vec{u}$ soit à l'intersection de $(\vec{x},\vec{y})$ et $(\vec{x}_1,\vec{y}_1)$

θ est **la nutation** autour de l'axe $\vec{u}$: $\theta = (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{z},\vec{z}_1)$

On le choisit de telle façon que $\vec{z}$ devienne $\vec{z}_1$

φ est **la rotation propre** autour de l'axe $\vec{z}_1$: $\varphi = (\vec{u},\vec{x}_1) = (\vec{w},\vec{y}_1)$

On le choisit de telle façon à obtenir $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$.

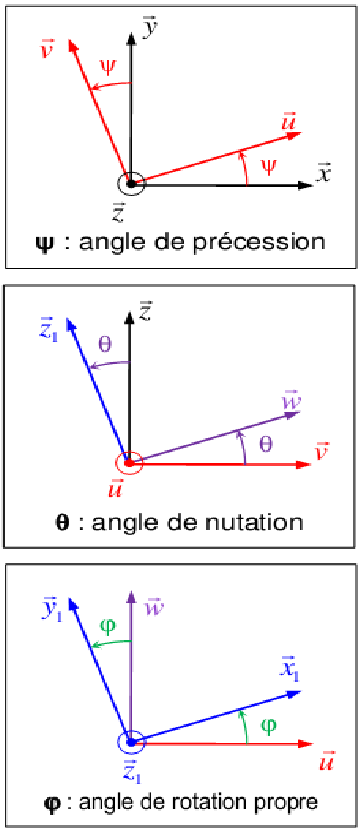

Figure 4.5 : Les orientations.

4.4.1. Passage du repère *b* vers *R* (précession)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z} \equiv \vec{z}_1$

On passe du repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ vers le repère $b(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ en faisant une rotation d'angle ψ .

La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}^R{}_b = \frac{d\psi}{dt}.\vec{z} = \dot{\psi}.\vec{z} = \dot{\psi}.\vec{z}_1$$

$\psi = (\vec{u},\vec{x}) = (\vec{v},\vec{y})$ avec $\vec{z} = (\vec{u} \wedge \vec{v})$

$$\vec{u} = \cos\psi.\vec{x} + \sin\psi.\vec{y} + 0.\vec{z}$$

$$\vec{v} = -\sin\psi.\vec{x} + \cos\psi.\vec{y} + 0.\vec{z}$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}$$

Sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$

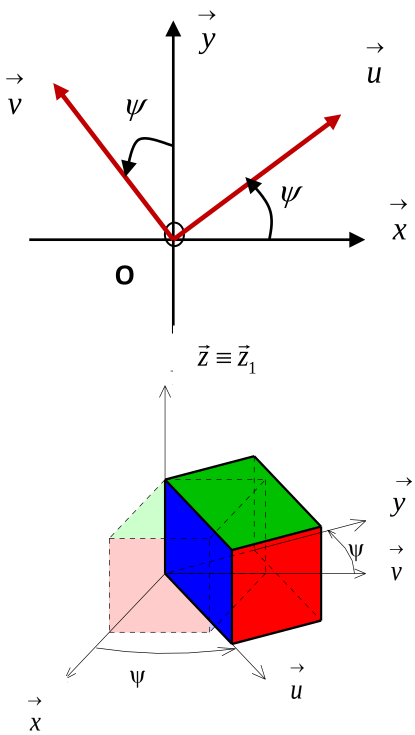

Figure 4.6 : La précession.

$$P_{b\to R}=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$: est la matrice de passage du repère b vers le repère R.

4.4.2. Passage du repère b_1 vers b (Nutation)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}\equiv\vec{u}$

On passe du repère $b_1(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)$ vers le repère $b(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ en faisant une rotation d'angle θ.

La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}(b_1/b)=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}=\dot{\theta}.\vec{u}=\dot{\theta}.\vec{x}$$

$$\theta=(\vec{v},\vec{w})=(\vec{z},\vec{z}_1)$$

$$\vec{u}=\vec{u}+0.\vec{v}+0.\vec{z}$$

$$\vec{w}=0.\vec{u}+\cos\theta.\vec{v}+\sin\theta.\vec{z}$$

$$\vec{z}_1=0.\vec{u}-\sin\theta.\vec{v}+\cos\theta.\vec{z}$$

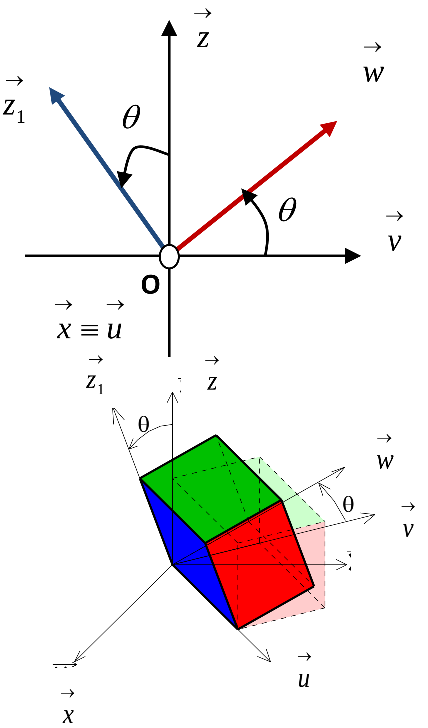

Figure 4.7 : La nutation.

Sous forme matricielle : $$\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{w}\\ \vec{z}_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{z}\end{pmatrix}$$

$$P_{b_1\to b}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$: est la matrice de passage du repère b vers le repère b_1.

4.4.3. Passage du repère R_1 vers b_1 (Rotation propre)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}\equiv\vec{z}_1$, On passe du repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ vers le repère $b_1(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ en faisant une rotation d'angle φ. La vitesse de rotation est donnée par:

$$\vec{\Omega}^{R_1}{}_{b_1}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{z}_1=\dot{\varphi}.\vec{z}_1=\dot{\varphi}.\vec{z}$$

$$\varphi=(\vec{u},\vec{x}_1)=(\vec{w},\vec{y}_1)$$

$$\vec{x}_1=\cos\varphi.\vec{u}-\sin\varphi.\vec{w}+0.\vec{z}$$

$$\vec{y}_1=\sin\varphi.\vec{u}+\cos\varphi.\vec{w}+0.\vec{z}$$

$$\vec{z}_1=\vec{z}$$

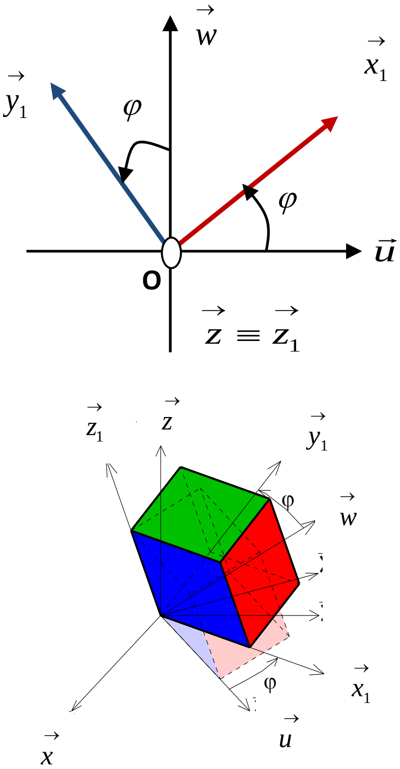

Figure 4.8 : La rotation propre.

Sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$

$$P_{R_1 \to b_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est la matrice de passage du repère b_1 vers le repère R_1

- **La composition des rotations instantanées**

Le vecteur de rotation instantané du repère R_1 par rapport à R est égal :

$$\vec{\Omega}(R_1 / R) = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x} + \dot{\varphi}.\vec{z}_1$$

4.5. Cinématique du point : trajectoire, vitesse et accélération

4.5.1. Trajectoire d'un point par rapport à un repère

La trajectoire d'un point M par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est constituée de l'ensemble des positions occupées par l'extrémité du vecteur O au cours du temps.

$$O\vec{M} = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Cette trajectoire dépend bien évidemment du repère R choisi.

4.5.2. Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère

La vitesse d'un point correspond à la variation de sa position au cours du temps. Elle s'obtient en dérivant par rapport au temps la fonction trajectoire. Elle est donc tangente à la trajectoire. Son unité est le m/s.

$$\vec{V}(M \in R_1 / R) = \left[\frac{dO\vec{M}}{dt} \right]_R$$

avec : O point lié au repère R, et M point lié au repère R_1 (ou point géométrique)

$$\vec{\gamma}(M / R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M / R) \right]_R = \left[\frac{d^2 O\vec{M}}{dt} \right]_R$$

4.6. Vecteur vitesse de rotation et dérivation d'un vecteur

4.6.1. Définition du vecteur vitesse de rotation

Soient R_0 et R_1 deux repères orthonormés directs associés à deux solides en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le vecteur $\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$ mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R_0. Il se nomme vecteur vitesse de rotation, ou vecteur vitesse angulaire, ou vecteur rotation. Ces caractéristiques sont :

- direction : axe de rotation relative des deux repères (axe qui peut varier à chaque instant) ;
- sens : selon la règle du tire-bouchon (ou du pouce de la main droite) ;
- norme : vitesse angulaire de rotation de R_1 par rapport à R_0, en rad/s.

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}_{1/0}\,.\vec{e}_i$$

La notation d'une variable avec un point dessus signifie « dérivée de la variable par rapport au temps ».

Ainsi, $\dot{\theta}_{1/0} = \omega_{R_1/R_0} = \omega_{1/0}$: la dérivée de la position angulaire (en rad) est la vitesse angulaire (en rad/s).

4.6.2. Composition des vecteurs rotation

Soient 3 solides nommés (i), (j) et (k) attachés respectivement aux repères orthonormés directs R_i, R_j et R_k :

- $\vec{\Omega}_{i/j} = -\vec{\Omega}_{j/i}$
- $\vec{\Omega}_{k/j} = \vec{\Omega}_{k/j} + \vec{\Omega}_{j/i}$ (similaire à la relation de Chasles) : c'est la composition des vecteurs rotations.
- Si θ_i et $\vec{e}_i$ sont respectivement les angles et les axes autour desquels il faut tourner pour passer de R à R_1, alors : $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \sum \dot{\theta}_i\,.\vec{e}_i$

Ainsi, toutes les rotations d'un solide quelconque à un autre solide quelconque peuvent se ramener à une somme de rotations représentables sur des figures planes.

<u>Exemple</u> **:** Bras articulé (ci-contre)

$\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$ (aucune rotation dans une glissière) ; $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_{2/1}\,.\vec{z}_0$, $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}_{3/2}\,.\vec{z}_0$

$\vec{\Omega}_{4/3} = \dot{\theta}_{4/3}\,.\vec{x}_3$;

Donc : $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{2/1}\,.\vec{z}_0$;

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1}).\vec{z}_0;$$

$$\vec{\Omega}_{4/0} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1}).\vec{z}_0 + \dot{\theta}_{4/3}.\vec{x}_3.$$

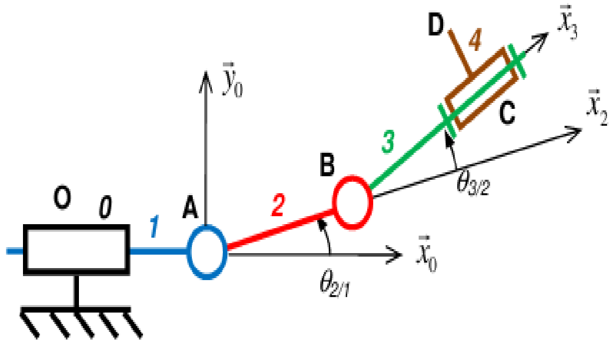

Figure 4.9 : Bras articulé.

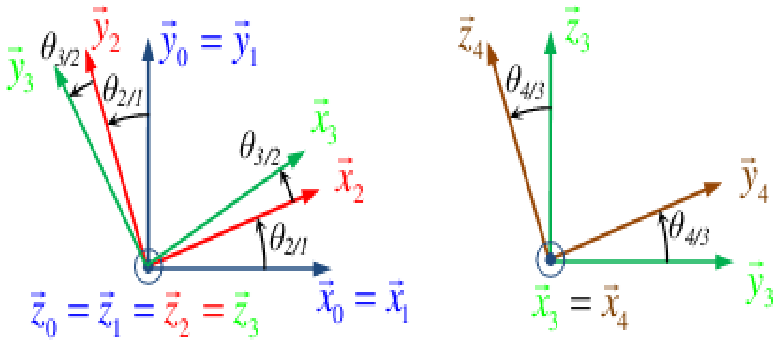

Figure 4.10 : Les orientations.

4.6.3. Changement de base de dérivation

Déterminons la dérivée des vecteurs unitaires de R_1 mobile dans R_0 (en considérant uniquement une rotation autour de pour passer de R_0 à R_1 mais le résultat peut être généralisé car une rotation quelconque est la somme de rotations autour d'axes principaux).

Ainsi on pourra généraliser que pour tout vecteur unitaire $\vec{e}_i$ d'une base *i* :

$$\left[\frac{d\vec{e}_i}{dt}\right]_{/R_j} = \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \vec{e}_i$$

On pourra aussi généraliser cette formule pour tout vecteur $\vec{U}$ quelconque (et donc pas forcément unitaire, et n'appartenant pas forcément à une base donnée) :

$$\left[\frac{d\vec{U}_i}{dt}\right]_{/R_I} = \left[\frac{d\vec{U}_i}{dt}\right]_{/R_J} + \vec{\Omega}_{R_{J/I}} \wedge \vec{U}$$

4.7. Champ des vecteurs vitesse d'un solide

Soient deux points A et B d'un solide S en mouvement par rapport à R_0. Le solide étant indéformable, on a :

$\left\|\vec{AB}\right\| = Cst$ ou encore : $\left\|\vec{AB}\right\|^2 = \vec{AB}.\vec{AB}$ = Constante.

D'après la formule de dérivation d'un vecteur quelconque, on a :

$$\left[\frac{d\vec{AB}}{dt}\right]_{/R_0} = \left[\frac{d\vec{AO}}{dt}\right]_{/R_0} + \left[\frac{d\vec{OB}}{dt}\right]_{/R_0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$$

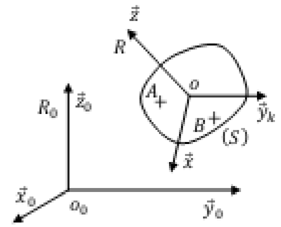

Figure 4.11 : Un solide S en mouvement par rapport à R_0. indéformable.

On obtient finalement la formule de changement de point du vecteur vitesse, dans le mouvement de R_1/R_0 :

$$\vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

Cette formule est connue sous le nom de « **formule de distribution des vitesses** ».

4.8. Champ des vecteurs accélération d'un solide

La formule de changement de base de dérivation permet de définir le champ des vecteurs accélération des points d'un solide, par rapport au référentiel du mouvement. A chaque point du solide (S), on peut associer son vecteur accélération défini par :

$$\vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\left[\frac{d\vec{V}_B}{dt}\right]_{/R_0} = \left[\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right]_{/R_0} + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB})\right]_{/R_0}$$

Soit : $\vec{\gamma}_{B/R_0} = \vec{\gamma}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left[\frac{d\vec{AB}}{dt}\right]_{/R_0} + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt}\right]_{/R_0} \wedge \vec{AB}$

Car : $\vec{\gamma}_{B/R_0} = \vec{\gamma}_{A/R_0} + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt}\right]_{/R_0} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB})$

C'est la **Formule de Rivals** ou loi de distribution des accélérations dans un corps solide indéformable.

4.9. Composition de mouvements

4.9.1. Composition des vitesses

Soient trois solides S_0, S_1 et S_2 en mouvement les uns par rapport aux autres, et ***M*** un point quelconque. On a la formule de **composition des vitesses** :

$$\vec{V}_{M,S_2/S_0} = \vec{V}_{M,S_2/S_1} + \vec{V}_{M,S_1/S_0}$$

$\vec{V}_{M,S_2/S_0}$ est appelée « **vitesse absolue** » ;

$\vec{V}_{M,S_2/S_1}$ est appelée « **vitesse relative** » ;

$\vec{V}_{M,S_1/S_0}$ est appelée **« vitesse d 'entraînement** ».

4.8.2. Composition des accélérations

Soient trois solides S_0, S_1 et S_2 en mouvement les uns par rapport aux autres. Soient R_0, R_1 et R_2 leurs repères respectifs, et M un point quelconque

On obtient la loi de **composition des accélérations** :

$$\vec{\gamma}_{M,S_2/S_0} = \vec{\gamma}_{M,S_2/S_1} + \vec{\gamma}_{M,S_1/S_0} + 2.\vec{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge \vec{V}_{M,S_2/S_1}$$

$\vec{\gamma}_{M,S_2/S_0}$ est appelée « **accélération absolue** » ;

$\vec{\gamma}_{M,S_2/S_1}$ est appelée «**accélération relative** » ;

$\vec{\gamma}_{M,S_1/S_0}$ est appelée **«accélération d 'entraînement** ».

$2.\vec{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge \vec{V}_{M,S_2/S_1}$ est appelée **«accélération de Coriolis** ».

4.9. Mouvements particuliers (rotation, translation, hélicoïdal)

4.9. 1. Rotation autour d'un axe fixe

Soit (S) un solide en rotation autour d'un axe (Δ) **fixe** dans un référentiel *R*.

Soit O∈ (Δ) : $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$ .La distance du point O à tout point du solide (S) est constante au cours du temps. Donc O est lié au solide (S) :

M∈ (S), $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM}$

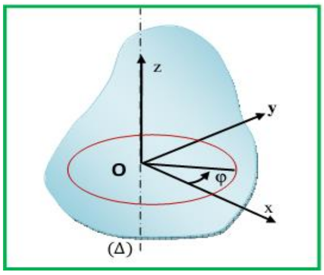

Figure 4.12 : Un solide (S) en rotation autour d'un axe (Δ).

4.9. 2. Translation

✓ **La translation rectiligne.**

Le mouvement de translation de (S) par rapport à (R) est dit rectiligne si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans (R) est une droite.

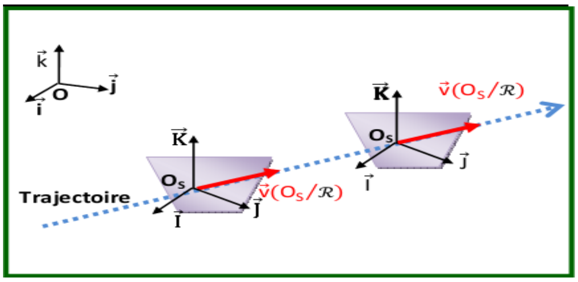

Figure 4.14 : Translation rectiligne.

✓ **La translation circulaire**

Le mouvement de translation de (S) par rapport à (R) est dit circulaire si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans (R) est un cercle.

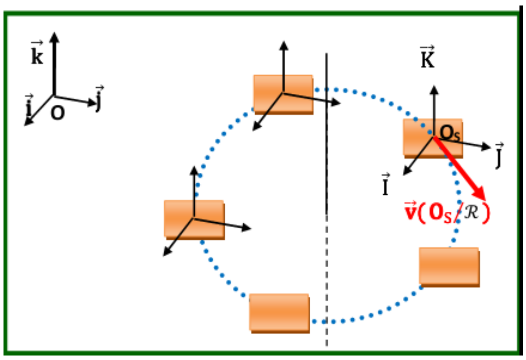

Figure 4.15 : Translation circulaire.

✓ **La translation curviligne**

Désigne une translation qui n'est pas rectiligne. Le vecteur rotation est exprimé par : $\vec{\Omega}_{S_1/S_0} = \vec{0}$

Tous les points du solide en translation ont donc la même vitesse, que l'on peut alors noter $\vec{V}_{S/R}$;

$$\vec{V}_{O_{S/R}} = r.\omega_{1/0}.\vec{u}_\theta$$

4.10. Mouvement plan sur plan

Soient deux solides (S_1) et (S_2). Le mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est dit « plan sur plan» s'il existe un plan (Π_2) lié à (S_2) qui reste coïncident avec un plan (Π_1) lié à (S_1).

Exemple:

Le mouvement de la bielle par rapport au piston, le mécanisme de l'ouvre-portail, de la barrière Sympact, du pilote hydraulique…

En conséquence, dans le cas d'un mouvement plan sur plan de normale commune ;

- Le vecteur vitesse rotation est exprimé par : $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}.\vec{z}_1$

La vitesse : $\vec{V}_{M,S_2/S_1} = V^x{}_{M,S_2/S_1}.\vec{x}_1 + V^y{}_{M,S_2/S_1}.\vec{y}_1$

4.11.1. Dérivation vectorielle

Soient A et B deux points $\in \xi$ fixes dans $R_1 \rightarrow \vec{AB}$ est un vecteur constant dans R_1.

$$\left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{v}(B/R_0) - \vec{v}(A/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{AB}$$

On peut obtenir le vecteur dérivé de $\vec{AB} = \alpha(t)\vec{x}_1 + \beta(t)\vec{y}_1 + \gamma(t)\vec{z}_1$ dans R_0 en prenant en considération le fait que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ varient dans ce repère.

$$\left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_1} + \dot{\alpha}(t)\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0} + \dot{\beta}(t)\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{R_0} + \dot{\gamma}(t)\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{AB}$$